

**Semestre: 6****Unité d'enseignement: UEF 3.2.2****Matière: Fondations et ouvrages géotechniques****VHS: 45h00 (Cours: 1h30, TD: 1h30)****Crédits: 4****Coefficient: 2****Objectifs de l'enseignement:**

Dans cette matière, l'étudiant aura l'occasion d'acquérir des connaissances sur les fondations et les ouvrages en géotechnique. Il sera capable de calculer et de vérifier la stabilité de certains ouvrages, tels que: les ouvrages de soutènement, les fondations et les talus.

**Connaissances préalables recommandées:**

Connaissances acquises dans les matières MDS1, MDS2, RDM1, RDM2, BA1.

**Contenu de la matière:****Chapitre 1. Etats d'équilibre limite****(3 Semaines)**

Equilibres inférieur et supérieur de Rankine (Coefficients de poussée et de butée des terres), Equilibre de Boussinesq (cas général), Equilibre de Prandtl (Poussée due aux surcharges).

**Chapitre 2. Ouvrages de soutènement****(4 Semaines)**

Définition et classification des ouvrages de soutènement; Actions des terres: poussées et butées ; Stabilité des murs de soutènement; Stabilité des rideaux de palplanches.

**Chapitre 3. Fondations superficielles et profondes****(4 Semaines)**

Définition et classification des fondations; Théorie de la capacité portante; Calcul des fondations superficielles; Calcul des fondations profondes.

**Chapitre 4. Stabilité des pentes****(4 Semaines)**

Introduction et notions générales sur les méthodes de calcul de stabilité des pentes (Notions de coefficient de sécurité).

**Mode d'évaluation:**

Contrôle continu: 40%; Examen: 60%.

**Références bibliographiques**

1. J. Costet ; G. Sanglerat, "Cours pratique de Mécanique des sols", Tome 2 Dunod.
2. G. Sanglerat ;B. Cambou, G. Olivari, "Problèmes pratiques de Mécanique des sols, Tome 2"., Dunod.
4. G. Phillipponat, "Fondations et ouvrages en terre".
5. F. Schlosser, "Elément de Mécanique des sols".
6. F. Schlosser, "Exercices de Mécanique des sols".
7. SCHLOSSER F., 1988, "Éléments de mécanique des sols", Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

## Chapitre 1 ÉTATS D'EQUILIBRE LIMITE POUSSEE ET BUTEE DES TERRES

### 1.1 Notions de Poussée et Butée

Les sols exercent des pressions verticales sur les couches sous-jacentes, ce qui engendre des pressions horizontales dites « poussée (pression active) ou butée (pression passive) des terres ». Un ouvrage de soutènement doit être alors conçu de manière à résister à ces poussées ou butées.

Pour un massif de sol, on distingue trois états de sol :

#### État de sol au repos :

Considérons un massif de sol semi-indéfini à surface libre horizontale et n'étant soumis à aucune force extérieure.

A la profondeur  $z$  sous un remblai indéfini (figure 1) :

La contrainte effective verticale (sur une facette horizontale)

$$\text{Est : } \sigma'_{v} = \gamma' \cdot z$$

la contrainte horizontale (sur une facette verticale),

s'il n'y a pas de déplacement latéral est :  $\sigma'_{h} = K_0 \cdot \sigma'_{v}$

$K_0$  étant, par définition, le coefficient des pressions des terres au repos, c'est le rapport entre **la contrainte horizontale effective**

**et la contrainte verticale effective** :  $K_0 = \frac{\sigma'_{h}}{\sigma'_{v}}$

$K_0$  (le coefficient des terres au repos) est indépendant de l'état de saturation du massif. Il est constant pour une même couche de sol et une même masse volumique.

Pour les sols saturés, **la contrainte latérale totale** (horizontale) ou pression des terres est définie en fonction de **la contrainte verticale totale** par la relation :

$$\sigma_h = K \cdot \sigma_v = K \cdot (\sigma'_h + U) \quad \text{alors} \quad \sigma_h = K_0 \cdot \sigma'_v + U$$

Où  $K$  est dit coefficient de la pression des terres pour contrainte totale. Puisque les contraintes totales peuvent changer selon le degré de saturation du sol, le coefficient  $K$  n'est pas constant pour un sol donné.

C'est pour cette raison que nous écrivons cette relation en termes de contraintes effectives :  $\sigma'_h = K_0 \cdot \sigma'_v$

Pour les sols sec la contrainte totale est égale à la contrainte effective ;  $\sigma_h = \sigma'_h$

De ce fait, ce coefficient est très important pour l'analyse de stabilité et la conception des différents ouvrages

Le coefficient  $K_0$  peut être déterminé expérimentalement par un essai triaxial pendant lequel on empêche toute déformation latérale. D'autre part, on peut trouver des relations analytiques donnant  $K_0$  en fonction des propriétés du sol.

- Matériau élastique linéaire :  $K_0 = \frac{\nu}{1-\nu}$  avec  $0 \leq \nu \leq 0.5$  ;
- Argiles molles et vases  $K_0 = 1$

JAKYA a proposé la formule empirique en fonction de l'angle de frottement interne (1944) pour les sables et argiles normalement consolidés :  $K_0 = 1 - \sin \varphi'$

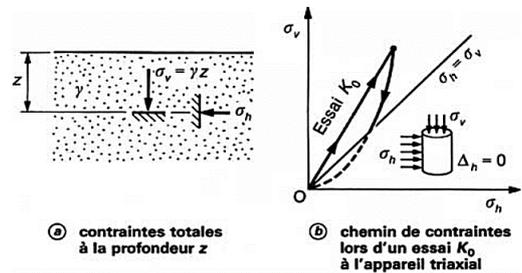


Figure 1 : Contrainte dans le sol et détermination de  $K_0$  au laboratoire

Type de sol	Valeur de $K_0$
Sable lâche	0,45 à 0,50
Sable compact	0,40 à 0,45
Argile normalement consolidée	0,50
Argile surconsolidée	> 0,5

Tableau 1: Coefficient  $K_0$  pour quelques type de sols (d'après Schlosser)

**Poussée ou État actif de sol:**

Imaginons un écran mince vertical lisse dans un massif de sol. Il est soumis par définition à la pression des terres au repos s’il ne subit aucun déplacement (figure2a),. Si l’écran se déplace vers l’extérieur (figure2b), le sol a tendance à suivre ce mouvement (expansion ou relâchement du sol) et la contrainte  $\sigma_h$  diminue jusqu’à une valeur limite correspondant à l’effondrement du massif de sol, l’écran est repoussé par le massif de terre et il y a apparition des lignes de rupture. C’est l’état actif ou poussée de sol.

**Butée ou État passif de sol:**

Si au contraire l’écran se déplace vers l’intérieur du massif (figure2c), il y aura une compression ou compacité maximal des terres. La contrainte horizontale sur l’écran va croître jusqu’à ce que se produise la rupture du massif de terre et apparition des lignes de rupture. La résistance maximale atteinte avant rupture correspond à un état d’équilibre passif ou butée.

