Chapitre 4

Vibrations des systèmes à deux degrés de liberté.

4.1 Introduction

Tout système nécessite deux coordonnées indépendantes pour l'étudier, s'appelle système à deux degré de liberté. Ce type de système a deux battements naturels w_{n1}, w_{n2}. Lorsque le système vibre avec l'un de ses battements naturels, on dit que le système vibre avec l'un de ses propres modes. Autrement dit, le système a deux propre modes de vibrations.

4.2Vibrations libres des systèmes non amortis à deux degrés de liberté.

On prend comme exemple le système de deux pendules identiques, de même longueur et de même masse. Les deux pendules sont reliés avec un ressort de raideur k à une distance a de l'extrémité fixe (fig 4.1).

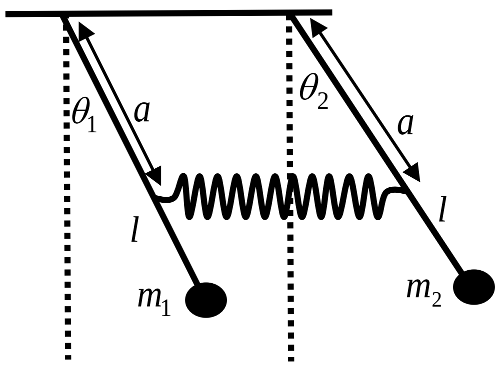


Figure 4.1 : Système à deux degrés de liberté, pendule couplé

4.2.1 Equations du mouvement

On utilise la méthode de Lagrange, pour un système libre non amorti.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \tag{4.1}$$

- $L = T - U$
- $q_i \equiv \begin{cases}\theta_1\\ \theta_2\end{cases}$, les deux coordonnées indépendantes du système.

   - L'énergie cinétique du système est la somme de l'énergie cinétique des deux masses m_1 et m_2

$$T=\frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\theta}_2^2 \tag{4.2}$$

Pour simplifier l'étude on met $\begin{cases}m_1=m_2=m\\ l_1=l_2=l\end{cases}$, l'énergie cinétique est écrite comme ;

$$T=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2 \tag{4.3}$$

- L'énergie potentielle du système est la somme des énergies potentielle des deux masses m_1 et m_2 et l'énergie potentielle du ressort.

$$U=\frac{1}{2}ka^2(\sin\theta_1-\sin\theta_2)^2+mgl(1-\cos\theta_1)+mgl(1-\cos\theta_2)$$

θ *petit* $\Rightarrow \begin{cases}\sin\theta\approx\theta\\ \cos\theta\approx 1-\dfrac{\theta^2}{2}\end{cases}$, Donc,

$$U=\frac{1}{2}ka^2(\theta_1-\theta_2)^2+mgl\frac{\theta_1^2}{2}+mgl\frac{\theta_2^2}{2} \tag{4.4}$$

Le Lagrangien du système est donné par :

$$L=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2-\frac{1}{2}ka^2(\theta_1-\theta_2)^2-mgl\frac{\theta_1^2}{2}-mgl\frac{\theta_2^2}{2} \tag{4.5}$$

L'équation de Lagrange (4. 1) donne,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

Par dérivation et remplacement, on trouve,

$$\begin{cases} ml^2\ddot{\theta}_1 + (mgl + ka^2)\theta_1 - ka^2\theta_2 = 0 \\ ml^2\ddot{\theta}_2 + (mgl + ka^2)\theta_2 - ka^2\theta_1 = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

4.2.2 Solution de l'équation et battements propres.

Le mouvement général d'un système à deux degrés de liberté est la superposition de deux mouvements harmoniques simples.

