

# Chapitre 4

## RÉSISTANCE AU CISAILLEMENT DES SOLS

### 4-1 Introduction :

Le sol est considéré comme élément de l'infrastructure qui reçoit la charge globale des ouvrages vers une couche suffisamment stable et résistante. Selon le type de l'ouvrage et son mode de conception, le sol peut constituer soit:

- une base d'appuis pour l'ensemble de l'ouvrage tel que route, tunnel, aérodromes, barrage poids,
- ou un point d'appuis pour quelques éléments seulement tels que bâtiment et pont.

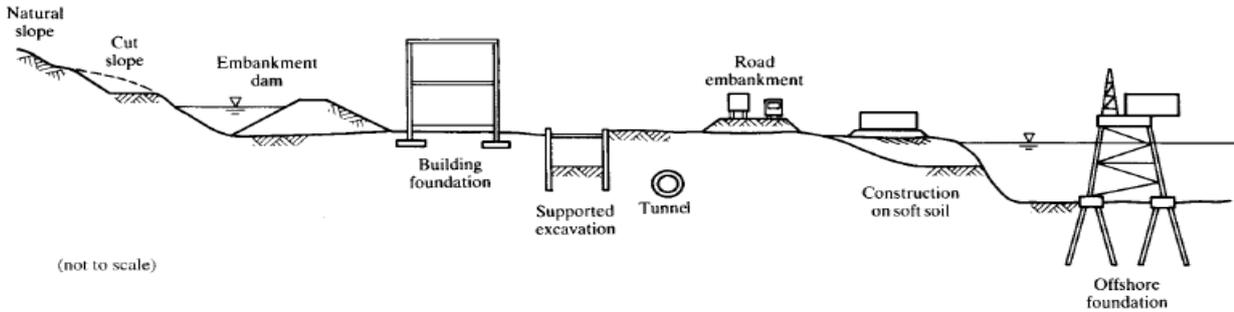


Figure 4-1 Exemples des ouvrages géotechniques

1-pente naturel 2-pente coupée 3-Barrage en terre 4-fondations de bâtiments  
5-Soutènement d'excavation 6-tunnel 7- Remblai pour route 8-construction sur sol mou 9-fondation profonde.

Il est nécessaire d'identifier les caractéristiques qui régissent le comportement mécanique du sol pour assurer la stabilité de l'ouvrage au tassement et à la rupture.

Si l'on fait augmenter les charges ou les contraintes dans le sol, on va avoir des déformations excessives et le sol atteint un état de rupture, c'est à dire le sol va passer du domaine élastique sous faibles taux de chargement au domaine plastique sous grandes déformations et le comportement du sol est à l'état d'écoulement plastique ou à l'état de rupture. La loi de Hooke n'est plus valable, on utilise alors une nouvelle loi appelée **Critère d'écoulement plastique** qui représente la frontière du domaine d'élasticité, Ou le critère de rupture représenté par la courbe intrinsèque qui est l'enveloppe des cercles de Mohr à la rupture.

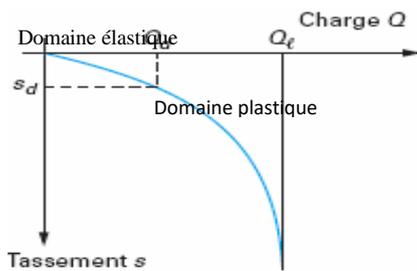
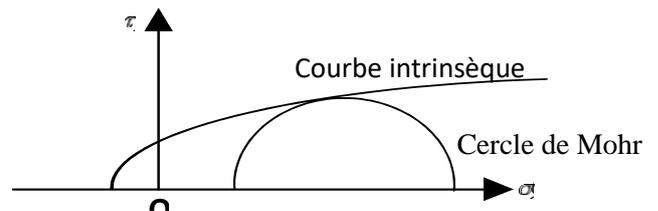


Figure 4-2 a) Courbe chargement-tassement



b) La limite du domaine d'élasticité et de plasticité

En géotechnique ou mécanique des sols, la résistance au cisaillement ou contrainte de cisaillement correspond à la contrainte maximale que peut supporter un sol ou les charges qui provoquent les déformations importantes ou rupture. Au moment de la rupture d'un sol, il y a un glissement entre les particules solides, d'où le terme de résistance au cisaillement.