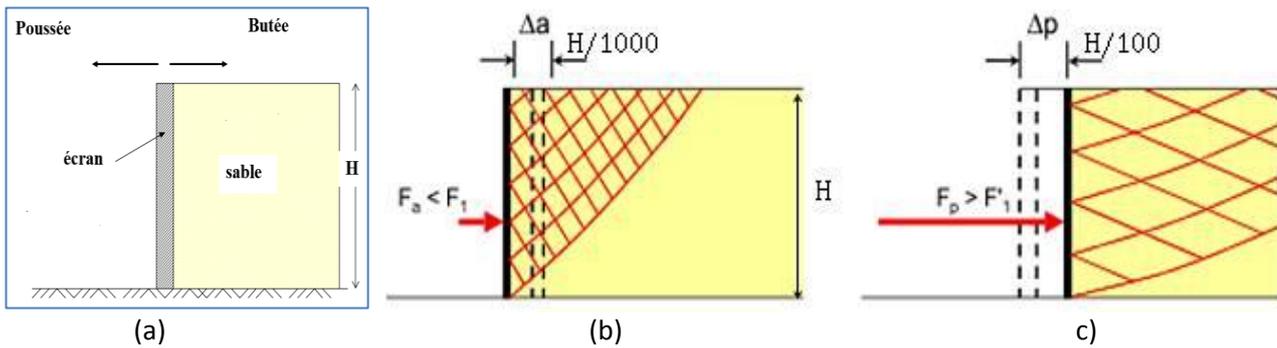
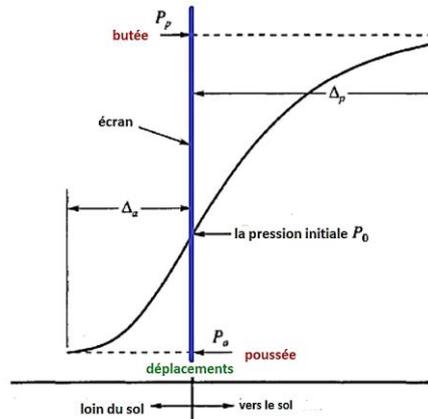


Figure 2 – Etats de Poussée et de butée

On peut remarquer sur la figure suivante que la déformation latérale nécessaire à la mobilisation de la pression passive est beaucoup plus grande (2 à 4 % pour les sables denses, de 10 à 15 % pour les sables lâches) que la déformation nécessaire à la mobilisation de la pression active (de l’ordre de 0,25 et 1 % respectivement)



Ou  
 $P_a$  : force ou pression de poussée  
 $P_p$  : force ou pression de butée  
 $\Delta_a$  : déplacement du mur vers l’extérieur ;  
 $\Delta_p$  : déplacement du mur vers l’intérieur.

Figure3-a – Développement des déplacement dus aux pression actives (poussées) et passives (butées) des terres

Pour passer de l’état de repos à l’état de poussée le déplacement nécessaire est très faible de  $\frac{H}{1000}$

Au contraire pour mobiliser la butée, il est supérieur à  $\frac{H}{100}$ .

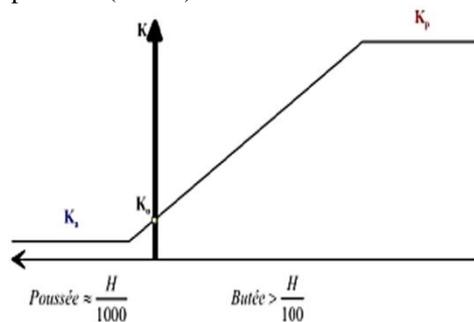


Figure3-b - Déplacements nécessaire pour mobiliser les états limites de poussée et de butée.

**1.2 Etat d'équilibre limite**

L'équilibre limite est lorsque le cercle de Mohr est tangent à la courbe intrinsèque. Toute augmentation de la contrainte est en effet susceptible d'entraîner la rupture par **écoulement plastique** sur des plans ou des facettes appelées **plan de rupture ou de glissement**, l'équilibre limite apparaît comme l'état qui précède immédiatement la rupture. L'équilibre en un point peut être **limite**(les **zones plastiques**) ou **surabondant** (**zones élastiques**).

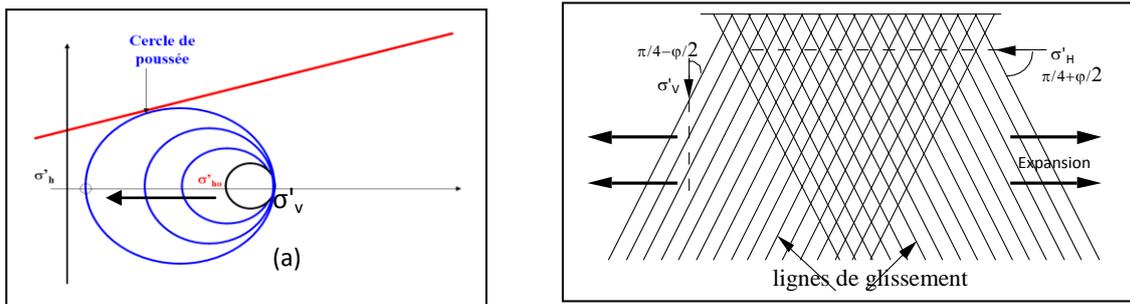
Dans les sols, ces zones plastiques sont de dimensions limitées, on étudiera néanmoins des schémas théoriques dans la totalité du milieu est en équilibre plastique.

**1-2-1 Equilibre limite inférieur ou équilibre de poussée**

C'est l'état actif de sol, la contrainte effective horizontale initiale  $\sigma'_{h0}$  (figure 4-a) diminue pour atteindre une valeur limite  $\sigma'_a < \sigma'_{h0}$  et tant que la contrainte effective verticale reste constante, le cercle de Mohr devient tangent à la droite de Coulomb pour une valeur de  $\sigma'_a = \sigma'_h$ , il y a plasticité du sol, en tous les points du sol, (c'est l'état d'équilibre limite inférieur ou actif. La relation entre les contraintes horizontale et verticale est :

$$\sigma'_a = K_a \cdot \sigma'_v \quad \text{Ou} \quad K_a \text{ Coefficient de poussée des terres}$$

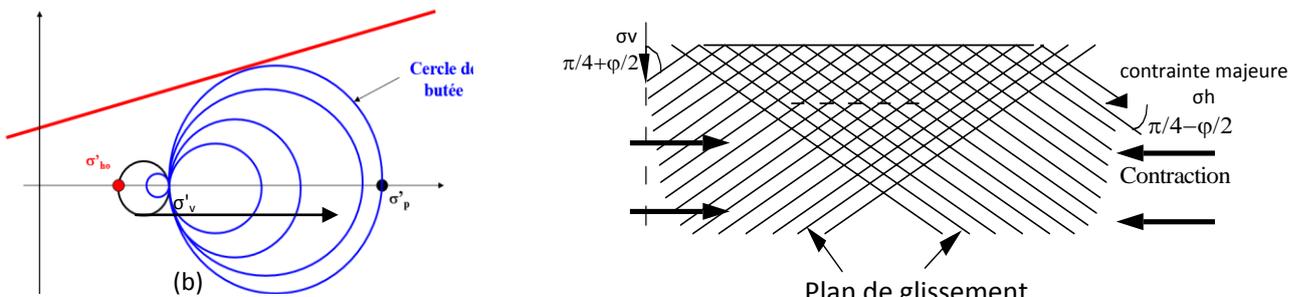
Il y a apparition des plans de plasticité ou plans de glissement, appelés aussi lignes de glissement si l'on raisonne en 2 dimensions, ils ont une orientation particulière et font un angle de  $\pi/4 + \varphi/2$  par rapport à  $\sigma'_h$  et  $\pi/4 - \varphi/2$  par rapport à  $\sigma'_v$ .