Donc, on cherche la solution où les deux pendules oscillent avec des oscillations harmoniques de même phase, mais avec des amplitudes différentes. La solution est de la forme,

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \Theta_1 \cos(w.t + \varphi) \\ \theta_2(t) = \Theta_2 \cos(w.t + \varphi) \end{cases} \tag{4.7}$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1(t) = -\Theta_1 w^2 \cos(w.t + \varphi) \\ \ddot{\theta}_2(t) = -\Theta_2 w^2 \cos(w.t + \varphi) \end{cases} \tag{4.8}$$

Par remplacement dans l'équation (4.6),

$$\begin{cases} \left(-ml^2\Theta_1 w^2 + (mgl + ka^2)\Theta_1 - ka^2\Theta_2\right)\cos(w.t + \varphi) = 0 \\ \left(-ml^2\Theta_2 w^2 + (mgl + ka^2)\Theta_2 - ka^2\Theta_1\right)\cos(w.t + \varphi) = 0 \end{cases} \tag{4.9}$$

$$\begin{cases} \left(-ml^2\Theta_1 w^2 + (mgl + ka^2)\Theta_1 - ka^2\Theta_2\right) = 0 \\ \left(-ml^2\Theta_2 w^2 + (mgl + ka^2)\Theta_2 - ka^2\Theta_1\right) = 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

$$\begin{bmatrix} (-ml^2w^2 + mgl + ka^2) & -ka^2 \\ -ka^2 & (-ml^2w^2 + mgl + ka^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

La matrice des amplitudes ne doit pas s'annuler (car il y'a du mouvement), donc, la première matrice qui doit s'annuler.

$$\begin{bmatrix} (-ml^2w^2+mgl+ka^2) & -ka^2 \\ -ka^2 & (-ml^2w^2+mgl+ka^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (4.12)$$

Donc, le déterminant est nul,

$$(-ml^2w^2+mgl+ka^2)^2 - k^2a^4 = 0 \qquad (4.13)$$

$$m^2l^4w^4 - (2m^2l^3g + 2l^2mka^2)w^2 + m^2l^2g^2 + 2mglka^2 - k^2a^4 + k^2a^4 = 0 \qquad (4.14)$$

$$w^4 - \left(2\frac{g}{l} + 2\frac{ka^2}{ml^2}\right)w^2 + \left(\frac{g^2}{l^2} + 2\frac{gka^2}{ml^3}\right) = 0$$

Posant

$$\begin{cases} x = w^2 \\ a = 1, \qquad b = \left(2\dfrac{g}{l} + 2\dfrac{ka^2}{ml^2}\right), \qquad c = \left(\dfrac{g^2}{l^2} + 2\dfrac{gka^2}{ml^3}\right) \end{cases}$$

On peut écrire,

$$\begin{cases} w_1^2 = -\dfrac{b}{2} - \left[\left(\dfrac{b}{2}\right) - c\right]^{\frac{1}{2}} \\ w_2^2 = -\dfrac{b}{2} + \left[\left(\dfrac{b}{2}\right) - c\right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \qquad (4.15)$$

- **Battement propres**

Par remplacement et simplification on trouve,

$$w_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad w_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{ka^2}{ml^2}} \qquad (4.16)$$

Comme nous avons dit auparavant, si le système oscille avec l’une de ses battements naturels, on dit que le système oscille avec l’un de ses propres modes. Dans chaque propre mode, les pendules oscillent avec une oscillation harmonique simple.

On peut écrire pour chaque pendule deux solutions particulière correspondants aux deux battements naturels.

- Pour le premier pendule : $\begin{cases} \theta_1'(t) = \Theta_{11}\cos(w_1.t+\varphi_1) \\ \theta_1''(t) = \Theta_{12}\cos(w_2.t+\varphi_2) \end{cases}$.
- Pour le deuxième pendule : $\begin{cases} \theta_2'(t) = \Theta_{21}\cos(w_1.t+\varphi_1) \\ \theta_2''(t) = \Theta_{22}\cos(w_2.t+\varphi_2) \end{cases}$.

Nous avons dit plus haut, que le mouvement du système est la superposition des deux mouvements harmoniques, donc la solution des équations du mouvement est donnée par (4.17) :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \Theta_{11}\cos(w_1.t+\varphi_1) + \Theta_{12}\cos(w_2.t+\varphi_2) \\ \theta_2(t) = \Theta_{21}\cos(w_1.t+\varphi_1) + \Theta_{22}\cos(w_2.t+\varphi_2) \end{cases} \tag{4.17}$$

Pour trouver la relation entre $\Theta_{11}, \Theta_{12}, \Theta_{21}$ *et* Θ_{22} on suppose que le système oscille avec l'un de ses propre mode w_1, puis w_2.

