

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



TP : MAINTENANCE ET SURETE DE FONCTIONNEMENT

« Cours pour (TP) : Etudiants Masters, Ingénierie Logistique ».

Dr. Messaoud BENZOUAI.

Maitre de conférences 'B'

Faculté de technologie

Département Génie Industriel

Contact : m.benzouai@univ-batna2.dz

Table des matières

Partie I : Processus de maintenance et sûreté de fonctionnement	03
1. Définitions	03
2. Objectifs généraux de la maintenance	03
3. Cycle de vie d'un matériel et maintenance	03
4. Les différentes formes de la maintenance	04
5. Choix d'une politique de maintenance	06
Partie II : La Fiabilité / Principales Lois.	07
1. Notions : variable aléatoire, densité de probabilité et fonction de répartition. .	07
2. Les fonctions fiabilité et défiabilité	07
3. Détermination expérimentale de la fiabilité	08
4. Le taux de défaillance	08
5. Principales lois de la fiabilité	11
6. Banques de données de fiabilité	15
Partie III : Concepts de base FMD et sûreté de fonctionnement	17
1. La fiabilité.	17
2. La maintenabilité	18
3. La disponibilité	19
4. Facteurs de fiabilité, maintenabilité et disponibilité.....	20
5. Temps caractéristiques de la sureté de fonctionnement	21
6. Les méthodes d'analyse de sûreté de fonctionnement	22
6.1. Notion de système	22
6.2. Digramme Bloc Fiabilité	22
6.3. Arbre de défaillance	25
6.4. Fiabilité des systèmes réparables (Graphe de Markov)	27

Partie I : PROCESSUS DE MAINTENANCE ET SURETE DE FONCTIONNEMENT.

1. Définitions.

Définition 1 : / (AFNOR (NF X 60-010)).

La maintenance : Ensemble des actions permettant de **maintenir** ou de **rétablir** un bien dans un **état spécifié** ou en mesure d'assurer un **service déterminé**.

- **Maintenir**: Notion de «prévention» d'un système en fonctionnement (prévoir et anticiper).
- **Rétablir** : Notion de «correction» consécutive à une perte de fonction.
- **État spécifié ou service déterminé** : implique la prédétermination d'objectif à atteindre, avec quantification des niveaux,

2. Objectifs généraux de la maintenance.

Les services de maintenance doivent définir leurs objectifs qui doivent correspondre à la politique de leur entreprise. Il s'agit des aspects : Financier, Technique et Humain.

Principaux objectifs :

- **Sécurité** : humains et matériels
- **Disponibilité** (plan technique) : fiabilité et maintenabilité.
- **Coûts** (sur plan économique) : directes de maintenance et indirectes de maintenance.
- **Durabilité** : sur le plan technico-économique.

3. Cycle de vie d'un matériel et maintenance.

La maintenance est un processus au sens de la norme ISO 9000 puisqu'elle est constituée d'un ensemble d'activités, qui utilisent des ressources et sont réalisées par des acteurs (techniciens) pour obtenir un résultat « Définition maintenance : actions techniques, administratives et de management, destinées à maintenir un bien ou à le rétablir dans un état dans lequel il peut accomplir la fonction requise. ».

Pour mettre en évidence les effets du **processus maintenance** sur les caractéristiques de **sûreté de fonctionnement** des équipements, nous pouvons le décomposer en trois phases de vie :

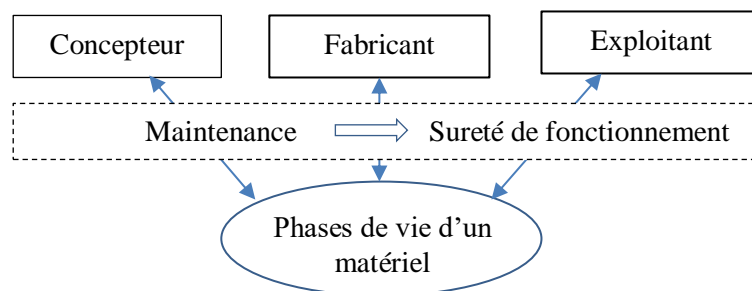


Figure 1 : Phases du cycle de vie d'un matériel et maintenance.

Ce processus, représente l'ensemble des activités menées au cours des différentes phases du cycle de vie de l'installation (étude, préparation, planification, gestion des ressources, réalisation des interventions correctives et préventives, collecte et analyse du retour d'expérience, calcul d'indicateurs, etc.).

Analyse :

Maintenance et concepteur : La prise en compte de la maintenance en phase de conception qui permet de déterminer au mieux la fiabilité et la maintenabilité intrinsèque d'un bien ;

Maintenance et fabricant du bien (constructeur) : La prise en compte de la maintenance en phase de fabrication du bien, c'est la disponibilité des pièces de rechange, les conditions de vente, garantie. etc, ce qui caractérise l'aspect maintenabilité.

Maintenance et exploitant : La prise en compte de la maintenance en phase d'exploitation (maintenance interne à l'entreprise appelée aussi maintenance intégrée) qui produit la fiabilité opérationnelle et par suite la disponibilité, puis le soutien logistique qui conduit à la maintenabilité opérationnelle.

Pour caractériser les interventions de maintenance réalisées sur les matériels lors de son exploitation, et ce pour pouvoir optimiser les concepts de sureté de fonctionnement (Fiabilité, maintenabilité, disponibilité et sécurité) nous pouvons nous référer aux différentes formes de maintenance.

4. Les différentes formes de maintenance,

Dans la définition de la maintenance, nous trouvons deux mots-clés :

Maintenir : c'est l'action préventive et Rétablir : c'est l'action corrective (figure 2).

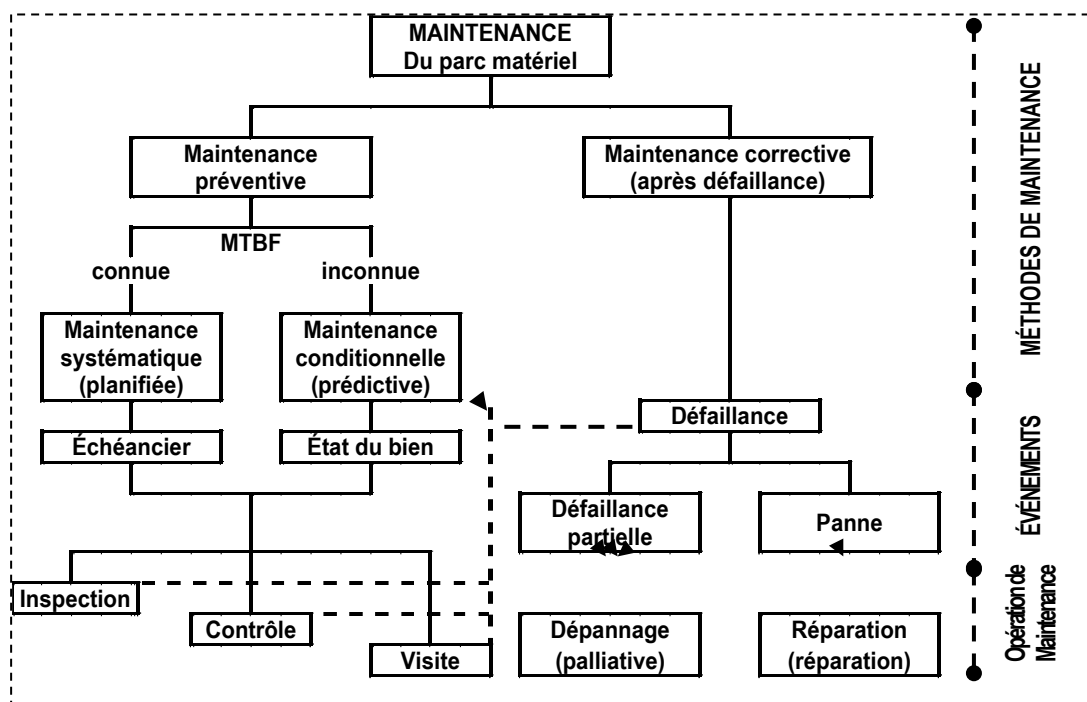


Figure 2 : Types de maintenance

4.1. Maintenance corrective : (Extrait de la norme NF EN 13306 X 60-319 : avril 2001)

a) **Définition** : Exécutée après détection d'une panne et destinée à remettre un bien dans un état dans lequel il peut accomplir une fonction requise.

C'est une maintenance qui intervient après défaillance (Total ou Partiel), caractérisée par :

- Caractère aléatoire;
- Nécessite des ressources humaine compétentes;
- Nécessite la disponibilité de ressources matérielles (pièces de rechange et outillage).

b) Les principales opérations de maintenance corrective :

- Le dépannage : c'est une intervention à caractère provisoire.
- La réparation : c'est une intervention à caractère définitif.