**Figure 4 :** -Cercle de Mohr, équilibre inférieur (poussée) et plans de glissement

**1-2-2 Equilibre limite supérieur ou équilibre de butée**

C'est l'état passif, le sol se comprime et la contrainte effective horizontale initiale  $\sigma'_{h0}$  augmente pour atteindre une valeur limite  $\sigma'_p > \sigma'_{h0}$  (figure5-b). La contrainte effective verticale reste constante et la contrainte effective horizontale initiale  $\sigma'_{h0}$  augmente jusqu'à ce que le cercle de Mohr devienne tangent à la droite de Mohr – Coulomb pour une valeur de  $\sigma'_h = \sigma'_p$ , c'est l'équilibre limite supérieur et la relation entre les contraintes horizontale et verticale est :  $\sigma_p = K_p \cdot \sigma_v$  Ou **K<sub>p</sub>** Coefficient de butée des terres



**Figure-5 :** Cercle de Mohr, équilibre supérieur (butée) et plans de glissement

### 1.3 Calcul des coefficients de poussée et butée pour un massif à surface horizontale

#### 1.3.1 Massif pulvérulent (Le cas le plus simple):

Pour un sol pulvérulent ( $c=0$ ), un mur lisse (pas de frottement entre le sol et l'écran) et Surface du sol horizontale non chargé. le critère de Mohr – Coulomb permet d'obtenir la force de poussée et de butée comme suit :

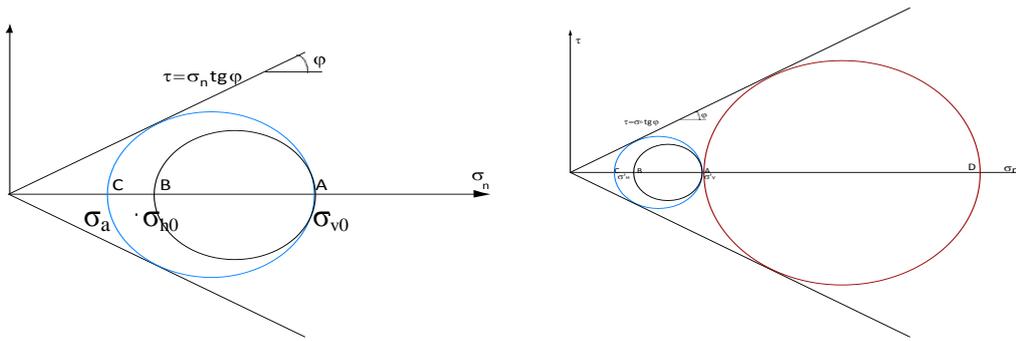
$$\sigma'_3 = \frac{1 - \sin \phi'}{1 + \sin \phi'} \cdot \sigma'_1 \Leftrightarrow \sigma'_3 = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi'}{2}\right) \cdot \sigma'_1 \quad \text{Ou } \sigma'_a = \sigma'_3; \quad \sigma'_v = \gamma \cdot z = \sigma'_1 \quad \text{Cas de poussée}$$

$$\sigma'_1 = \frac{1 + \sin \phi'}{1 - \sin \phi'} \cdot \sigma'_3 \Rightarrow \sigma'_1 = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2}\right) \cdot \sigma'_3 \quad \sigma'_p = \sigma'_1; \quad \sigma'_v = \sigma'_3 \quad \text{Cas de butée}$$

- La contrainte de poussée :  $\sigma'_a = K_a \cdot \sigma'_{v0}$  donc  $K_a = \frac{1 - \sin \phi'}{1 + \sin \phi'} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi'}{2}\right)$
- La contrainte de butée :  $\sigma'_p = K_p \cdot \sigma'_{v0}$  donc  $K_p = \frac{1 + \sin \phi'}{1 - \sin \phi'} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2}\right)$

Comme on le remarque :  $K_a \cdot K_p = 1$

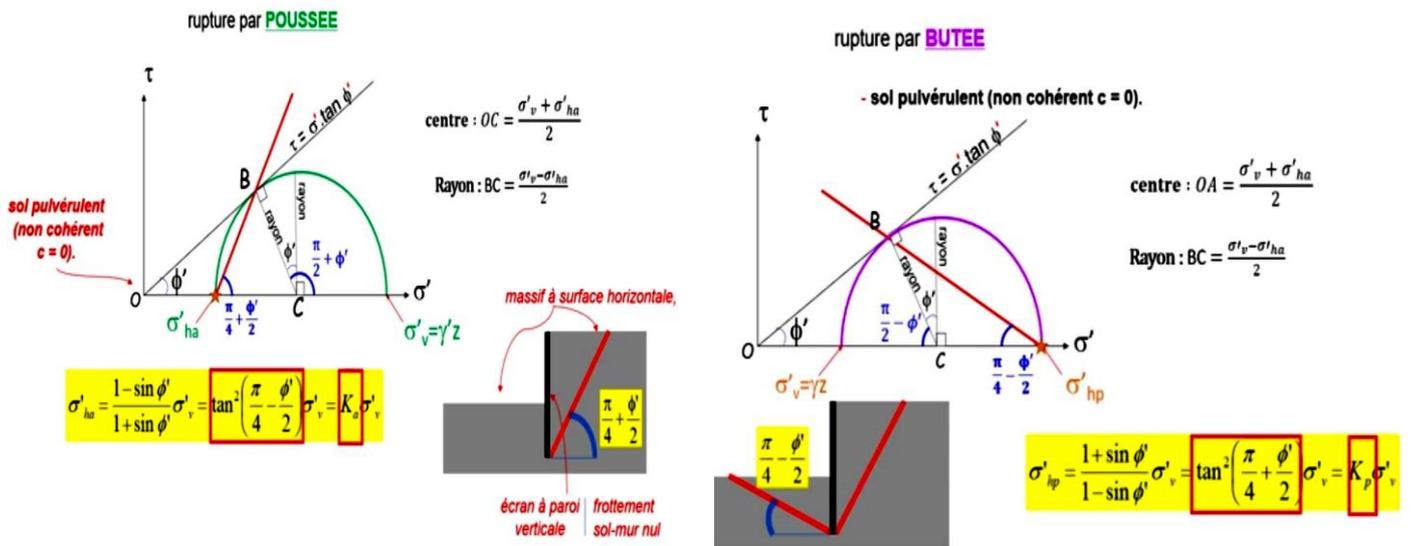
Comme  $\sigma'_v = \gamma \cdot z$  (pour un sol homogène),  $\sigma'_h$  varie linéairement avec la profondeur. Donc le diagramme des pressions de poussée ou de butée du sol sur le mur est linéaire le long du mur (forme triangulaire).



Le cercle AB représente l'état des contraintes au repos avec  $\sigma'_h = K_0 \cdot \sigma'_v$ . L'équilibre est surabondant, le cercle de Mohr n'est pas tangent à la courbe intrinsèque. Le cercle AC l'équilibre limite de poussée.  $\sigma'_a = K_a \cdot \sigma'_{v0}$ . Le cercle AD l'équilibre limite de butée.  $\sigma'_p = K_p \cdot \sigma'_{v0}$ .

Figure 6: (a)- équilibre inférieur (poussée)

(b) - équilibre supérieur (butée)



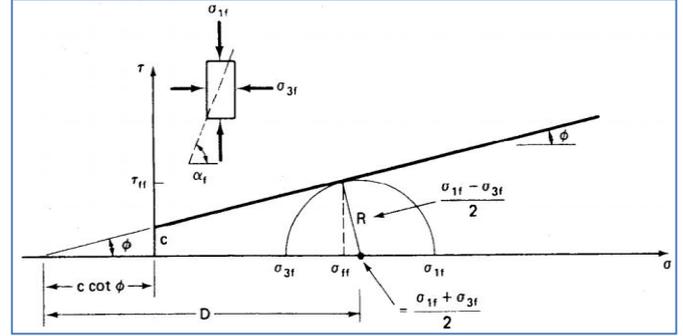
**1.3.2 Massif cohérent (sols fins)**

Si le sol est cohérent et frottant, les cercles de Mohr sont identiques à un cas sans cohésion à une translation

de  $H = \frac{c'}{\tan \phi} = \frac{c' \cdot \cos \phi}{\sin \phi}$

cette analogie entre un sol cohérent et un sol "équivalent" sans cohésion est connue sous le nom de "théorème des états correspondants".