Figure 4-3 : plan de rupture

a) Glissement de bloc de sol d'une pente ou talus

b) -Déformation du sol sous fondation

### 4-2 Rappel mécanique des milieux continus

#### 4-2-1 Distribution des contraintes autour d'un point

Tenseur des contraintes  $\bar{T}(M, \bar{n})$

La contrainte est la résultante de toutes les forces sur une section unitaire. Elle se décompose en :

-Une contrainte normale, perpendiculaire au plan de la facette

$$\bar{n} \longrightarrow \bar{\sigma}_n$$

-Une contrainte tangentielle, parallèle au plan de la facette  $\bar{\tau}_{nt}$ .

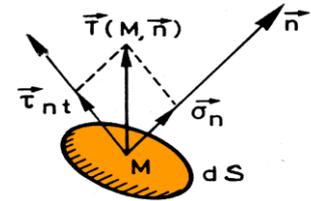


Figure 4-1: Contrainte en un point

En mécanique des sols, pour déterminer l'état de contraintes autour d'un point « M » dans le sol, il suffit de connaître les composantes des forces s'exerçant sur les faces d'un parallélépipède centré autour du point (M) et dont les arêtes sont parallèles aux axes Ox, Oy, Oz.

L'état de contraintes au point M est défini par une matrice symétrique appelée **tenseur de contraintes** :

$$\sigma = (\sigma_{ij}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

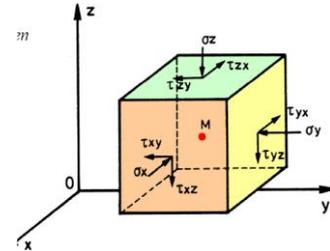


Figure 4-2 Etat de contraintes au point M

Par symétrie on a :  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  donc  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$  et  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$  **le Postulat d'Euler et Cauchy.**

On appelle **contraintes principales**  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$  les contraintes qui correspondent aux plans principaux pour lesquels la contrainte tangentielle est nulle ( $\tau = 0$ ).

$\sigma_1$ : Contrainte principale majeure.

$\sigma_2$ : Contrainte principale intermédiaire. Avec  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

$\sigma_3$ : Contrainte principale mineure.

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

#### Convention de signe :

En mécanique des sols et géotechnique, on considère positive les contraintes de compression.

$\sigma > 0 \leftrightarrow$  compression ;  $\sigma < 0 \leftrightarrow$  traction

#### Etat plan de contrainte

Il y a un état plan de contrainte en un point, quand le vecteur contrainte est situé toujours dans un même plan, quelle que soit la facette considéré.

Soit OXZ ce plan, alors :

$$\sigma_{yy} = 0 ; \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0 ; \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0 \quad \text{d'où} \quad \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

#### 4-2-3 Cercle de Mohr :

Pour étudier l'état de contraintes autour d'un point, on utilise la représentation appelée diagramme ou cercle de Mohr qui consiste à représenter le vecteur contrainte f dans un système d'axes  $(\sigma, \tau)$  en état plan et le cercle de Mohr est représenté par les contraintes principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_3$ .

Si l'on écrit la première condition d'équilibre  $\Sigma F = 0$  (somme des forces est nulle), on aura l'état de contrainte sur le plan incliné de «  $\theta$  »

$$\sigma_\theta = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta ; \quad \text{et} \quad \tau_\theta = (\sigma_1 - \sigma_3) \cos \theta \sin \theta$$