4.2. Maintenance Préventive : (Extrait de la norme NF EN 13306 X 60-319)

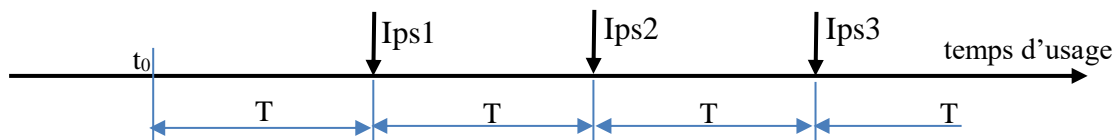
Effectuée dans l'intention de réduire la probabilité de défaillance d'un bien ou d'un service rendu.

On distingue deux types de maintenance préventive :

4.2.1. Maintenance préventive systématique.

a) **Définition** : Exécutée à des intervalles de temps préétablis ou selon un nombre défini d'unités d'usage mais sans contrôle préalable de l'état du bien (EN 13306 : avril 2001).

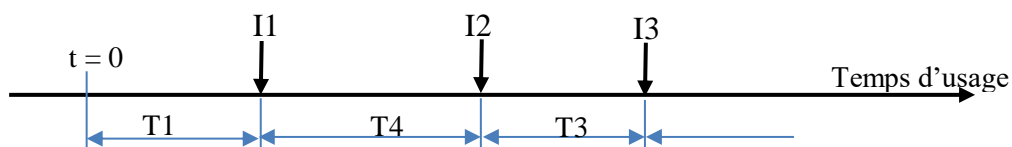
La figure ci-après montre que l'intervention préventive systématique (I_{psi}) s'effectue après un échéancier (période) d'intervention prédéterminée (T) constante.



4.2.2. Maintenance préventive conditionnelle (Extrait norme NF EN 13306 X 60-319)

a). **Définition** : Basée sur une surveillance du fonctionnement du bien et/ou des paramètres significatifs de ce fonctionnement intégrant les actions qui en découle.

La surveillance s'effectue à travers des capteurs en temps réel.



I_i : intervention ; T₁ ≠ T₂ ≠ T₃.

5. Choix d'une politique de maintenance.

Le choix du type de maintenance le mieux adapté dans chaque cas dépend généralement de :

- du type de défaillance ;
- de l'aptitude du personnel de maintenance ;
- de la connaissance des coûts de maintenance (coûts directs, coûts indirects, investissements).
- de l'organisation du travail (méthode, préparation, planning, pièces de rechange, moyens d'investigation, etc.).

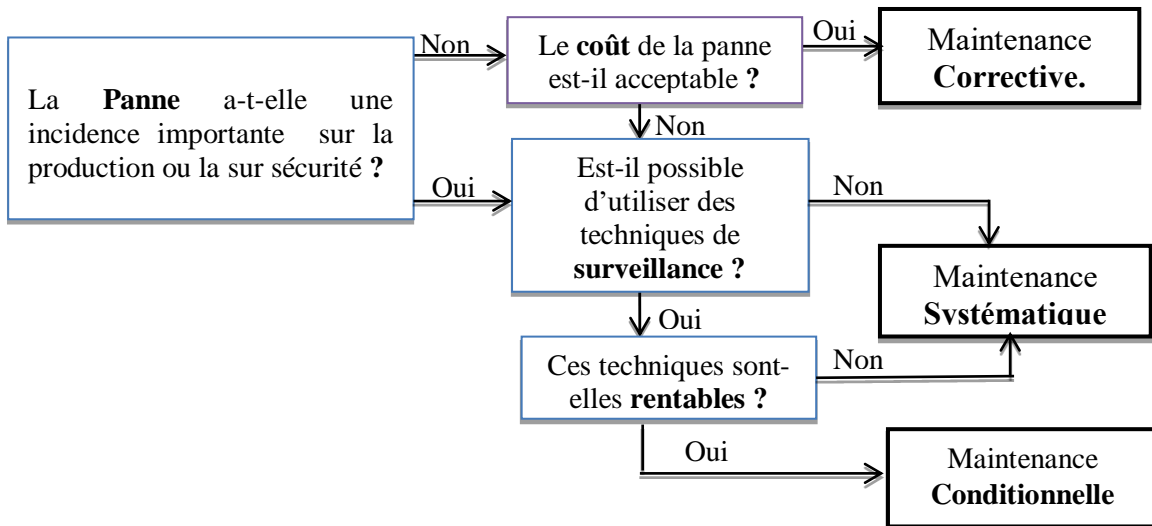


Figure 3 : Politique de maintenance.

Partie II : LA FIABILITE / PRINCIPALES LOIS.

1. Notions :

1.1. Variable aléatoire : On appelle variable X, une variable telle qu'à chacune valeur x de X on puisse associer une probabilité F(x).

$$X : \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\} \implies F(x_i).$$

Une variable aléatoire peut être :

- **Continue :** Peut prendre n'importe quelle valeur réelle (ensemble des nombres réels) appartenant à un intervalle donnée.
Exemple : intervalle de temps entre deux défaillances consécutives (t_1, t_2).
- **Discrète (discontinue) :** Peut prendre n'importe quelle valeur entière (ensemble des nombres naturels).
Exemple : nombre de défaillances d'un composant.

1.2. Densité de probabilité et fonction de répartition.

Soit une loi de probabilité relative à une variable aléatoire continue T, elle est caractérisée par sa fonction de distribution (densité de probabilité) f(t) et sa fonction de répartition F(t), telles que :

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lim_{dt \rightarrow \infty} \frac{\text{Prob}(t < T < t + dt)}{dt}$$

La fonction de répartition F(t) représente la probabilité qu'un événement (une défaillance) survienne à l'instant T dans l'intervalle (0, t). $F(t) = P(T < t)$.

F(t) : Probabilité qu'une défaillance soit survenue à l'instant T dans l'intervalle (0,t)

f(t) : Probabilité de défaillances entre t et t+dt à l'instant T dans l'intervalle (0,t)

2. Les fonctions fiabilité et défiabilité :

Un dispositif mis en marche pour la première fois à 't₀' tombera inévitablement en panne à un instant T non connu a priori.

T, date de la panne, est une variable aléatoire de fonction de répartition F(t).

F(t) est la probabilité d'une défaillance avant t_i.

R(t) est la probabilité de bon fonctionnement à t_i.

R(t) et F(t) sont des probabilités complémentaires, telles que : $R(t) + F(t) = 1$

R(t) : Fonction de fiabilité (survie) ; F(t) : fonction de défiabilité (fonction de panne).

$$\int_0^t f(t)dt + \int_t^{+\infty} f(t)dt = 1$$

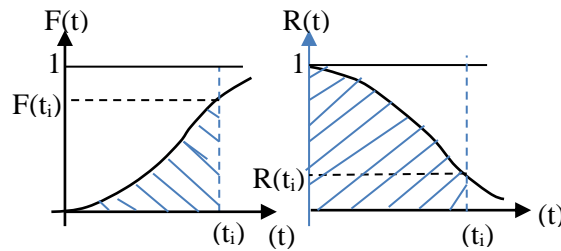


Figure 4 : Probabilités complémentaires $F(t)$ et $R(t)$

3. Détermination expérimentale de la fiabilité.

La fiabilité est définie comme l'aptitude d'un dispositif à accomplir une fonction requise dans des conditions données pour une période de temps donnée.

Elle est caractérisée par la probabilité $R(t)$ que le système S accomplis ces fonctions, dans les conditions données pendant l'intervalle de temps $[0, t]$, sachant que S n'est pas en panne à l'instant $t = 0$.

$$R(t) = P [S \text{ non défaillant sur } (0, t)]$$

Pour évaluer la fiabilité d'un système, il est nécessaire de savoir comment il devient défaillant dans le temps : la loi de survie le précise. Le taux de défaillance indique le comportement d'un dispositif d'un âge donné dans le futur immédiat.

On soumet à l'essai un échantillon de taille dans les mêmes conditions soit :

- $N_s(t)$ le nombre de survivants à l'instant t
- $N_f(t)$ le nombre de défaillants à l'instant t .
- N nombre d'échantillon initial.

$$N_s(t) + N_f(t) = N \quad \text{donc} \quad \frac{N_s(t)}{N} = \frac{N - N_f(t)}{N} = \frac{N(t)}{N}$$

Si N tend vers ∞ $\frac{N(t)}{N}$ tend vers la fiabilité du système $R(t) = \frac{N(t)}{N}$

4. Le taux de défaillance.

4.1. Définition Le taux de défaillance, noté $\lambda(t)$, est un indicateur de fiabilité qui représente :

- soit un taux supposé constant de défaillances par unité d'usage exprimé sous la forme générale :

$$\lambda = \frac{\text{nombre de défaillances sur un intervalle de temps}}{\text{nombre de survivants au début de la période } \times \text{intervalle de temps d'utilisation}}$$

S'exprime le plus souvent en « pannes par heure ».

- Soit la fonction $\lambda(t)$ qui représente une proportion de survivants à l'instant t , tirée d'un échantillon.

4.2. Durée de vie d'un équipement « courbe en baignoire »

La variation de la fonction $\lambda(t)$ d'un équipement le long de sa durée de vie est connue a priori et est une courbe en forme de « baignoire ».