Pour les sols fins on doit considérer deux types de Comportements :



**a) Comportement drainé à long terme**

On considère un massif de sol fin saturé ayant pour caractéristiques à la rupture ( $c'$ ,  $\phi'$ ). En comportement drainé le calcul se fait en terme de contraintes effectives et  $\phi'$  et  $c' \neq 0$ . A partir du critère de rupture de Mohr – Coulomb :

$$\sigma'_3 = \frac{1 - \sin \phi'}{1 + \sin \phi'} \cdot \sigma'_1 - \frac{2 \cos \phi'}{1 + \sin \phi'} c' \Leftrightarrow \sigma'_3 = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi'}{2}\right) \cdot \sigma'_1 - 2 \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi'}{2}\right) \cdot c'$$

Et

$$\sigma'_1 = \frac{1 + \sin \phi'}{1 - \sin \phi'} \cdot \sigma'_3 + \frac{2 \cos \phi'}{1 - \sin \phi'} c' \Leftrightarrow \sigma'_1 = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2}\right) \cdot \sigma'_3 + 2 \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2}\right) \cdot c'$$

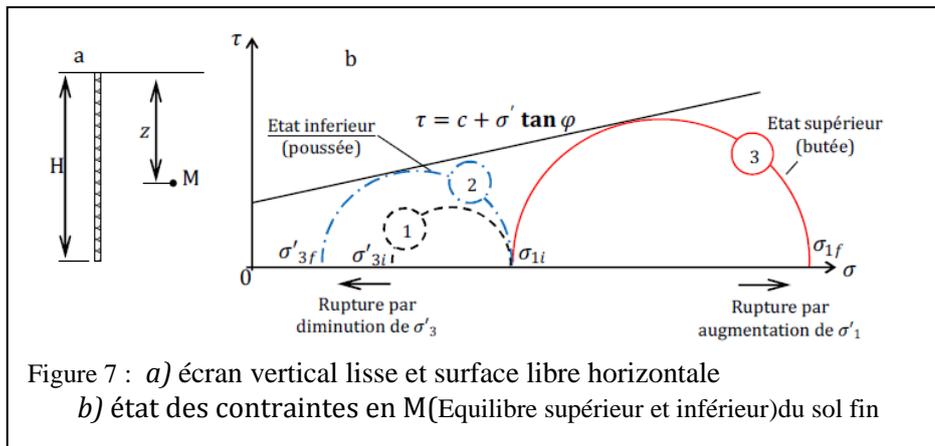


Figure 7 : a) écran vertical lisse et surface libre horizontale  
b) état des contraintes en M (Equilibre supérieur et inférieur) du sol fin

Le cercle (1) représente l'état des contraintes au repos,  $\sigma'_h = K_0 \cdot \sigma'_v$ . L'équilibre est surabondant le cercle de Mohr n'est pas tangent à la courbe intrinsèque.

Le cercle (2) représente l'équilibre limite de poussée et le cercle(3) représente l'équilibre limite de butée.

Les pressions de poussée et de buté sont données par :

- Poussée :  $\sigma'_a = \sigma'_{v0} \left[ \frac{1 - \sin \phi'}{1 + \sin \phi'} - \frac{2 \cos \phi'}{1 + \sin \phi'} \frac{c'}{\sigma'_{v0}} \right] \Leftrightarrow \sigma'_a = \sigma'_{v0} \left[ \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi'}{2}\right) - 2 \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi'}{2}\right) \cdot \frac{c'}{\sigma'_{v0}} \right]$   

$$\sigma'_a = K_a \cdot \sigma'_{v0} - 2c' \cdot \sqrt{K_a}$$

- Butée :  $\sigma'_p = \sigma'_{v0} \left[ \frac{1 + \sin \phi'}{1 - \sin \phi'} + \frac{2 \cos \phi'}{1 - \sin \phi'} \frac{c'}{\sigma'_{v0}} \right] \Leftrightarrow \sigma'_p = \sigma'_{v0} \left[ \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2}\right) + 2 \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2}\right) \cdot \frac{c'}{\sigma'_{v0}} \right]$   

$$\sigma'_p = K_p \cdot \sigma'_{v0} + 2c' \cdot \sqrt{K_p}$$

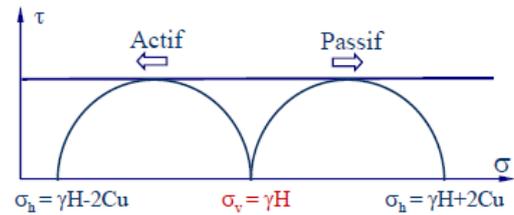
**b) Comportement non drainé à court terme (sol purement cohérent)**

Dans ce cas  $c_u \neq 0$  et  $\varphi_u = 0$ , les pressions de poussée ou de butée du sol sur un mur vertical lisse sont déduites du critère de Mohr - Coulomb et en terme de contrainte totale on aura :

$$K_a = K_p = 1$$

La contrainte de poussée :  $\sigma_a = \sigma_{v0} - 2c_u$

Et La contrainte de butée :  $\sigma_p = \sigma_{v0} + 2c_u$



Le tableau suivant résume tous les cas

Figure 8 :Etat d'équilibre limite à court terme

État du sol	Comportement non drainé	Comportement drainé
initiale	$\sigma_v = \gamma z$ $\sigma_h = u + K_0 \gamma z$	$\sigma'_v = \gamma' z$ $\sigma'_h = K_0 \gamma' z$
de poussée	$\sigma_v = \gamma z$ $\sigma_h = \sigma_v - 2 c_u$	$\sigma'_v = \gamma' z$ $\sigma'_h = K_a \sigma'_v - 2 c' \sqrt{K_a}$ avec $K_a = \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2} \right)$
de butée	$\sigma_v = \gamma z$ $\sigma_h = \sigma_v + 2 c_u$	$\sigma'_v = \gamma' z$ $\sigma'_h = K_p \sigma'_v + 2 c' \sqrt{K_p}$ avec $K_p = \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right)$

Tableau2 - Contraintes horizontales pour un sol fin.

**1.4 L'équilibre de Rankine (1856).**

La théorie de Rankine cherche à représenter les contraintes qui règnent dans un massif semi infini isotrope de sol pulvérulent au moment de l'équilibre limite, il a mis les hypothèses suivantes :

- Le massif n'est pas chargé, il est soumis à son poids propre seulement;
- Le massif est incliné et faisant un angle  $\beta$  avec l'horizontale ;
- Le massif est entièrement en équilibre plastique (les plans de rupture sont entièrement développées) ;
- L'état d'équilibre est le même pour tous les points situés à la même profondeur ;
- On suppose qu'il n'y a pas de frottement entre l'écran et le sol (écran lisse).