- **1**

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \Theta_{11}\cos(w_1.t+\varphi_1) \\ \theta_2(t) = \Theta_{21}\cos(w_1.t+\varphi_1) \end{cases}$$

Tant que la solution particulière vérifie l'équation (4.14). Par dérivation et remplacement, on trouve,

$$(-ml^2\frac{g}{l} + mgl + ka^2)\Theta_{11} - ka^2\Theta_{22} = 0$$

$$ka^2(\Theta_{11} - \Theta_{22}) = 0$$

$$\Theta_{11} = \Theta_{22} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Theta_{11}}{\Theta_{22}} = 1 \tag{4.18}$$

- **2ème cas** $w = w_2 \Rightarrow \quad \Theta_{11} = \Theta_{21} = 0$.

$$\begin{cases}\theta_1(t) = \Theta_{12}\cos(w_2.t + \varphi_2)\\ \theta_2(t) = \Theta_{22}\cos(w_2.t + \varphi_2)\end{cases}$$

Tant que la solution est particulière vérifie l'équation (4.14),par dérivation et remplacement, on trouve,

$$(-ml^2\frac{g}{l^2} + \frac{2ml^2ka^2}{ml^2} + mgl + ka^2)\Theta_{12} - ka^2\Theta_{22} = 0$$

$$-ka^2(\Theta_{12} + \Theta_{22}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Theta_{11} = -\Theta_{22}$$

$$\frac{\Theta_{11}}{\Theta_{22}} = -1 \tag{4.19}$$

A la fin, puisque la solution générale est la somme des deux solutions particulières, on écrit la ***solution générale***.

$$\begin{cases}\theta_1(t) = \Theta_{11}\cos(w_1.t + \varphi_1) + \Theta_{12}\cos(w_2.t + \varphi_2)\\ \theta_2(t) = \Theta_{11}\cos(w_1.t + \varphi_1) - \Theta_{12}\cos(w_2.t + \varphi_2)\end{cases} \tag{4.20}$$

Les quatre inconnus Θ_{11}, Θ_{12}, φ_1 *et* φ_2 peuvent être trouvés à partir des conditions initiales.

$$t = 0\begin{cases}\theta_1 = \theta_{10}\\ \theta_2 = \theta_{20}\end{cases} \quad et \quad \begin{cases}\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_{10}\\ \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_{20}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Theta_{11}\cos\varphi_1 + \Theta_{12}\cos\varphi_2 = \theta_{10}\\ \Theta_{11}\cos\varphi_1 - \Theta_{12}\cos\varphi_2 = \theta_{20}\end{cases} \tag{4.21}$$

$$\begin{cases}-\Theta_{11}w_1\sin\varphi_1 - \Theta_{12}w_2\sin\varphi_2 = \dot{\theta}_{10}\\ -\Theta_{11}w_1\sin\varphi_1 + \Theta_{12}w_2\sin\varphi_2 = \dot{\theta}_{20}\end{cases} \tag{4.22}$$

$$\begin{cases}\Theta_{11}\cos\varphi_1 = \dfrac{\theta_{10} + \theta_{20}}{2}\\ \Theta_{12}\cos\varphi_2 = \dfrac{\theta_{10} - \theta_{20}}{2}\end{cases} \tag{4.23}$$

$$\begin{cases} \Theta_{11}\sin\varphi_1 = -\dfrac{\dot{\theta}_{10}+\dot{\theta}_{20}}{2w_1} \\ \Theta_{12}\sin\varphi_2 = \dfrac{\dot{\theta}_{20}-\dot{\theta}_{10}}{2w_2} \end{cases} \tag{4.24}$$