La variation de $\lambda(t)$ (figure 5) se caractérise par trois périodes distinctes : Jeunesse, Maturité et Vieillesse de l'équipement. Chaque période ayant ses types de défaillances propres.

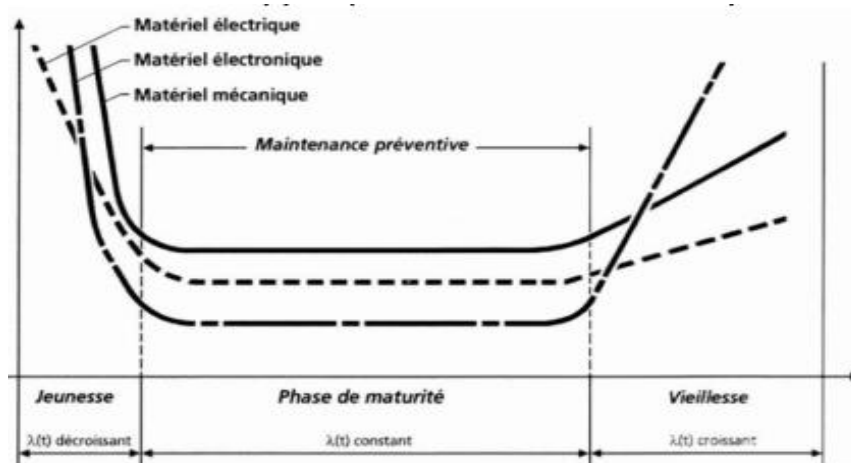


Figure 5 : Courbe en baignoire d'un système

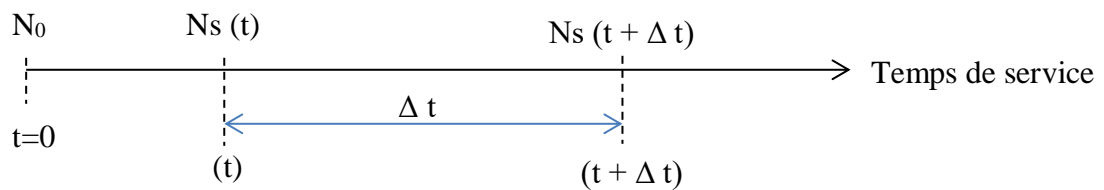
- **Période de jeunesse** : C'est une période de rodage et d'adaptation et aussi de mise en service et réglage. Caractérisée par : des défaillances « précoces », un taux de défaillance décroissant et une période très courte ;
- **Période de maturité ou vie utile** : C'est une période de rendement optimal du matériel. Les défaillances apparaissent sans dégradations préalables donc des défaillances aléatoires et un taux de défaillance sensiblement constant. Nous nommerons « hypothèse exponentielle » le fait de considérer λ constant sur la période de vie utile ;
- **période de vieillesse ou d'usure** : C'est aussi une période d'obsolescence qui se caractérise par : un mode de défaillance prédominant, visible, entraîne une dégradation accélérée, un taux de défaillance croissant. A un certain seuil de $\lambda(t)$, le matériel est mort il est alors déclassé (réformé), c'est pourquoi durant cette période le service maintenance augmente les études technico-économique afin de décider sur la réforme du matériel au moment opportun.

4.3. Calcul du taux de défaillance.

4.3.1. Calcul du taux de défaillance moyen.

Cas 1 : les éléments défaillants sont remplacés dans l'intervalle Δt .

Nommons : N_0 : nombre initial de dispositifs,
 $N_s(t)$: nombre de survivants à l'instant t ,
 $N_s(t + \Delta t)$: nombre de survivants à l'instant $t + \Delta t$,
 $C(\Delta t) = N_s(t) - N_s(t + \Delta t)$: nombre de défaillants pendant Δt .



Dans ce cas le lot de dispositif est constant ($N_0 = N_s(t)$), le taux de défaillance moyen sur l'intervalle Δt est :

$$\lambda(t) = C(\Delta t) N_0 \cdot \Delta t \quad \lambda(t) = \frac{C(\Delta t)}{N_0 \cdot \Delta t}$$

Cas 2 : les éléments défaillants ne sont pas remplacés (ou ne sont pas réparés) dans l'intervalle Δt .

Dans ce cas, ($N_0 \neq N_s(t)$), la fonction $N(t)$ est décroissante. Le taux de défaillance moyen sur l'intervalle Δt est :

$$\lambda(t) = \frac{N_s(t) - N_s(t + \Delta t)}{N_s \cdot \Delta t}$$

Ce taux de défaillance est une valeur moyenne sur une période Δt connue. Or, au même titre que $F(t)$ et $R(t)$, il est intéressant de connaître l'évolution de $\lambda(t)$ au cours du temps. C'est le taux de défaillance instantané :

4.3.2. Le taux de défaillance instantané.

Comme la défaillance est la cessation d'une aptitude à accomplir une fonction requise, c'est le passage de l'état de fonctionnement à l'état de panne.

On distinguera sa cause (circonstances ayant entraîné la défaillance), son mode ou mécanisme (processus ayant entraîné la défaillance) et son taux $\lambda(t)$ qui représente la proportion de dispositifs qui, ayant vécu un temps t , ne sont plus en vie à $t + dt$.

Le taux de défaillance s'exprime de la façon suivante :

$$\lambda(t) = \frac{\text{nombre de défaillances sur un intervalle de temps}}{\text{nombre de survivants au début de la période} \times \text{intervalle de temps d'utilisation}}$$

$$\lambda(t) = \frac{\text{nombre de défaillances au de } \Delta t}{\text{nombre de survivants au début de la période} \times \Delta t}$$

Si $\Delta t \longrightarrow dt$ alors :

$$\lambda(t) = \frac{\text{nombre de défaillances au cours de } \Delta t}{\text{nombre de survivants au début de la période}} \times \frac{1}{dt}$$

$$\lambda(t) \cdot dt = \frac{F(t + dt) - F(t)}{R(t)} = \frac{dF(t)}{1 - F(t)}$$

$$f(t) = \frac{dF(t)}{R(t)} \longrightarrow dF(t) = f(t).R(t) \longrightarrow \lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

5. Principales lois de fiabilité.

Nous présentons dans ce paragraphe les lois de fiabilité les plus couramment utilisées en maintenance.

5.1. Loi normale

La loi normale appelée aussi loi de Gauss-normale est très répandue et la plus utile parmi les lois de probabilité car elle s'applique à de nombreux phénomènes.

C'est la loi à deux paramètres : La moyenne (m ou parfois μ) et l'écart type σ

➤ Domaine d'application :

En fiabilité, la distribution normale est utilisée pour représenter la distribution des durées de vie de dispositifs en fin de vie (usure), c'est-à-dire en phase de vieillesse (voir figure 5) car le taux de défaillance est toujours croissant.

Utilisée uniquement lorsque ($m > 3x \sigma$). En effet, t est toujours positif, alors que la variable normale est définie de $-\infty$ à $+\infty$.

➤ Caractéristiques de la loi normale.

- La densité de probabilité : $f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$
- La fonction de répartition : $F(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$

La fiabilité est donnée par : $R(t) = 1 - \theta((t - \mu) / \sigma)$

Où θ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite : ($\mu = 0, \sigma = 1$):

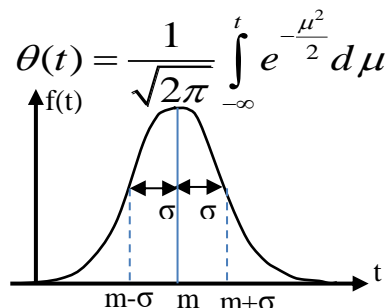


Figure. 6 : La densité de probabilité / loi normale.

5.2. La loi exponentielle

➤ Domaine d'utilisation :

La loi exponentielle en fiabilité est utilisée lorsque le taux de défaillance d'un système ou d'un composant est sensiblement constant ($\lambda = \text{constant}$), ceci dit que la loi exponentielle s'applique lorsque le système se trouve en phase de maturité (voir figure 5)

C'est le seul cas où $\lambda = \frac{1}{MTBF}$ (taux de panne) ; $\mu = \frac{1}{MTBF}$ (taux de réparation)

➤ Origine de la loi exponentielle :

La loi de Poisson (loi discrète) : La réalisation d'événements aléatoires dans le temps se nomme « processus de Poisson ». Il caractérise une suite de défaillances équiprobables, indépendantes du temps et indépendantes entre elles.

Dans ce cas, la probabilité de constater k pannes à l'instant t s'exprime par la loi de Poisson :

$$P(k) = \frac{\lambda t}{k!} e^{-\lambda t}$$

À l'instant t , la fiabilité est la probabilité pour qu'il n'y ait pas de panne à t .

Elle s'écrit : $R(t) = P(k=0) = e^{-\lambda t}$ ($a^0 = 1$)

➤ Caractéristiques de la loi exponentielle :

Elle se retrouve à partir de la loi fondamentale de la fiabilité avec λ constant.