**1-4-1 Contrainte sur une facette inclinée parallèle à la surface libre**

Soit un massif de sol pulvérulent dont la surface fait l'angle  $\beta$  avec l'horizontale. Sur le plan parallèle à la surface et situé à la profondeur  $z$ , la contrainte  $\vec{f}$  est verticale et égale à :

- Pour un sol à surface horizontale:  $\sigma_v = \gamma \cdot z$
- Pour un sol à surface inclinée d'un angle  $\beta$  sur l'horizontale :  $\sigma_v = \gamma \cdot z \cdot \cos \beta$

$$\sigma_N = \sigma_v \cos \beta = \gamma z \cos^2 \beta$$

$$\tau = \sigma_v \sin \beta = \gamma z \cos \beta \sin \beta$$

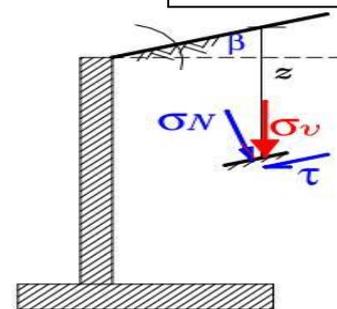
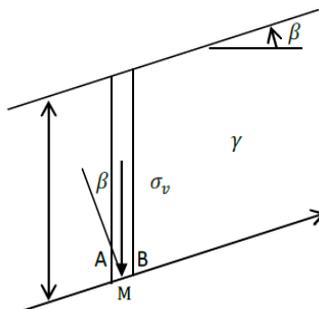
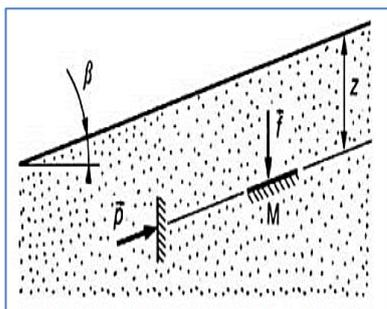


Figure 8 - Contrainte sur une facette parallèle à la surface libre (hypothèse de Rankin)

Les forces agissant sur les faces latérales sont égales et opposées. On conclut que la contrainte sur un plan parallèle à la surface libre est verticale. Ceci veut dire que l'inclinaison de la surface libre ne peut dépasser l'angle  $\varphi$  : ( $\beta \leq \varphi$ )

Les coefficients de poussée et de butée, définis par rapport aux contraintes conjuguées, ont pour expression

$$K_a = \frac{1}{K_p} = \frac{\cos \beta - \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \varphi}}{\cos \beta + \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \varphi}}$$

$K_a$  et  $K_p$  sont les coefficients de poussée et de butée pour un sol incliné d'angle  $\beta$  avec l'horizontale

$$K_p = \frac{\cos \beta + \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \varphi}}{\cos \beta - \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \varphi}}$$

Et les contraintes de poussée et butée sont :

$$\sigma_a = \gamma h \cos \beta \frac{\cos \beta - \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \varphi}}{\cos \beta + \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \varphi}} \Rightarrow \sigma_a = \gamma h K_a$$

Et

$$\sigma_p = \gamma h \cos \beta \frac{\cos \beta + \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \varphi}}{\cos \beta - \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \varphi}} \Rightarrow \sigma_p = \gamma h K_p$$

Il est intéressant de remarquer que dans le cas où la surface du sol est inclinée à l'angle limite, c'est-à-dire dans le cas où l'inclinaison de la surface du sol est égale à l'angle de frottement interne  $\phi$ , ces coefficients sont égaux à 1 :

$$K_a(\varphi) = K_p(\varphi) = 1$$

**Remarque**

Pour  $\beta = 0$  on se trouve dans le cas simple que ce soit le sol pulvérulent ou cohérent (1-3).

**1-4-2 Calcul des forces de poussée et de butée**

La force de poussée ou de butée est la résultante des contraintes, son point d'application se trouve au centre de gravité du diagramme des contraintes, la méthode de superposition est applicable.

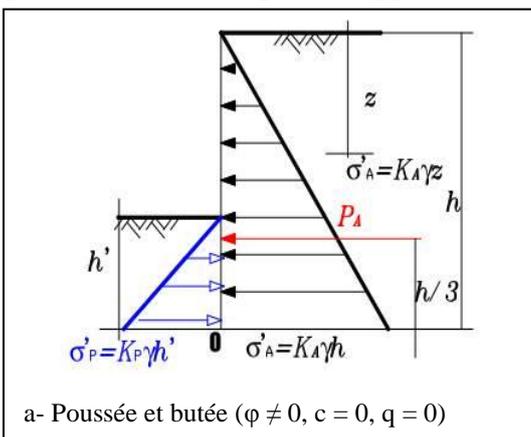
**Au repos**

$$\sigma_h = K_0 \cdot \sigma_v = K_0 \cdot \gamma \cdot z$$

$$P_0 = \int_0^H \sigma_h dz = \int_0^H K_0 \cdot \gamma \cdot z dz \Rightarrow P_0 = K_0 \cdot \gamma \frac{H^2}{2}$$

Cette force horizontale est appliquée à  $\frac{H}{3}$  de la base du mur.

Cette méthode conduit à une répartition triangulaire des contraintes de poussée ou de butée sur l'écran et permet d'obtenir le point d'application de la force correspondante.

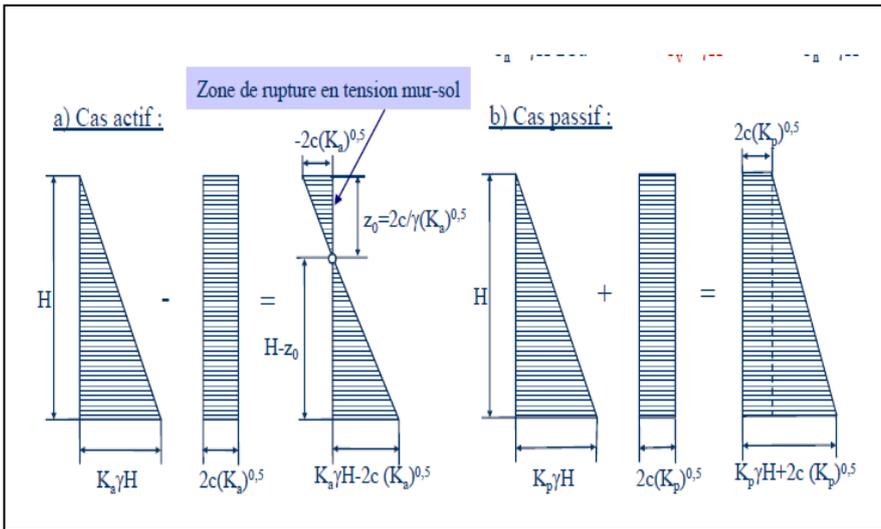


**Poussée :**

$$P_A = \int_0^h \sigma_A = \frac{1}{2} \gamma h^2 K_A \text{ située à } h/3 \text{ par rapport à O}$$

**Butée :**

$$P_P = \int_0^h \sigma_A = \frac{1}{2} \gamma h^2 K_P \text{ située à } h'/3 \text{ par rapport à O}$$



$$P_A = \frac{1}{2} \gamma h^2 K_A - 2c' \sqrt{K_A} \cdot h$$

$$P_P = \frac{1}{2} \gamma h^2 K_p + 2c' \sqrt{K_p} \cdot h$$

A court terme

$$P_A = \frac{1}{2} \gamma h^2 - 2cu \cdot h$$

$$P_P = \frac{1}{2} \gamma h^2 + 2cu \cdot h$$

**1-4-3 Force de poussée pour un massif pulvérulent saturé à surface horizontale**

Si le sol est en état de rupture de poussée, la contrainte qui s'exerce sur le mur est horizontale, principale et a pour expression :

$$\sigma_h = u + K_a \sigma'_v = u + \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \sigma'_v$$

$$\sigma_h = \gamma_w z + K_a (\gamma - \gamma_w) z$$

La répartition est linéaire, et la force de poussée horizontale  $F_a$  est appliquée au tiers de la hauteur à partir de la base. Elle a pour expression :

$$F_a = \int_0^H \sigma_h dz$$

$$F_a = 1/2 (\gamma_w + K_a \gamma') H^2 \text{ avec } \gamma' = \gamma - \gamma_w$$