En fin on peut écrire les quatre inconnues,

$$\Theta_{11} = \left[\left(\frac{\theta_{10}+\theta_{20}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\theta}_{10}+\dot{\theta}_{20}}{2w_1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \Theta_{12} = \left[\left(\frac{\theta_{10}-\theta_{20}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\theta}_{20}-\dot{\theta}_{10}}{2w_2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\varphi_1 = \tan^{-1}\left(-\frac{\dot{\theta}_{10}+\dot{\theta}_{20}}{w_1(\theta_{10}+\theta_{20})}\right), \quad \varphi_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{\theta}_{10}-\dot{\theta}_{20}}{w_2(\theta_{20}-\theta_{10})}\right).$$

4.2.3 Cas particuliers

Pour simplifier l'étude on considère que les vitesses initiales sont nulles

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$$

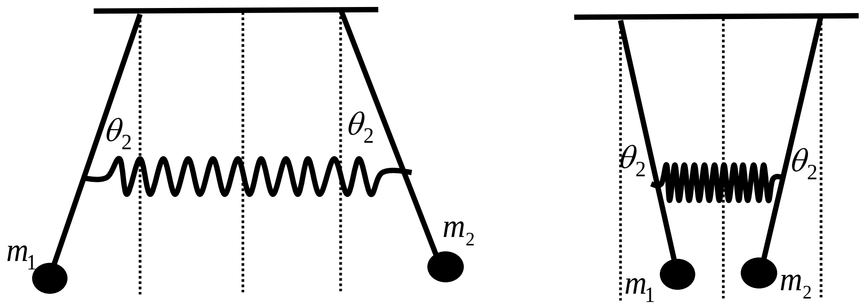
De l'équation (4.24), on trouve que,

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

- **1ère cas**

$$\theta_{10} = \theta_{20} = \theta_0 \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \theta_0\cos(w_1.t) \\ \theta_2 = \theta_0\cos(w_1.t) \end{cases} \tag{4.25}$$

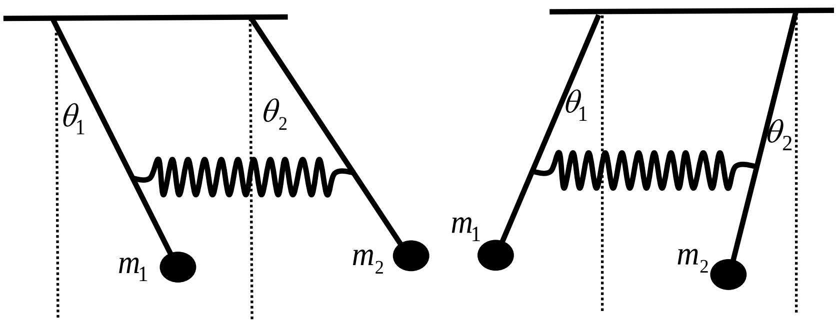
Les deux masses oscillent avec le premier battement naturel dans le même sens. Dans ce cas la longueur du ressort reste constante.



- **2^ème cas**

$$\theta_{10} = -\theta_{20} = \theta_0 \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \theta_0 \cos(w_2.t) \\ \theta_2 = -\theta_0 \cos(w_2.t) \end{cases} \tag{4.26}$$

Les deux masses oscillent avec le deuxième battement naturel dans un sens opposé. Dans ce cas le milieu du ressort reste émouvant.



- **3^ème cas**

$$\theta_{10} = \theta_0, \quad \theta_{20} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \dfrac{\theta_0}{2}\cos(w_1.t) + \dfrac{\theta_0}{2}\cos(w_2.t) \\ \theta_2 = \dfrac{\theta_0}{2}\cos(w_1.t) - \dfrac{\theta_0}{2}\cos(w_2.t) \end{cases} \tag{4.27}$$

Au départ, la première masse a une énergie initiale non nulle contrairement à la deuxième masse. Au cours du temps, l'énergie se passe de la première masse à la deuxième jusque l'énergie de première masse s'annule (toute l'énergie dans la deuxième masse), ensuite l'énergie passe de la deuxième masse à la première jusque s'annule et vice-versa.

4.3Vibrations forcées des systèmes non amortis à deux degrés de liberté.