La probabilité de survie entre 0 et t devient :

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

Densité de probabilité : $f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{d(1-R(t))}{dt} = \frac{d(1-e^{-\lambda t})}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}$

Fonction de répartition : $F(t) = 1 - R(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ = probabilité de panne entre 0 et t .

Espérance mathématique : $E(t) = 1/\lambda = MTBF$.

Ecart type : $\sigma = 1/\lambda$.

Le taux de défaillance : $\lambda = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda = \text{constant}$

Durée de vie associée à un seuil de fiabilité : tirons t de la loi exponentielle :

$$-\lambda t = \ln R(t) \quad \text{soit} \quad t = \ln \lambda R(t) \quad \text{soit} \quad t = (1/\lambda) \ln 1/R(t).$$

La moyenne des temps de fonctionnement (MTTF) ou de bon fonctionnement (MTBF) un important estimateur de la fiabilité et de la disponibilité des systèmes et se calcule par

l'expression : $MTBF = MTTF = \int_0^{\infty} R(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$

Par exemple, pour un composant de $MTBF = 2\ 000$ h et un seuil $R(t) = 0,9$, on aura $t = 0,105 / \lambda = 0,105 \cdot MTBF$, d'où la valeur $t = 210$ h telle que 90 % des composants survivent.

5.3. La loi de Weibull

En fiabilité, c'est la plus répandue des lois, utilisées dans plusieurs domaines (électronique, mécanique,...). Cette loi permet d'ajuster toutes sortes de résultats expérimentaux et opérationnels.

➤ **Domaine d'application**

La loi de Weibull caractérise le comportement du système dans les trois phases de vie, c'est-à-dire elle est utilisée dans les phases : de jeunesse (λ décroissant), de maturité (λ constant) et la phase de vieillissement (λ croissant).

Son utilisation fournit :

- une estimation de la MTBF;
- les fonctions $R(t)$ et de $\lambda(t)$, et leurs variations sous forme graphique ;
- fournit aussi le paramètre de forme β qui peut orienter un diagnostic, sa valeur caractérise certains modes de défaillance.

➤ **Caractéristiques de la loi de Weibull.**

Dans sa forme la plus générale, la distribution de Weibull dépend des trois paramètres suivants : β , η et γ .

Où : β est appelé paramètre de forme ($\beta > 0$) : suivant la valeur de que β est supérieur, égal ou inférieur à 1, la loi de Weibull correspond à un taux de défaillance instantané croissant, constant ou décroissant.

Paramètre de forme β : C'est un paramètre sans dimension. Il détermine la forme de la distribution $f(t)$ des défaillances d'un système et que sa valeur caractérise chacune des trois phases de la vie d'un système :

- $\beta < 1$: phase de jeunesse avec défaillances (généralement des défauts de fabrication ou de montage) ;
- $\beta = 1$: phase de maturité avec défaillances aléatoires. Ce cas particulier correspond au taux de défaillance constant, c'est-à-dire on retrouve la distribution exponentielle, cas particulier de la loi de Weibull. Dans ce cas : $\lambda = \frac{1}{\eta}$
- $\beta > 1$ phase de vieillesse avec apparition d'un mode de défaillance prédominant caractérisé par β . Le paramètre de forme peut aussi servir d'indicateur de diagnostic, certaines valeurs de β étant caractéristiques d'un mode de défaillance particulier.

Le paramètre d'échelle η : appelé paramètre d'échelle ($\eta > 0$), caractérisant le choix d'une échelle, il s'exprime dans la même unité de temps (heures ou cycles) que les TBFi.

Remarque : plus η est faible plus la fonction de distribution $f(t)$ est aplatie.

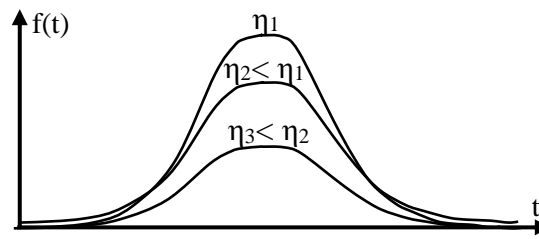


Figure 7 : fonction de distribution pour différentes valeurs de η

Le paramètre de localisation γ : $(-\infty < \gamma < +\infty)$ Également nommé paramètre de décalage ou de position, il s'exprime en unité de temps. Il indique la date de l'apparition du mode de défaillance caractérisé par β .

- Si $\gamma > 0$, il y a survie totale entre $t = 0$ et $t = \gamma$. C'est-à-dire le $MTTF = t = \gamma$.
- Si $\gamma = 0$, les défaillances débutent à l'origine des temps.
- Si $\gamma < 0$, les défaillances ont débuté avant l'origine des temps relevés, ce qui montre que la mise en service de l'équipement étudié a précédé la mise en historique des TBF. C'est-à-dire que dans ce cas l'équipement a fonctionné puis tombé en panne sans relevés des défaillances de la part du service maintenance (dossier historique non établi dans le temps).

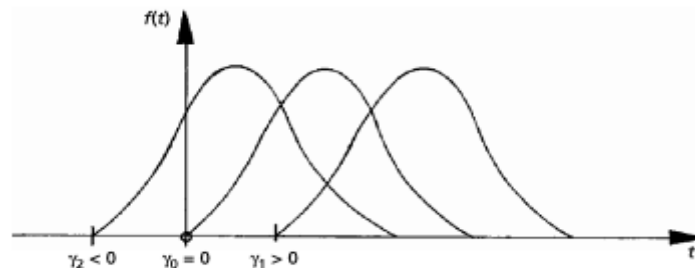


Figure 8 : Fonction de distribution pour différentes valeurs de γ .

La densité de probabilité :
$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta} \right)}$$

La fonction fiabilité s'écrit :
$$R(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta} \right)^{\beta}}$$

Le taux de défaillance est donnée par :
$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta} \right)^{\beta-1}$$

Caractéristiques des fonctions : densité de probabilité $f(t)$, Fiabilité $R(t)$ et taux de défaillance $\lambda(t)$ pour différentes valeurs du paramètre de forme β .

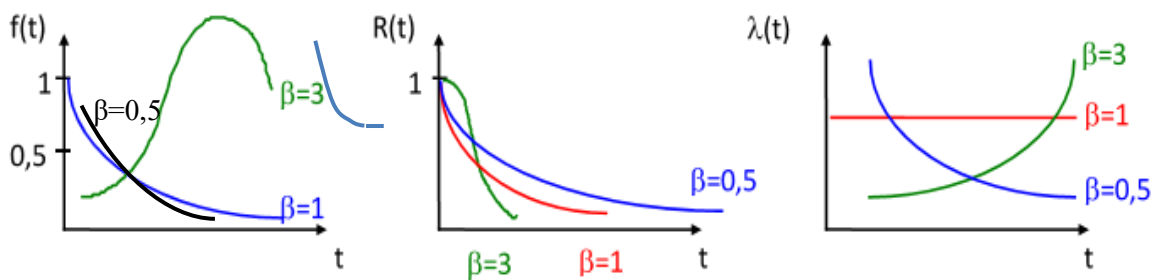


Figure 9 : Caractéristiques $f(t)$, $R(t)$ et $\lambda(t)$ pour différentes valeurs de β / loi Weibull.

6. Banques de données de fiabilité.

L'étude de fiabilité offre un intérêt dans la mesure où l'on est en présence de données spécifiques. Certaines données sont nécessaires pour toute analyse de fiabilité.

Elles donnent principalement des taux de défaillance d'équipements. Avoir recours à ces banques est particulièrement intéressant lors de l'estimation des probabilités de défaillances, étape nécessaire pour pouvoir quantifier par exemple la probabilité de défaillance de l'évènement redouté (le cas de l'arbre de défaillance).

6.1. Banques de données internes :

- Elles peuvent être les temps de bon fonctionnement des matériels 'TBF' ou des moyennes de temps de bon fonctionnement MTBF.
- Généralement ses données proviennent :
 - des fiches d'intervention du service maintenance (fichier historique). Il est à noter que la fiche d'intervention présente aussi pour chaque panne : son type, sa cause, l'organe défectueux...)
 - Du retour client, si on s'intéresse à la maintenance de matériels vendus par l'entreprise, données établies par le service après-vente ;
 - Par des enquêtes faites sur des matériels analogues fonctionnant dans d'autres unités
- Exploitation des données : Ces données peuvent être exploitées en ayant une quantité de TBF, on peut établir les lois de fiabilités. On utilise ses lois de fiabilité pour évaluer les périodicités d'entretien préventif. D'une manière générale elles servent à prévoir toute la logistique d'un système.

6.2. Banques de données externes :

Ils existent des tables concernant les composants électroniques et les éléments mécaniques courants. Ces tables indiquent :

- La dénomination du matériel et du composant ;
- La MTBF ;
- Le taux de défaillance moyen (avec l'hypothèse λ constante) ;
- Un coefficient multiplicatif du taux de panne dépendant de l'environnement et des contraintes d'utilisation.