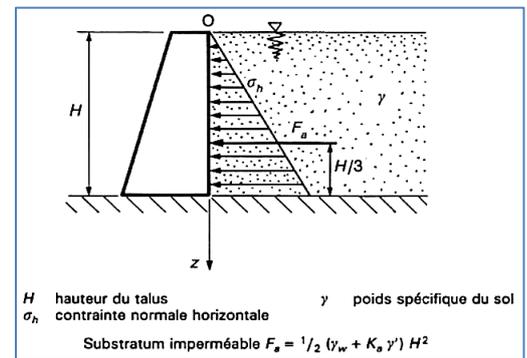


Figure 11- Force de poussée exercée par un massif pulvérulent saturé

**1-4-4 Force de butée et poussée pour un massif pulvérulent à surface inclinée**

Si l'on met le sol en rupture de butée, la force de butée exercée est donnée par :

$$\vec{F}_p = \int_0^H \vec{f} dz$$

$$f = K_p(\beta) \gamma z \cos \beta$$

$$F_p = \frac{1}{2} K_p(\beta) \gamma H^2 \cos \beta$$

Cette force est inclinée de l'angle  $\beta$  et appliquée au tiers de la hauteur à partir de la base.

**Force de poussée :**

$$\sigma_A = \gamma z K_A(\beta) \cos \beta$$

$$P_A = \frac{1}{2} \gamma \cdot h^2 K_A(\beta) \cos \beta$$

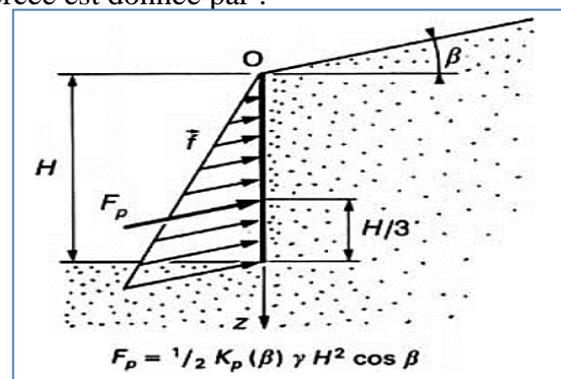


Figure 12 - Force de butée sur un massif à surface inclinée

### 1-5 Equilibre de Boussinesq

En effet, le sol en particulier sous l'effet du tassement va frotter contre la paroi interne de l'écran et générer un effort vertical descendant non négligeable. La théorie de Boussinesq est un schéma général permettant de prendre en compte le frottement sol-écran.

Initialement, on suppose que le sol soit un matériau pulvérulent en équilibre limite sous son propre poids, la prise en compte de la cohésion et des forces extérieures viendront par la suite.

Le massif est limité par deux plans :

une surface libre non chargée et un écran latéral.

Sur l'écran, l'obliquité  $\delta$  des contraintes est constante le long de l'écran OC et fixée. La répartition des contraintes sur l'écran est triangulaire. (résultat de la théorie de Rankine).

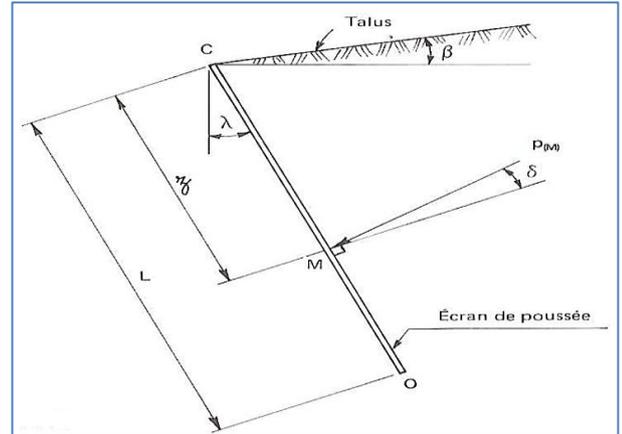


Figure 13 : Equilibre de Boussinesque

La poussée unitaire (dimensions d'une pression) qui s'exerce sur un écran de poussée en un point M situé à une distance z de l'arête supérieure de l'écran est de la forme :

$$\sigma_h = k_a \cdot \gamma \cdot z \quad \text{fonction de : } \beta, \lambda, \varphi \text{ et } \delta$$

$\lambda$  : Inclinaison de l'écran par rapport à la verticale.

$\delta$  : Inclinaison de la force sur un écran verticale ou l'angle de frottement sol-écran, positif en poussée et négatif en butée. Dans le cas général, on prend :  $\delta = \frac{2}{3} \varphi$

Angle de l'interface en fonction de l'état de la surface du parement	
Etat de surface du parement	$\delta$ Angle de frottement sol-mur
Surfaces très lisses ou lubrifiées	$\delta = 0$
Surface peu rugueuse (béton lisse, béton traité)	$\delta = \frac{1}{3} \varphi$
Surface rugueuse (béton, béton projeté, maçonnerie, acier...)	$\delta = \frac{2}{3} \varphi$
Murs caissons...	$\delta \geq \frac{2}{3} \varphi$
Parements fictifs inclinés des murs cantilevers	$\delta = \varphi$

Tableau4 - L'angle de frottement sol-écran

les coefficients poussée et butée sont donnés par la formule de Poncelet :

$$K_a = \frac{\cos^2(\varphi - \lambda)}{\cos^2(\lambda) \cos(\delta + \lambda)} \cdot \frac{1}{\left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \sin(\varphi - \beta)}{\cos(\delta + \lambda) \cos(\lambda - \beta)}}\right]^2}$$

$$K_p = \frac{\cos^2(\varphi + \lambda)}{\cos^2(\lambda) \cos(\delta - \lambda)} \cdot \frac{1}{\left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \sin(\varphi + \beta)}{\cos(\delta - \lambda) \cos(\beta - \lambda)}}\right]^2}$$

La force de poussée (butée) se décompose en :

Une composante horizontale :  $P_{aH} = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_a \cos(\lambda + \delta)$

Une composante verticale :  $P_{aV} = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_a \sin(\lambda + \delta)$

En 1948, Caquot et Kerisel rassemblent des tables de coefficients de poussée et de butée des terres en fonction de l'angle de frottement  $\delta$  entre le sol et l'écran qui sont encore utilisée aujourd'hui.

1-6 **Equilibre de Prandtl**

Prandtl prend en considération les surcharges appliquées sur la surface libre de sol.

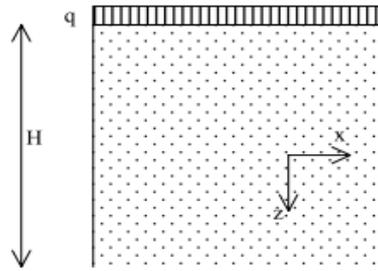


Figure 15 Massif chargé uniformément

On suppose que le massif est non pesant.

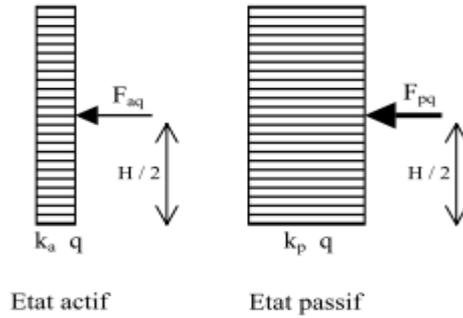


Figure 16 Poussée et butée dû à une surcharge uniforme

La contrainte  $\sigma_z$  augmente de q quelque soit la profondeur z. Alors, la pression latérale augmente de :

$K_a \cdot q$  Dans le cas actif et

$K_p \cdot q$  Dans le cas passif

Quel que soit la profondeur. La distribution des contraintes correspondante est d'une forme rectangulaires, figure 16.