1, 2, 3 = axes des contraintes principales  
 $\tau = 0$  sur les faces

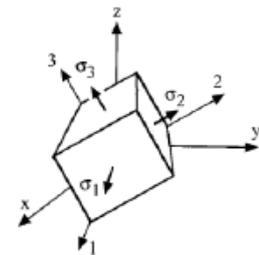


Figure 4-3: Contraintes principales

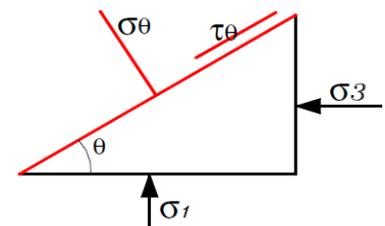
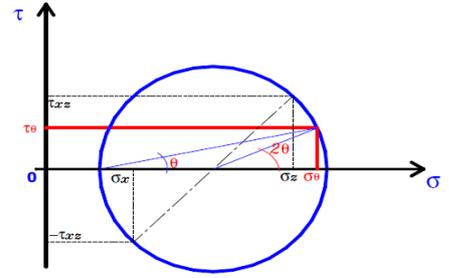
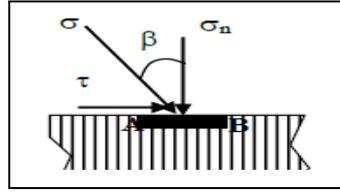


Figure 4-4 : Représentation des contraintes pour un élément de surface

Après simplification de ses équations on aura :  $\sigma_n = \sigma_\theta$  et  $\tau = \tau_\theta$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\theta$$

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\theta$$



A noter que, si les directions **x** et **z** sont principales ( $\sigma_x = \sigma_3$  ;  $\sigma_z = \sigma_1$  et  $\tau_{xz}=0$ )

**Propriétés du cercle :**

Le rayon du cercle est :  $R = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$

Le centre du cercle est :  $\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$

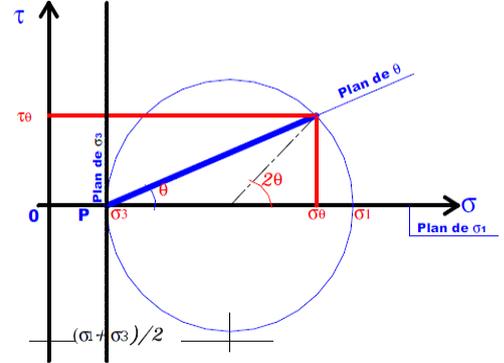
On l'appelle **contrainte moyenne**

Le diamètre du cercle :  $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_3$

On l'appelle **contrainte déviatorique** ou déviateur des contraintes

$\theta$  est l'angle de plan de rupture.

Figure 4-6 : Cercle de Mohr



Dans le plan ( $\sigma, \tau$ ) la limite du domaine élastique peut être représentée par une courbe appelée «courbe intrinsèque» ou enveloppe de rupture de Mohr. C'est l'enveloppe des cercles de Mohr correspondant à la rupture

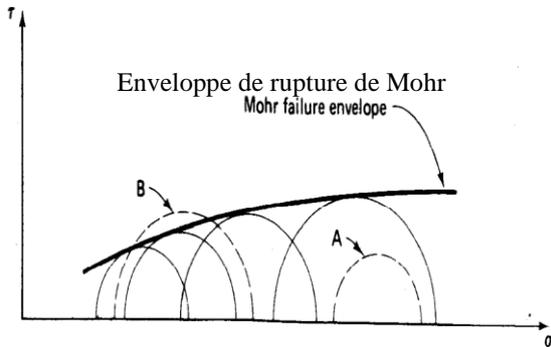


Figure 4-7: Courbe intrinsèque

Remarque :

- Tout cercle de Mohr se trouvant sous l'enveloppe de rupture (cercle A) représente des conditions stables (avant la rupture) ;
- La rupture ne se produit que lorsque le cercle est tangent à l'enveloppe ;
- Il ne peut y avoir de cercle au-dessus de l'enveloppe (cercle B).

**4-3 Critère de rupture de Mohr-Coulomb**

En géotechnique, on s'intéresse d'avantage à la résistance au cisaillement, car dans la majorité des situations, la rupture dans le sol est produite par l'application des contraintes de cisaillement excessives.