Ci-après quelques exemples de banques de données de fiabilité :

- **OREDA** (Off Shore Reliability Data), 4e édition 2002 ;
- **EIreDA** (European industry reliability Data bank), 1998 ;
- **Safety Equipment Reliability Handbook** , Second edition (Excellence In Dependable Automation), 2e édition 2006 ;
- **IEEE Std. 500-1984** (guide to the collection and presentation of electrical, electronic, sensing component, and mechanical equipment reliability data for nuclear power generating stations) ;
- **CCPS** (guidelines for process equipment reliability data AIChE), 1989.

Il est important de garder à l'esprit que ces banques de données rapportent, pour la plupart, des taux de défaillances, et non des probabilités de défaillances.

Exemples de données de fiabilité.

Tableau 1 : Valeurs de fiabilité relatives à une vanne à commande pneumatique (extraites de l'EireDA 1998).		
Technologie	Taux de défaillance moyen (10^{-6} /h)	Probabilité de défaillance à la demande
Vanne à commande pneumatique	0,17	$0,15 \cdot 10^{-3}$

Tableau 2 : Valeurs de fiabilité relatives à une vanne à commande pneumatique (extraites du Guidelines for Process Equipment Reliability Data).		
Technologie	Taux de défaillance moyen (10^{-6} /h)	Probabilité de défaillance à la demande
Vanne à commande pneumatique	3,59	$2,2 \cdot 10^{-3}$

Remarque : En comparant les données de fiabilité les 02 tableaux ci-dessus, il est possible de constater des écarts significatifs suivant la banque de données consultée.

Ainsi, est-il conseillé, dès que possible, d'en étudier plusieurs afin d'évaluer la dispersion des valeurs et l'erreur commise en retenant une valeur moyenne, notamment.

Partie III : CONCEPTS DE BASE FMD ET SURETE DE FONCTIONNEMENT.

La sureté de fonctionnement (appelée aussi la science des défaillances) « Ensemble des aptitudes d'un produit qui lui permettent de disposer des performances spécifiées, au **moment voulu**, pendant **la durée prévue, sans dommage** pour lui-même et son environnement ».

Les composantes de la sureté de fonctionnement sont :

1. La fiabilité :

« Aptitudes d'un bien à accomplir une **fonction requise**, dans des **conditions d'utilisation** données, durant un **intervalle de temps** donné ».

$R(t) = P \{S \text{ non défaillant sur l'intervalle } [0,t] \}$: C'est la probabilité qu'un système S fonctionne sans subir de panne sur l'intervalle $[0,t]$.

- Fonction requise : ou accomplir une mission ou rendre le service attendu. La définition de la fonction requise implique un seuil d'admissibilité en deçà duquel la fonction n'est plus remplie.
- Conditions d'utilisation : définition des conditions d'usage, c'est à dire l'environnement et ses variations, les contraintes mécaniques, chimiques, physiques, etc. Il est évident que le même matériel placé dans 2 contextes de fonctionnement différents n'aura pas la même fiabilité.
- Période de temps donnée : définition de la durée de mission T en unités d'usage.

On distingue la fiabilité opérationnelle : c'est la fiabilité mesurée sur des dispositifs en exploitation normale. Elle dépend des conditions réelles d'utilisation et du support logistique.

Remarque : « Le temps de bon fonctionnement MTBF reflète la fiabilité », revient à dire améliorer la fiabilité, c'est augmenter le temps de bon fonctionnement, c'est-à-dire diminuer le taux de panne $\lambda(t)$.

Généralement, améliorer la fiabilité c'est : Faire une bonne maintenance préventive.

Si $R(t)$ est la probabilité de ne rencontrer aucune défaillance dans l'intervalle $[0, t]$ sachant que le système est non défaillant à $t = 0$, le terme $1 - R(t)$ représente la probabilité que la défaillance se produise entre $[0, t]$.

L'aptitude contraire de la fiabilité est appelée défiabilité notée : $F(t)$, et est définie par :

$$F(t) = 1 - R(t) = P(t \leq T)$$

On aura donc : $R(t) + F(t) = 1$

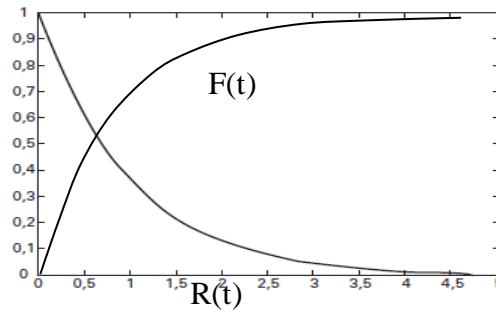


Figure 10 : Courbes de la fiabilité $R(t)$ et la défiabilité $F(t)$

La figure 10, représente une allure de la fiabilité $R(t)$ en fonction du temps pour une loi exponentielle définie par :

$$R(t) = \text{expo}(-\lambda t) \quad \text{avec } t > 0 \text{ et } \lambda > 0.$$

2. La maintenabilité :

Dans des conditions données d'utilisation, aptitudes d'un bien à être maintenu ou rétabli dans un état où il peut accomplir une fonction requise, lorsque la maintenance est accomplie dans des conditions données, en utilisant des procédures et des moyens prescrits.

$$M(t) = P \{ S \text{ est réparé sur l'intervalle } [0, t] \}$$

C'est la probabilité que la maintenance d'un système S accomplie dans des conditions données, soit effectuée sur l'intervalle $[0, t]$ sachant qu'il est défaillant à l'instant t .

Remarque : « Le temps moyen de réparation MTTR reflète la maintenabilité », revient à dire améliorer la maintenabilité c'est minimiser les temps de réparations et par suite le taux de réparation $\mu(t)$ ».

Pour améliorer la maintenabilité (minimiser le $\mu(t)$) c'est :

- Avoir un équipement réparable, donc démontable.
- Avoir la disponibilité de la pièce de rechange ;
- Avoir l'outillage et la logistique nécessaires pour l'intervention ;
- Avoir les procédures de travail (gammes opératoires) ;
- Avoir une conception avec une accessibilité à l'intervention (démontage et remontage) ;
- Avoir un technicien qualifié ;
- Autres.

L'Immaintenabilité correspond à la probabilité contraire, soit :

$$\overline{M}(t) = 1 - M(t) = 1 - P(S \text{ non réparé sur la durée } [0, t]).$$

3. La disponibilité :

Aptitudes d'un bien à être en état d'accomplir une fonction requise, dans des conditions données, à un **instant donné** ou durant **un intervalle** de temps donné, en supposant que la fourniture **des moyens externes** est assurée.

$$A(t) = P \{ S \text{ non défaillant sur l'instant } t \}$$

C'est la probabilité qu'un système S soit non défaillant à tout instant, lors du démarrage et durant l'intervalle $[0,t]$, c'est pourquoi qu'on peut conclure que la disponibilité regroupe la fiabilité et la maintenabilité.

Améliorer la disponibilité, revient à dire améliorer la fiabilité et la maintenabilité, c'est-à-dire augmenter le MTBF (réduire $\lambda(t)$) et aussi réduire le MTTR (réduire $\mu(t)$).

L'aptitude contraire est appelée **indisponibilité** et est définie par : $\overline{A(t)} = 1 - A(t)$

On distingue :

- La disponibilité intrinsèque :

Elle exprime le point de vue du concepteur. Ce dernier a conçu et fabriqué le produit en lui donnant un certain nombre de caractéristiques intrinsèques, c'est à dire des caractéristiques qui prennent en compte les conditions d'installation, d'utilisation, de maintenance et d'environnement, supposées idéales.

- La disponibilité opérationnelle :

Il s'agit de prendre en compte les conditions réelles d'exploitation et de maintenance. C'est la disponibilité du point de vue de l'utilisateur. Le calcul de Do fait appel aux mêmes paramètres TBF, TTR et sauf que ces 3 paramètres ne sont plus basés sur les conditions idéales de fonctionnement mais sur les conditions réelles (historiques d'exploitation : mesures de temps saisies à partir des états d'un équipement en exploitation).

$$D = \frac{MTBF}{MTBF + MTTR}$$

Résumé :

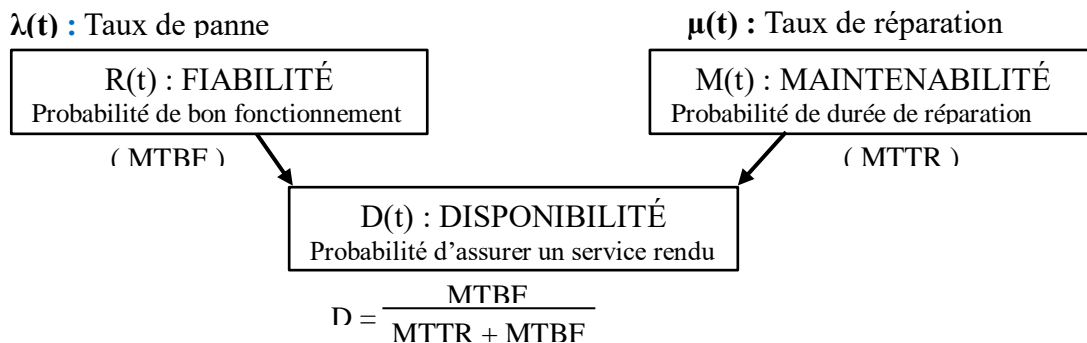
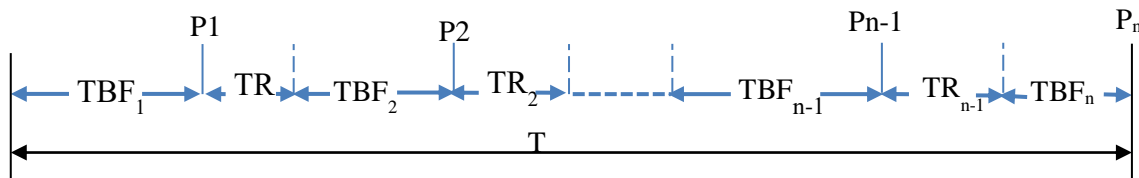


Figure 11 : Relations entre FMD.