On s'intéresse à l'étude d'un système soumis à une force d'excitation extérieure harmonique simple. L'excitation harmonique peut être écrite sous la forme $f(t) = f_0 e^{iwt}$

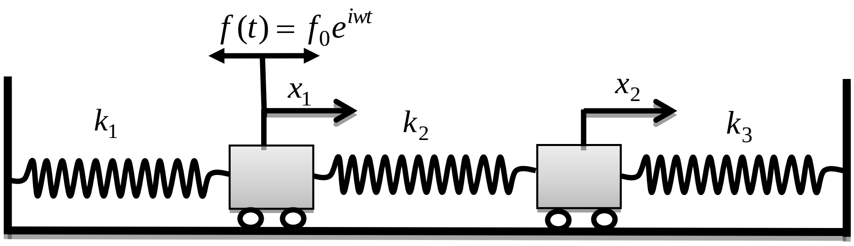


Figure 4.2 : Système forcé à deux degrés de libertés, deux masses trois ressorts

4.2.1Réponse du système

Par l'application de la théorie de Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = f_q(t) \tag{4.28}$$

- $L = T - U$
- $q_i \equiv \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$, les deux coordonnées indépendantes du système.

➢ L'énergie cinétique du système est la somme de l'énergie cinétique des deux masses m_1 et m_2

$$T = \frac{1}{2} m_1 x_1^2 + \frac{1}{2} m_2 x_2^2 \tag{4.29}$$

➢ L'énergie potentielle du système est la somme des énergies potentielle des trois ressorts.

$$U = \frac{1}{2} k_1 x_1{}^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 \tag{4.30}$$

Le Lagrangien du système est donné par :

$$L = \frac{1}{2}m_1 x_1^2 + \frac{1}{2}m_2 x_2^2 - \left(\frac{1}{2}k_1 x_1{}^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_2 x_2^2\right) \tag{4.31}$$

L'équation de Lagrange (4. 1) donne,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = f_{10}e^{iwt} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = f_{20}e^{iwt} \end{cases} \tag{4.32}$$

Par dérivation et remplacement on trouve,

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = f_{10}e^{iwt} \\ m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2 x_1 = f_{20}e^{iwt} \end{cases} \tag{4.33}$$

Pour simplifier l'étude, on suppose $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, la solution sera sous la forme,

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 e^{iwt} \\ x_2(t) = A_2 e^{iwt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1(t) = -w^2 A_1 e^{iwt} \\ \ddot{x}_2(t) = -w^2 A_2 e^{iwt} \end{cases}$$

Par remplacement, on trouve,

$$\begin{cases} (-m_1 w^2 + k_1 + k_2)A_1 - k_2 A_2 = f_{10} \\ -k_2 A_1 + (-m_2 w^2 + k_2 + k_3)A_2 = f_{20} \end{cases} \tag{4.34}$$

Les équations précédentes peuvent écrite sous une forme matricielle,

$$\begin{bmatrix} (-m_1 w^2 + k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (-m_2 w^2 + k_2 + k_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{10} \\ f_{20} \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

Rappel :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \text{ avec } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}_{\text{Déterminant}}}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Donc,

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (-m_1w^2+k_1+k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (-m_2w^2+k_2+k_3) \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} f_{10} \\ f_{20} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}=\frac{1}{(-m_1w^2+(k_1+k_2)(-m_2w^2+(k_2+k_3))-k_2^2}\begin{bmatrix} (-m_2w^2+k_2+k_3) & k_2 \\ k_2 & (-m_1w^2+k_1+k_2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{10} \\ f_{20} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} A_1=\dfrac{(-m_2w^2+k_2+k_3)\,f_{10}+k_2\,f_{20}}{(-m_1w^2+(k_1+k_2))(-m_2w^2+(k_2+k_3))-k_2^2} \\ A_2=\dfrac{k_2\,f_{10}+(-m_1w^2+k_1+k_2)\,f_{20}}{(-m_1w^2+(k_1+k_2))(-m_2w^2+(k_2+k_3))-k_2^2} \end{cases} \quad (4.36)$$

Remarque :

Si les masses oscillent librement (les forces sont nulles), donc le déterminant sera nulle.

$$\begin{bmatrix} (-m_1w^2+k_1+k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (-m_2w^2+k_2+k_3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(-m_1w^2+(k_1+k_2))(-m_2w^2+(k_2+k_3))-k_2^2=0$$

On trouve deux battements propres :

$$w_{1,2}^2 = \frac{m_1(k_1+k_2)+m_2(k_2+k_3)}{2m_1m_2} \mp \left[\left(\frac{m_1(k_1+k_2)+m_2(k_2+k_3)}{2m_1m_2}\right)^2 - \frac{(k_1+k_2)(k_2+k_3)-k_2^2}{m_1m_2}\right]^{1/2}$$

Dans la plus part des cas, la force d'excitation est toujours appliquée sur une seule masse.