Mohr a émis l'hypothèse que la contrainte de cisaillement à la rupture sur le plan de rupture est fonction unique de la contrainte normale sur ce plan

$$\tau_r = f(\sigma_r)$$

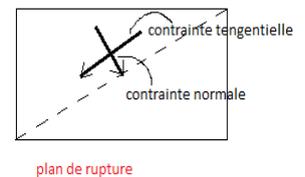
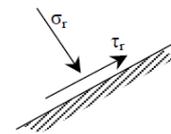


Figure 4.8: Plan de rupture

Après des essais pour mesurer la résistance au cisaillement des sols,

Coulomb a constaté que ce dernier est fonction de deux paramètres dépendant où pas des contraintes :

$\phi$  l'angle de frottement interne et  $c$  la cohésion intrinsèque, d'où l'équation de Coulomb :

$$\tau = \sigma \tan \phi + c$$

Où  $c$  et  $\phi$  sont des propriétés mécaniques du matériau ou appelés aussi les paramètres de la résistance au cisaillement.

Pour les sols secs ou saturés, le critère Mohr-Coulomb de rupture est le plus utilisé dans les projets. Il définit une relation linéaire entre les composantes  $\tau$  et  $\sigma$  de la contrainte s'exerçant sur la facette de rupture au sein du matériau, telle que:

$c$  est **cohésion** ou représente la résistance par adhérence des grains.

Un matériau pulvérulent, tel que les sables propres et secs et les graviers, n'a pas de cohésion ( $C=0$ ).

$\varphi$ : l'**angle de frottement interne** entre les grains caractérise la résistance par frottement entre grains. Pour les argiles saturées en comportement non drainé est pratiquement nul ( $\varphi_u=0$ ).

Le critère de Mohr-Coulomb à la rupture représente le couplage des relations:  $\tau_r = \sigma_r \operatorname{tg} \varphi + c$

Le comportement mécanique des sols est lié à la variation des contraintes effectives et non à celle des contraintes totales.

$$\tau'_r = \sigma'_r \operatorname{tg} \varphi' + c'$$

ou  $\sigma' = \sigma - u$  et  $\tau' = \tau$

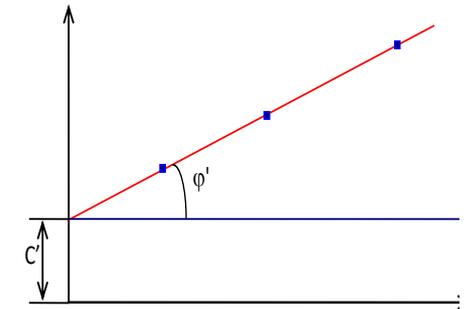


Figure 4-9 : Diagramme Mohr-Coulomb ou Courbe intrinsèque

C'est le seul critère qui permet de prédire les contraintes à la rupture, sur le plan de rupture. Ainsi qu'il est très utile dans l'analyse de la stabilité des fondations et des pentes de talus.

On peut formuler le critère de Mohr-Coulomb en fonction des contraintes principales on se référant à la figure suivante :