4. Facteurs de fiabilité, maintenabilité et disponibilité.

Comme les installations représentent un ensemble technique complexe, il est difficile de donner une réponse globale, et c'est pourquoi on étudie la disponibilité par équipement et non pas par installation (ensemble d'équipement), puis après on peut déduire la disponibilité résultante en adoptant le principe des configurations série et parallèle.

Considérant un équipement donné par :



TBF_i : Temps de Bon Fonctionnement i,

P_i : Panne i,

TR_i : Temps de réparation i.

T : Période de fonctionnement suffisamment longue.

Dans ce cas la disponibilité est traduite par la somme des périodes de fonctionnement durant la période T. Soit :

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n TBF_i}{T} = \frac{\sum_{i=1}^n TBF_i}{\sum_{i=1}^n TBF_i + \sum_{i=1}^n TR_i}$$

Avec : $MTBF = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n TBF_i$ MTBF : Moyenne des Temps de Bon Fonctionnement.

$MTTR = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n TR_i$ MTTR : Moyenne des Temps de Travaux de Réparation

Par substitution on obtient : $D = \frac{MTBF}{MTBF + MTTR}$

a. Facteur de Fiabilité :

On utilise souvent le terme fiabilité pour caractériser l'aptitude d'un équipement à être exploité en fonction du temps sans subir de panne, cette notion reflète le MTBF appelé aussi facteur de fiabilité 'f'.

b. Facteur de Maintenabilité :

On utilise également le terme maintenabilité, c'est l'aptitude qu'offre un équipement à subir plus ou moins facilement les interventions et travaux de maintenance.

Comme le MTTR est le quotient de la durée totale des arrêts par le nombre d'arrêt.

$$MTTR = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n TR_i$$

Son inverse représente le nombre moyen d'arrêt par heure de production perdue, et mesure en quelque sorte la vitesse d'intervention de la maintenance. Plus le MTTR diminue plus cette vitesse est grande, plus grande aussi la maintenabilité de l'équipement.

$$\text{On pose } m = \frac{1}{MTTR} \quad (\text{Facteur de maintenabilité}).$$

c. Facteur de disponibilité opérationnelle :

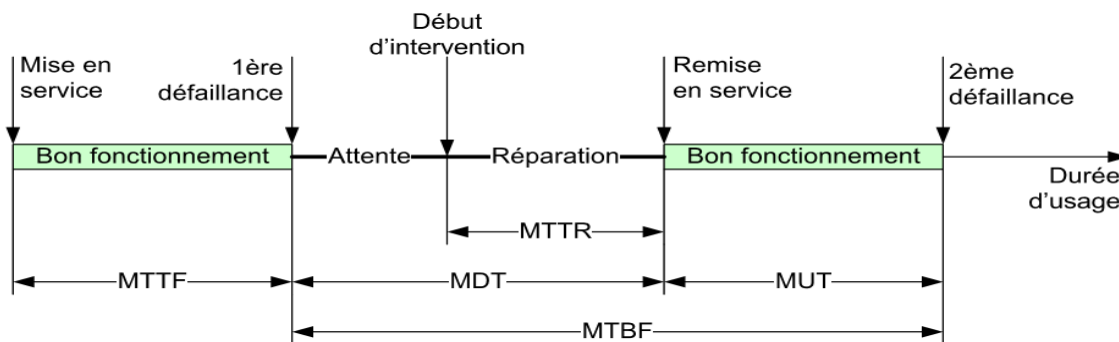
Comme la disponibilité est fonction de la fiabilité et la maintenabilité, ce qui donne :

$$d = \frac{MTBF}{MTTR} \quad (\text{Facteur de disponibilité})$$

d : désigne le nombre d'heures d'utilisation de l'équipement par heure d'arrêt attribuée à la maintenance.

$$D_{op} = \frac{MTBF}{MTBF+MTTR} \quad / \frac{MTTR}{MTTR} \quad \text{on obtient : } D_{op} = \frac{d}{1+d}$$

5. Temps caractéristiques de la sûreté de fonctionnement.



Les indicateurs opérationnels sont :

MTTF : (Mean Time To Failure) Durée moyenne de fonctionnement d'une entité avant la première défaillance

MTTR : (Mean Time To Repair) Durée moyenne de réparation

MUT: (Mean Up Time) Durée moyenne de fonctionnement après réparation

MDT : (Mean Down Time) Durée moyenne d'indisponibilité. Cette durée correspond aux phases suivantes : Détection de la panne, la réparation de la panne et la remise en service.

MTBF : (Mean Time Between Faillure) Durée moyenne entre deux défaillances consécutives d'une entité réparée.

Remarque :

La MTTF est utilisée dans les systèmes non réparables. Dans ce cas : $MTTF = MTBF$.

Dans les systèmes réparables, MTTF est un indicateur de qualité. Le premier TTF est à intégrer à la collecte des TBF (temps de bon fonctionnement).

6. Les méthodes d'analyse de sûreté de fonctionnement :

6.1. Notion de système :

- **Système industriel** : Un système industriel, réunit l'ensemble des moyens nécessaires pour créer la valeur ajoutée industrielle d'un produit ; il est caractérisé par rapport à cette valeur ajoutée, aux flux qui le parcourent ainsi qu'aux aspects temporels, économiques, environnementaux, ..., autant d'éléments sur lesquels est généralement attendu un niveau de performance.
- **Système réparable** : caractérisé par la possibilité de remplacer un ou plusieurs constituants défectueux, sans échange de ceux non défectueux (équipements industriels)
- **Système non réparable** : composant ou ensemble de pièces dont la défaillance entraîne le remplacement de toutes, donc de l'ensemble.

6.2. Diagramme Bloc Fiabilité.

La méthode Diagramme Bloc Fiabilité (Reliability block Diagram Method), appelé aussi chemins de succès utilisée dans de nombreux secteurs industriels pour l'analyse de la fiabilité pour les systèmes non réparables. Elle peut être utilisée dans certaines conditions pour les systèmes réparables.

Un diagramme de fiabilité décrit les liens logiques entre les composants au succès (fonctionnement) de la mission du système.

L'analyse par DBF a pour but de représenter le fonctionnement d'un système.

On présente le principe de cette modélisation par des systèmes en série, en parallèle et mixte.

6.2.1. Lois de configuration de la fiabilité

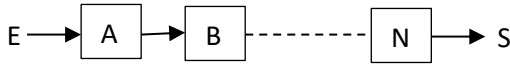
La fiabilité d'un système est conditionnée par la fiabilité de chacun de ses composants, mais aussi par la façon dont ils sont structurés.

Cette structure peut être modélisée par des Bloc Diagramme Fiabilité (BDF), appelés aussi diagrammes de succès.

- Le Bloc Diagramme Fiabilité est un **graphe** admettant une entrée et une sortie dont les sommets (appelés blocs) représentent les éléments du système et dont les arcs traduisent les relations entre les différents éléments.
 - Le système fonctionne s'il existe un **chemin de succès** entre l'entrée et la sortie du diagramme de fiabilité (reliability block diagram).
 - La liste des chemins de succès permet de représenter l'ensemble des **états de marche** du système.
- **Objectifs** : disposer d'une modélisation simple pour analyser et calculer la fiabilité d'un système.

- **Hypothèse :** Utilisée uniquement pour les systèmes non réparables, c'est-à-dire lorsque les défaillances des composants du système sont indépendantes (pas de défaillances en mode commun). Parfois utilisée pour certains systèmes réparables

a) Configuration Série :



- S fonctionne si A et B et N fonctionnent.
- S est défaillant si A ou B.....ou N sont défaillant

Composition en fiabilité :

- Cas général pour n composants montés en séries : $R_S = (R_A) \times (R_B) \times \dots \times (R_N)$.
- Si les composants sont identiques avec la même fiabilité R alors : $R_S = R^n$
- Si les taux de défaillances sont constants $\lambda_A, \lambda_B, \dots, \lambda_N$ alors la fiabilité :

$$R_S = (e^{-\lambda_A t}) \times (e^{-\lambda_B t}) \times \dots \times (e^{-\lambda_N t}).$$

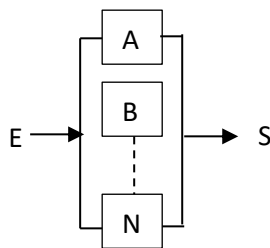
$$MTBF_S = \frac{1}{\lambda_A + \lambda_B + \dots + \lambda_N}$$

- Si les n composants sont identiques $\lambda_A = \lambda_B = \dots = \lambda_N$.

$$R_S = (e^{-n\lambda t}) \quad \text{et} \quad MTBF_S = \frac{1}{n\lambda}$$

b) Configuration en parallèle :

La fiabilité d'un système peut être augmentée en plaçant les composants en parallèle.