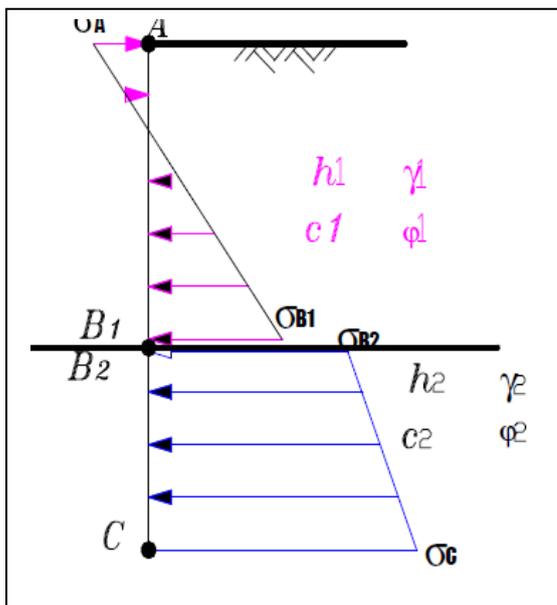
1-7 **Massif en plusieurs couches hétérogènes :**

Les méthodes de calcul citées précédemment restent valables. Mais, les contraintes de poussée ou de butée doivent être calculées à l'interface des couches en tenant compte des paramètres de chacune d'elles.

Le sol sus-jacent est considéré comme une surcharge, avec  $q = \gamma h$ .

En cas de présence d'une nappe d'eau, on ne multiplie pas le poids de l'eau par K donc on utilise les contraintes effectives, et la pression horizontale de l'eau est la même que la pression verticale,  $\sigma_w = \gamma_w h$

Pour l'exemple, les contraintes de poussée aux points A, B et C sont :



$$\sigma_A = -2c_1 \sqrt{K_{A1}}$$

$$\sigma_{B1} = K_{A1} \gamma_1 h_1 - 2c_1 \sqrt{K_{A1}}$$

$$\sigma_{B2} = K_{A2} \gamma_1 h_1 - 2c_2 \sqrt{K_{A2}}$$

$$\sigma_C = \sigma_{B2} + K_{A2} \gamma_2 h_2$$

Avec

$$K_A = \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\phi'}{2} \right)$$

**Annexe**

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE TOULOUSE

GÉOTECHNIQUE 1 Cours - Chapitres 4

Jacques Lérau Maître de Conférences Année universitaire 2005 - 2006

- C. IV - 11 -

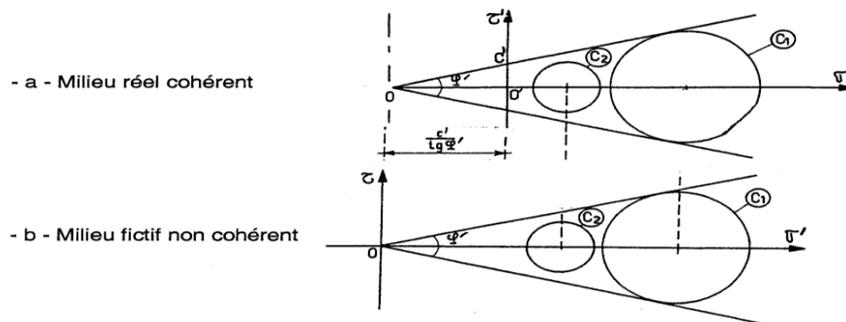
$$\frac{1 + \sin \varphi'}{1 - \sin \varphi'} = \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right) = \cot^2 \mu \quad \text{et} \quad \frac{1 - \sin \varphi'}{1 + \sin \varphi'} = \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2} \right) = \tan^2 \mu$$

**3 - 5 - THÉORÈME DES ÉTATS CORRESPONDANTS**

La figure 17-a représente la courbe intrinsèque d'un sol cohérent et frottant ( $c' \neq 0$ ;  $\varphi' \neq 0$ ) avec deux cercles de Mohr,  $C_1$  (correspondant à un point en équilibre limite) et  $C_2$  (correspondant à un point en équilibre surabondant).

La figure 17-b représente la courbe intrinsèque d'un sol pulvérulent ( $c = 0$ ) de même angle de frottement interne que le sol précédent. L'axe  $\overline{O\tau}$  a subi une translation égale à  $\overline{OO'}$ . L'état du sol vis-à-vis de la rupture est identique dans les deux cas. Opérer une translation de l'axe  $\overline{O\tau}$ , de module  $c'/\tan \varphi'$ , revient à appliquer une contrainte normale supplémentaire d'intensité égale à  $c'/\tan \varphi'$  sur chaque facette de chaque point, quelle que soit sa direction. Il s'agit d'une contrainte isotrope, d'où le **théorème des états correspondants**, dû à Caquot :

Un milieu cohérent et frottant est équivalent à (peut être transformé en) un milieu pulvérulent de même angle de frottement interne à condition d'appliquer sur la surface limite du massif d'une pression hydrostatique d'intensité égale à  $c'/\tan \varphi'$ .

**Théorème des états correspondants**

- Figure 17 -

**Problème 1**

Dans un dépôt de sable homogène, d'une profondeur de **8m**, on a mesuré un angle de frottement = **42°**. La nappe phréatique se trouve à la surface et le poids volumique  $\gamma$  total de ce sable est **20kN/m<sup>3</sup>**. Établir les diagrammes des contraintes effectives horizontales et contraintes totales horizontales au repos dans ce sol.

**Solution**

On a un sable dont  $\varphi=42^\circ$

$K_0=1-\sin \varphi =1-\sin 42=0.33$

(a) Contrainte effective horizontale

$\sigma'_h = K_0 \cdot \sigma'_v = K_0 (\gamma - \gamma_w) \cdot z$

$Z = 0 \implies \sigma'_h = 0$

$Z = 8m \implies \sigma'_h = 0.33 (20 - 10) 8 = 26,4\text{KPa}$

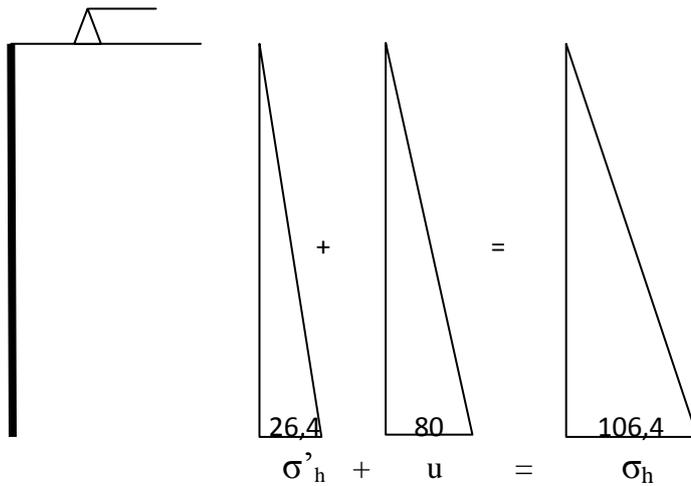
(b) Contrainte totale horizontale

$\sigma_h = \sigma'_h + u = \sigma'_h + \gamma_w \cdot z$

$\sigma_h = 0$

$\sigma_h = 26,4 + 10 \times 8 = 106,4\text{KPa}$

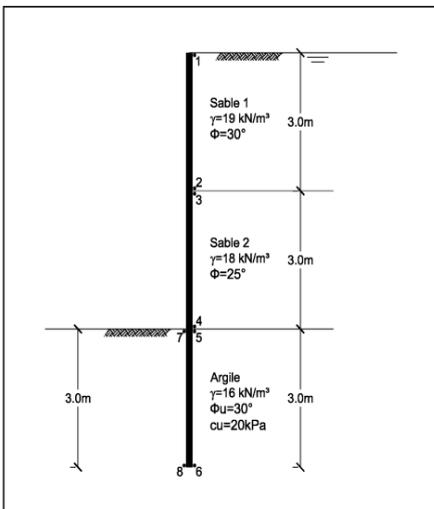
Avec  $u$  : La pression interstitielle



Diagrammes des contraintes

**Problème 2**

Déterminer les diagrammes des pressions verticales et horizontales devant et derrière le mur illustré ci-dessous.