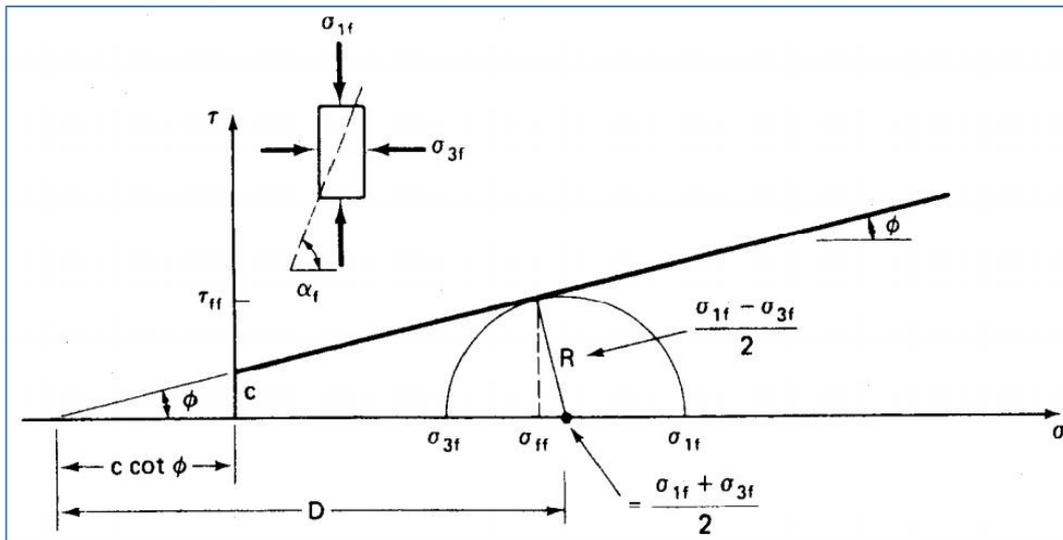


Figure 4-10 : Courbe intrinsèque

$R = D \cdot \sin \varphi$  : Cette condition est connue sous la condition de Coulomb, soit donc :

$$\sin \varphi = \frac{R}{D} = \frac{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}}{\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + c \cot \varphi} \Rightarrow \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_1 + \sigma_3 \sin \varphi + 2c$$

$$\sigma_1 = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \cdot \sigma_3 + \frac{2 \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} c \Leftrightarrow \sigma_1 = \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sigma_3 + 2 \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \cdot c$$

$$\sigma_3 = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \cdot \sigma_1 - \frac{2 \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} c \Leftrightarrow \sigma_3 = \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sigma_1 + 2 \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot c$$

**C'est les critères de rupture de Mohr- Coulomb pour sol cohérent**

Pour le sol pulvérulent ( $c=0$ ), on peut écrire :  $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_1 + \sigma_3 \sin \varphi \Rightarrow \sin \varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}$

En réarrangeant les termes, on obtient :  $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \Rightarrow \sigma_1 = \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sigma_3$

et de même on a :  $\frac{\sigma_3}{\sigma_1} = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \Rightarrow \sigma_3 = \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sigma_1$

Ces dernières équations sont très utiles dans les analyses de poussée-butée.

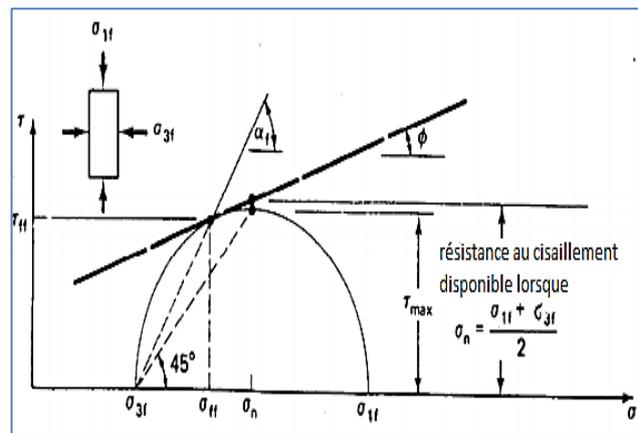
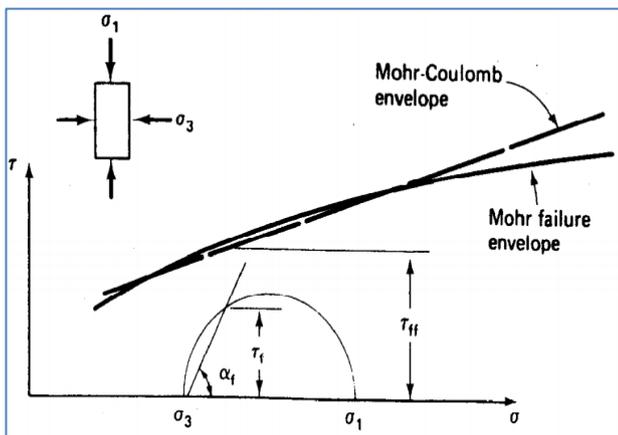
### Angle du plan de rupture

Connaissant ou ayant déterminé angle de frottement interne, on peut calculer l'angle du plan de rupture :

$$\alpha_r = 45^\circ + \frac{\varphi}{2}$$

### Facteur de sécurité

Soit un élément de sol soumis à un état de contraintes principales inférieures aux contraintes nécessaires pour déterminer la rupture :