S est défaillant si A et B et N sont simultanément défaillants.

Ce qui va dans le sens de la sureté de fonctionnement. C'est une configuration plus rare puisqu'elle implique une redondance volontaire de 02 ou de n éléments.

Les redondances sont rares car elles sont couteuses en investissement. Exemple : Groupe électrogène de secours (alimentation électrique).

Composition en fiabilité :

- Cas général : n composants différents montés en parallèle :
 Pour un composant : $R_i + F_i = 1$,
 Avec : F_i : la probabilité de panne du composant i.
 R_i : la probabilité de succès (fiabilité) du composant i.

La fiabilité R_S de l'ensemble est : $R_S = 1 - (1-R_A) \times (1-R_B) \times \dots \times (1-R_N)$

- Cas de n composants identiques en parallèles $R_A = R_B = \dots = R_N$

$$R_S = 1 - (1 - R)^n$$

Cas particulier : deux dispositifs en parallèles et si λ est constant :

$$R_S = 1 - (1-R_A) \times (1-R_B) = R_A + R_B - R_A \times R_B = (e^{-\lambda_A t}) + (e^{-\lambda_B t}) - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t}$$

Remarque : La redondance parallèle fiabilise un système, sous réserve que les éléments de la redondance ne soient pas soumis à des défaillances de causes communes.

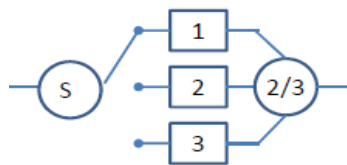
- c) **Composition mixte :** Ce sont deux compositions : 'Série Parallèle' et 'Parallèle Série'. Dans ces cas on applique les mêmes règles (série et parallèle) pour chaque groupe de composants que ça soit en série ou bien en parallèle.

Remarque : Certains systèmes complexes ne peuvent pas se ramener aux modèles série-parallèles, dans ce cas il faut faire appel aux techniques bayésiennes.

6.2.2. Formes de redondances.

On dit qu'il y a redondance lorsqu'une fonction peut être assurée par deux ou plusieurs moyens.

- Redondance active : tous les éléments fonctionnent simultanément (en même temps) ;
- Redondance passive majoritaire : Certains éléments sont au repos, et qu'ils sont sollicités en cas de défaillances.
- Redondance passive k/n : La fonction est assurée si au moins k sur les n éléments sont en état de fonctionner.



TP : Diagrammes de fiabilité.

Vous allez utiliser le logiciel GRIF avec son module « Reliability block diagramme », en commençant par le dessin d'un unique composant puis après avec plusieurs composants et différentes configurations, suivi du paramétrage en utilisant plusieurs distributions (Constant, exponentiel, weibull).

Documents annexés :

- Le 'Tutorial' du logiciel GRIF : Module « Diagramme Bloc Fiabilité » en langue française ;
- Fiche de préparation du TP ;
- Travail à faire du TP.

6.3. Arbre de défaillances (AdD).

- Appelé aussi ‘arbre de pannes’, ou ‘fault tree’ en anglais.
- Est une des méthodes utilisée dans les études de sûreté de fonctionnement.
- Est une représentation graphique arborescentes logiques, qui décrit les mécanismes qui conduisent à des évènements indésirables (panne, accident, ...etc).

Remarque : Les arbres de défaillances, permettent de bonnes descriptions **statiques** de système mais ne prennent pas en compte les reconfigurations, comme les réparations.

6.3.1. Objectifs :

- Qualitatif : Déterminer les combinaisons possibles d'évènements qui entraînent la réalisation d'un évènement "indésirable" unique.
- Quantitatif : Evaluer la probabilité de la survenue de l'évènement indésirable, si on connaît les probabilités des évènements de base.

6.3.2. Construction d'un AdD.

La construction d'un AdD est basée sur une procédure « déductive », c'est-à-dire étude à priori d'un système.

L'AdD débute par un point de départ appelé ‘évènement redouté’ ou ‘évènement indésirable’ ou aussi ‘évènement sommet’ (dysfonctionnement, panne, accident..etc).

Pour construire un AdD revient à répondre à la question : Comment tel évènement peut-il arrivé ?

Quels sont les scénarios (combinaisons) possibles qui peuvent aboutir à cet évènement ?

Après avoir identifié l'évènement indésirable (sommet de l'arbre), on identifie les évènements intermédiaires jusqu'à arriver aux évènements de base.






6.3.3. Caractéristiques d'un AdD.

L'AdD est représenté de haut en bas (arborescence). La ligne la plus haute (sommet de l'arbre) comporte l'évènement indésirable. La ligne inférieure comporte les évènements de base.

Chaque ligne détaille la ligne supérieure jusqu'à arriver à la ligne inférieure qui comporte les évènements de base.

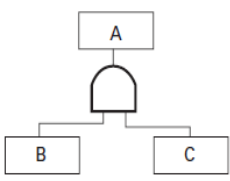
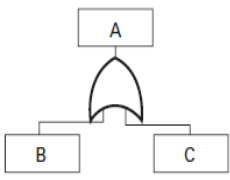
Ces relations sont représentées par des liens logiques appelés aussi « portes logiques ».

4.3.4. Représentation des principaux évènements

Evènement sommet ou des évènements intermédiaires (résultants de la combinaison d'autres évènements par l'intermédiaire d'une porte logique)	
Evènement de base : l'évènement est suffisamment bien connu qu'il est inutile d'en rechercher les causes, sa probabilité est connue.	
Evènement qui ne peut être considéré comme élémentaire mais dont les causes ne sont et ne seront pas développées.	
Renvoi vers un sous arbre	
Sommet d'un sous arbre	

4.3.5. Représentation des principales portes logiques :

Les portes logiques lient les évènements suivant des liens de causalité

<p>Porte "ET". L'évènement de sortie est généré si tous les évènements d'entrée sont présents simultanément.</p>	
<p>Porte "OU". L'évènement de sortie est généré si au moins un des évènements d'entrée est présent (aussi appelée OU "inclusif").</p>	

4.3.6. Notions de coupe et coupe minimale :

- **Coupe** : C'est l'ensemble des combinaisons pouvant conduire à l'évènement redouté. Ensemble des défaillances entraînant l'évènement redouté.
- **Coupe minimale** : Plus petites combinaisons d'évènements entraînant l'évènement redouté. Une coupe minimale donne un arbre réduit.

4.3.7. Analyse quantitative : L'analyse quantitative donne plusieurs informations :

- La probabilité d'occurrence de l'évènement redouté.
- La probabilité d'occurrence associée à chaque coupe minimale donc à chaque scénario d'accident possible.

Remarque 1 : On effectue une analyse quantitative uniquement sur des coupes minimales, donc sur un arbre réduit.

Remarque 2 : Les probabilités des évènements de base sont données par les banques de données (Voir partie 2, paragraphe 6).

Remarque : Comme la méthode « Diagramme de Fiabilité », l'arbre de défaillance et aussi une méthode statique et est utilisée pour des systèmes dont les éléments sont indépendants.

Travail pratique 'Arbre de défaillance':

Vous allez utiliser le logiciel GRIF avec son module « Arbre de défaillance », en commençant par la création de l'arbre par la saisie des portes, des événements, des liens et des commentaires, ensuite le paramétrage des éléments (portes et événement) en utilisant différentes distributions, le lancement des calculs.

Documents annexés :

- Le 'Tutorial' du logiciel 'GRIF' : Module « Arbre de défaillance » en langue française ;
- Fiche de préparation du TP ;
- Travail à faire du TP.

6.4. Fiabilité des systèmes réparables.

Un système réparable est un système qui se dégrade et qui se répare pour revenir dans des états plus favorables. Ces systèmes sont courants dans l'industrie, le transport, la production d'énergie ...etc. on évalue souvent la disponibilité et la fiabilité de tels systèmes. Pour cela on s'appuie souvent sur la description des différents états du système représentant les dégradations possibles jusqu'à la défaillance complète. Le passage d'un état à un autre se fait par des transitions. Ses transitions sont considérées comme instantanées dans la modélisation markovienne. La description des états d'un système est fondamentale pour l'étude du processus stochastique, deux approches sont utilisées :

- Une modélisation par chaînes (graphes) de Markov homogènes à états discrets et temps continu (transition instantanée) ;
- Une modélisation par réseaux de pétri stochastiques (transitions non instantanées).

Remarque : Dans ce cours nous nous étudierons les processus markoviens.

4.4.1 Chaînes de Markov (Modèles à états de transitions)

Pour des systèmes dynamiques et dont les éléments présentent une dépendance, on utilisera la Méthode de l'espace des états (MEE).