Par exemple, $f_{10} = f_0, \quad f_{20} = 0$.

On peut récrire les amplitudes (la réponse des deux masses à la force d'excitation) A_1 *et* A_2,

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{(-m_2w^2+k_2+k_3)}{(-m_1w^2+(k_1+k_2))(-m_2w^2+(k_2+k_3))-k_2^2}\, f_0 \\ A_2 = \dfrac{k_2}{(-m_1w^2+(k_1+k_2))(-m_2w^2+(k_2+k_3))-k_2^2}\, f_0 \end{cases} \tag{4.37}$$

4.2.2 Facteurs d'amplifications

Dans le cas où $k_1 = k_2 = k_3 = k, \quad m_1 = m_2 = m$

$$w_1^2 = \frac{k}{m}, \qquad w_2^2 = 3\frac{k}{m}$$

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{(-mw^2+2k)}{(-mw^2+2k)(-mw^2+2k)-k^2}\, f_0 \\ A_2 = \dfrac{k}{(-m_1w^2+2k)(-mw^2+2k)-k^2}\, f_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(-mw^2+2k)}{(-mw^2+k)(-mw^2+3k)}\, f_0 \\ A_2 &= \frac{k}{(-m_1w^2+k)(-mw^2+3k)}\, f_0 \end{aligned} \tag{4.38}$$

On multiplie le dénominateur et le numérateur par $\frac{k}{m^2}$ on trouve,

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{(2-(\frac{w}{w_1})^2)}{k((\frac{w_2}{w_1})^2-(\frac{w}{w_1})^2)(1-(\frac{w}{w_1})^2)}\delta st \\ A_2 = \dfrac{1}{k((\frac{w_2}{w_1})^2-(\frac{w}{w_1})^2)(1-(\frac{w}{w_1})^2)}\delta st \end{cases} \quad (4.39)$$

$$\begin{cases} \dfrac{A_1}{\delta st} = \dfrac{(2-(\frac{w}{w_1})^2)}{k((\frac{w_2}{w_1})^2-(\frac{w}{w_1})^2)(1-(\frac{w}{w_1})^2)} \\ \dfrac{A_2}{\delta st} = \dfrac{1}{k((\frac{w_2}{w_1})^2-(\frac{w}{w_1})^2)(1-(\frac{w}{w_1})^2)} \end{cases} \quad (4.39)$$

Les réponses des masses M_1 et M_2 en fonction du w/w_1 sont représentées sur la figure 4.3 a et b respectivement. La force d'excitation est appliquée sur la masse M_1.

- On peut directement remarquer que la réponse des deux masse tends vers l'infinie pour w_1 et w_2, le système a deux battements naturels ça veut dire qu'il y a deux points de résonances. La masse M_1 raisonne en w_1 et en w_2 ainsi que la masse M_2 raisonne en w_1 et en w_2.

- $w<w_1$: si le battement de la force d'excitation est inférieur au premier battement naturel, la réponse des deux masses est positive (la réponse et l'excitation sont en phase)

- $w_1<w<w_2$: pour les valeurs du battement de la force d'excitation supérieurs à w_1 la réponse de la masse M_1 est négative (excitation et réponse sont déphasage) et se diminue avec w jusque s'annule pour certain valeur de w et puis s'augment positivement (la réponse devient en phase avec l'excitation). La réponse de la masse M_2 est toujours en déphasage avec l'excitation. Après w_1 la réponse se diminue jusqu'à une valeur donnée puis s'augmente avec w jusqu'à l'infinie à w_2 (la résonance à w_2).