**Solution**

Supposons que le mur soit lisse  $\Rightarrow$  On peut utiliser la théorie de Rankine

(a) coefficient de la poussée et de la butée

$K_a = \frac{1 - \sin \varphi'}{1 + \sin \varphi'} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2}\right)$  et  $K_p = \frac{1 + \sin \varphi'}{1 - \sin \varphi'} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2}\right)$

sable 1  $K_a = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{30}{2}\right) = 0,66$ ; Sable2  $K_a = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{25}{2}\right) = 0,406$

Argile  $K_a = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{0}{2}\right) = 1$  et  $K_p = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{0}{2}\right) = 1$

(b) Calcul des pressions effectives de poussée et butée des terres

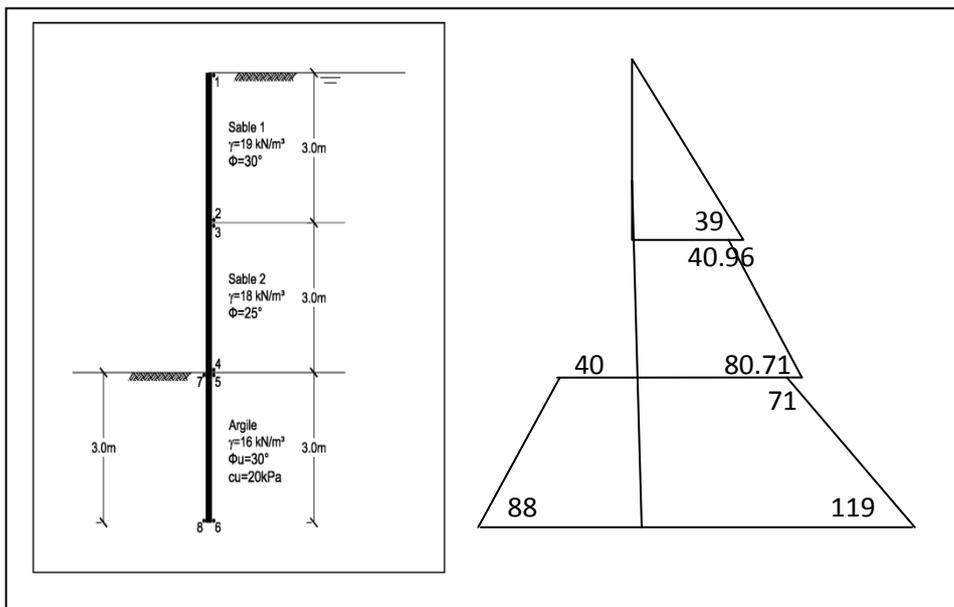
$\sigma'_a = K_a \cdot \sigma'_{v0} - 2c' \cdot \sqrt{K_a}$  et  $\sigma'_p = K_p \cdot \sigma'_{v0} + 2c' \cdot \sqrt{K_p}$

Calcul des pressions totales de poussée et butée des terres

$\sigma_a = \sigma'_a + u$  et  $\sigma_p = \sigma'_p + u$  ou  $u$  pression interstitielle

point	$\sigma = \sum \gamma_i h_i$ (KPa)	$u = \gamma_w \sum h_i$ (KPa)	$\sigma' = \sigma - u$ (KPa)	$\sigma'_a = K_a \cdot \sigma'_{v0} - 2c' \cdot \sqrt{K_a}$ (KPa)	$\sigma_a = \sigma'_a + u$ (KPa)	$\sigma'_p = K_p \cdot \sigma'_{v0} + 2c' \cdot \sqrt{K_p}$ (KPa)	$\sigma_p = \sigma'_p + u$ (KPa)
1	0	0	0	0	0	PAS DE BUTEE	
2	19x 3=57	10 x 3=30	27	0.66x27 =9	39		
3	19x 3=57	10 x 3=30	27	0.406 x27=10.96	40.96		
4	57 + 18x3=111	10 x 6=60	51	0.406 x51=20.71	80.71		
5	Argile Non drainée en termes de contrainte totale $\sigma_a = K_a \cdot \sigma_{v0} - 2c \cdot \sqrt{K_a}$ et $\sigma_p = K_p \cdot \sigma_{v0} + 2c \cdot \sqrt{K_p}$ Court terme						
5	57 + 18x3=111	$\sigma_a = 1 \times 111 - 2 \times 20 \sqrt{1} = 71$ KPa					
6	111 + 16x3=159	$\sigma_a = 1 \times 159 - 2 \times 20 \sqrt{1} = 119$ KPa					
7	0	$\sigma_p = 1 \times 0 + 2 \times 20 \sqrt{1} = 40$ KPa					
8	16 x3 = 48	$\sigma_p = 1 \times 48 + 2 \times 20 \sqrt{1} = 88$ KPa					

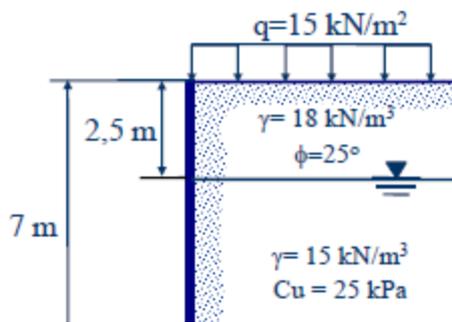
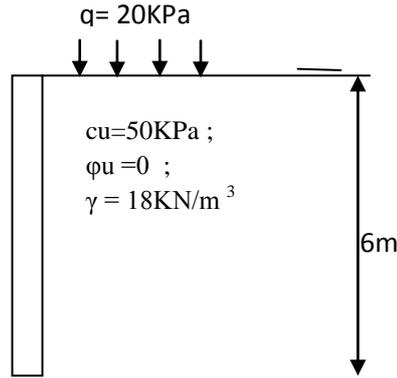
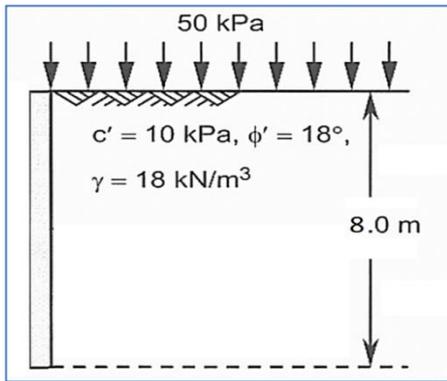
Diagramme des contraintes horizontales totales de poussée et butée



Calcule les forces de poussée et de butée et leur point d'application.

**Problème 3**

Calculer la force de poussée d'un sol cohérent retenu par l'écran lisse donnée par les figures :



**Problème 4**

On veut construire un mur de soutènement en béton armé pour retenir un remblai comme l'indique la figure.

Tracer le digramme de la contrainte de poussée derrière le mur.

Calculer la force de poussée et son point d'application.

Vérifier la stabilité du mur au renversement.

On prend le poids volumique du béton armé égale à  $25 \text{ kN/m}^3$ .