La Méthode de l'Espace d'Etat (MEE) a été développée pour l'analyse de sûreté de fonctionnement de système réparable. Les arbres de défaillances, permettent de bonnes descriptions statiques de système mais ne prennent pas en compte les reconfigurations, comme les réparations.

Les graphes de Markov permettent de déterminer la disponibilité, la fiabilité et la disponibilité d'un système.

Pour calculer la disponibilité d'un système par les graphes de Markov on utilise l'état de chaque composant du système. Puis on associe au fonctionnement un graphe décrivant le passage d'un état à un autre. L'évaluation probabiliste est obtenue à partir de ce graphe de Markov.

Pour décrire les divers états d'un système on utilise l'état de ces composants.

Il est nécessaire d'identifier tous les états d'un système. Ils comprennent :

- Les états de fonctionnement normal.
- Les états de fonctionnement dégradés.
- Les états de défaillances complètes.

Pour les systèmes complexes, cette tâche devient difficile, l'utilisation d'un logiciel de génération des états de transitions est utile.

La description des états permet d'établir : La matrice de transition 'M', réduite par la suite à un système d'équations différentiels qui sont la base de calculs de la fiabilité et la disponibilité des systèmes réparables.

➤ Application à la S.D.F

Tous les systèmes dont l'état de fonctionnement futur ne dépend que de l'état présent peuvent être décrits par un processus de Markov et en particulier, ceux pour les lesquels les probabilités de transition entre 2 états quelconques ne sont pas affectés par le temps. Il est alors homogène. C'est le cas de tous les phénomènes à distribution exponentielle (taux de défaillance λ et taux de réparation μ sont constants).

On étudie le cas pour le Calcul de la disponibilité :

Soit une disponibilité théorique (prévisionnelle) fixée à l'avance. La méthode Markovienne permet de déterminer la politique de maintenance à appliquer pour s'approcher à cette valeur théorique $D(t)$.

- **Disponibilité moyenne :** $D = \frac{\sum TBF}{\sum TBF + \sum TA}$

- **Disponibilité opérationnelle :** $D_0 = \frac{MTBF}{MTBF + MTTR} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$

- **Disponibilité instantanée :** Pour un système avec l'hypothèse d'un taux de défaillance λ et taux de réparation μ constants on montre que la disponibilité instantanée à pour expression :

$$D(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}$$

- **Disponibilité asymptotique :**

Lorsque λ et μ sont indépendants du temps (constantes), on constate que la disponibilité tend vers une valeur constante. Cette valeur est appelée « disponibilité asymptotique » et se note : A_∞ .

Lorsque t tend vers ∞ , la limite D de la fonction $D(t)$ est égal à : $D = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$

Comme λ et μ constantes ce qui correspond à la loi exponentielle (phase de maturité) :

$$MTBF = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad MTTR = \frac{1}{\mu}$$

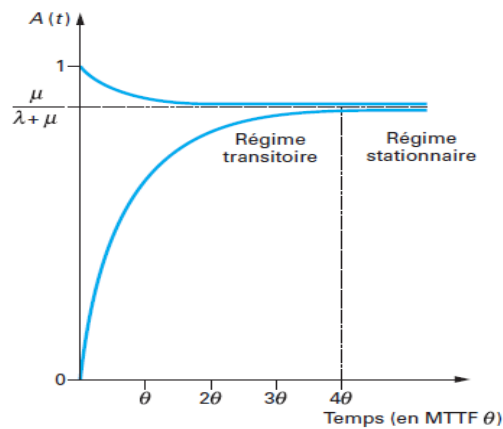


Figure 12 : La disponibilité stationnaire et instantanée

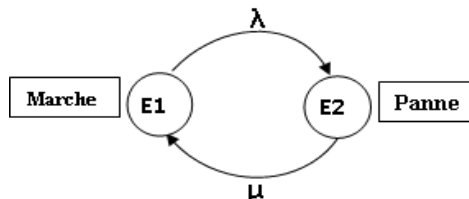
Exemple 1 : Cas pour une seule machine

Soit une machine M1 extraite d'un système S.

à M1 est associée une variable booléenne qui a 02 états :

- Etat 1 : M1 fonctionne.
- Etat 2 : M1 en panne.

➤ **Graphe de Markov :**



➤ **Matrice associée au graphe :** 'Matrice de transition'

↗	1	2
1	de 1 vers 1	de 1 vers 2
2	de 2 vers 1	de 2 vers 2

Tableau des matrices :

$$\begin{matrix}
 & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\
 \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \alpha & \lambda \\ \mu & \beta \end{bmatrix}
 \end{matrix}$$

Remarque : il faut que la que somme algébrique des composantes de chaque ligne soit nulle.

On aura : $\alpha + \lambda = 0$ ce qui donne : $\alpha = -\lambda$

$\mu + \beta = 0$ $\beta = -\mu$

On obtient la matrice définitive : $M = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$

➤ **Equations différentielles** : Calcul de la disponibilité asymptotique (A_∞).

Si P est la matrice « ligne » des probabilités d'apparition des états du système, les éléments de cette matrice sont déterminés à partir de la matrice M par l'équation différentielle :

$\frac{dP}{dt} = P * M$ Pour 02 états :

$$\begin{pmatrix} \frac{dP_1}{dt} \\ \frac{dP_2}{dt} \end{pmatrix} = [P_1, P_2] \cdot \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dP_1}{dt} = -\lambda P_1 + \mu P_2 \\ \frac{dP_2}{dt} = \lambda P_1 - \mu P_2 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{dP_1}{dt} = \frac{dP_2}{dt}$$

P_1 et P_2 sont des constantes, donc $\frac{dP_1}{dt} = \frac{dP_2}{dt} = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP_1}{dt} = -\lambda \cdot P_1 + \mu \cdot P_2 = 0 \quad (1) \\ \frac{dP_2}{dt} = \lambda \cdot P_1 - \mu \cdot P_2 = 0 \quad (2) \end{array} \right.$$

$-\lambda \cdot P_1 + \mu \cdot P_2 = 0$ On résolvant ce système d'équation on obtient : $P_2 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$

$$P_1 + P_2 = 0$$

Par définition, l'indisponibilité $I = P_2$ donc la disponibilité $D = A_\infty = 1 - P_2 = \frac{\mu}{\mu + \lambda}$

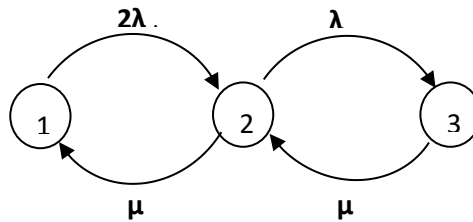
Remarque : Pour n états : $I = P_n$ ce qui donne $D = 1 - I = 1 - P_n = A_\infty$

Exemple 2 : Cas pour 02 machines identiques en parallèles en redondance active.

- Lorsque les deux machines sont en état de marche, ils fonctionnent tous les deux, chacun à moitié de sa charge.
- Les pannes sont immédiatement décelées.
- Nous considérons une politique « mono-réparateur ».

➤ **Graphe de Markov** :

- **Etat 1** : Les machines C_1 et C_2 fonctionnent, mais la probabilité pour qu'elles tombent en panne est 2λ .
- **Etat 2** : Une seule des deux machines fonctionne, l'autre est en panne. La cadence est diminuée de moitié.
- **Etat 3** : Les deux machines sont en panne.



➤ **Matrice de transition :**

$$M = \begin{vmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 \\ \mu & -(\mu + \lambda) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{vmatrix}$$

$$\frac{dP}{dt} = P.M \quad \text{pour les 3 états :} \quad \begin{pmatrix} \frac{dP1}{dt} \\ \frac{dP2}{dt} \\ \frac{dP3}{dt} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 \\ \mu & -(\mu + \lambda) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{vmatrix} * [P1, P2, P3]$$

Ce qui donne le système d'équations différentielles suivants :

$$\begin{cases} \frac{dP1}{dt} = -2\lambda.P1 + \mu.P2 + 0.P3 = 0 \\ \frac{dP2}{dt} = 2\lambda.P1 + -(\mu + \lambda).P2 + \mu.P3 = 0 \\ \frac{dP3}{dt} = 0P1 + \mu.P2 - \mu.P3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{On obtient } I = P3 = \frac{2\lambda}{2\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2} \quad \text{Donc } A_\infty = 1 - I = 1 - P3 = \frac{2\lambda\mu + \mu^2}{2\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2}$$

Travail pratique :

Vous allez utiliser le logiciel GRIF avec son module « Graphe de Markov », en commençant par la saisie des états, des transitions et les commentaires, ceci pour la Création d'un graphe de Markov, le paramétrage des éléments en utilisant plusieurs distributions, le lancement des calculs et enfin édition et affichage des courbes et interprétation.

Documents annexés :

- Le 'Tutorial' du logiciel 'GRIF' : Module « Graphe de Markov » en langue française ;
- Fiche de préparation du TP ;
- Travail à faire du TP.