Le facteur de sécurité est donné par :  $F.S. = \frac{\tau_{ff}}{\tau_f}$

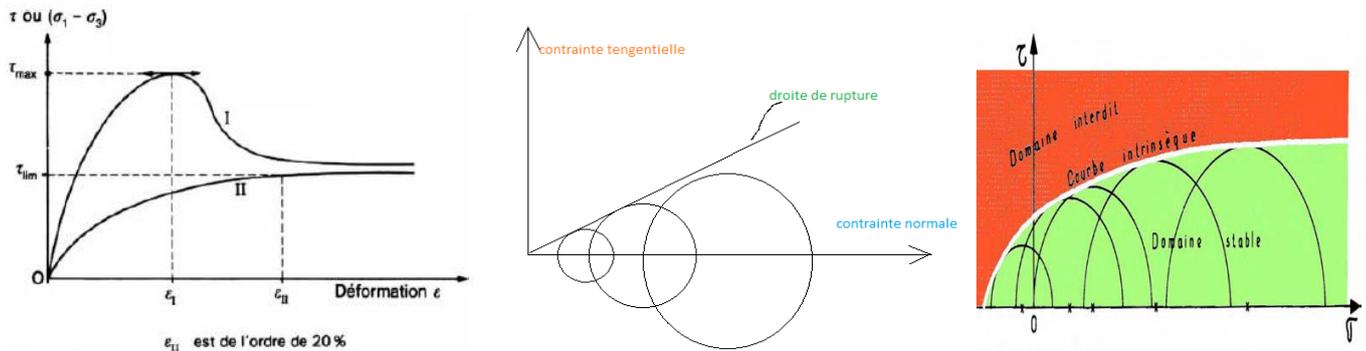
- $\tau_{ff}$  : contrainte de cisaillement à la rupture (disponible)  $\tau_{ff} = c + \sigma_n \tan \varphi$  ;
- $\tau_f$  : résistance au cisaillement mobilisée sur le plan de rupture (appliquée) ;  $\tau_f = \sin 2\alpha (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ .

On remarque toutefois que :  $\tau_{ff} < \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$

La rupture ne se produit pas sur le plan incliné à  $45^\circ$ , parce que la résistance disponible sur ce plan est plus grande que  $\tau_{\max}$ .

#### 4-4 Détermination des caractéristiques mécaniques de cisaillement au laboratoire :

Expérimentalement, la relation entre les contraintes tangentielle et normale à la rupture peut être représentée par une courbe non linéaire qui est la **courbe intrinsèque**. Pour un sol donné, l'identification de cette courbe se fait par une série d'essais au laboratoire (essai de cisaillement direct ou Triaxial) ou in-situ (pressiomètre, sissiomètre...).



**Figure 4.11 : a)** Contrainte- Déformation

**b)** Essai de cisaillement direct

**c)** Essai triaxial

En pratique, la rupture d'une éprouvette de sol s'apprécie d'après les déformations du sol, on trace en cours d'essai la courbe représentant la variation de la déformation du sol en fonction de la sollicitation qui l'a produite. Ces courbes ont, suivant la nature et l'état du sol, l'une des deux allures représentées sur la figure 4-11(a) :

- **La courbe aI:** présente un maximum ou pic de résistance. On admet que ce maximum  $\tau_{\max}$  correspond à l'état de rupture, la déformation continue de croître au-delà de  $\epsilon_I$  alors que la sollicitation appliquée diminue ou reste constante. Cas des sables denses et les argiles à structure intacte lorsqu'elles sont surconsolidées.
- **La courbe aII:** a une allure asymptotique ou on définit arbitrairement la rupture à une valeur maximale de la déformation ( $\tau_{\lim}$  correspondant à  $\epsilon_{II}$ ), au-delà de laquelle le comportement de l'ouvrage est incompatible avec sa destination. Cas des sables lâches et les argiles remaniées.

Les caractéristiques de cisaillement ( $c$  et  $\phi$ ) des sols sont déterminées en laboratoire sur des éprouvettes prélevées dans des carottes de sol. La réalisation des essais nécessite deux phases :

**Phase 1 :** Remise sous l'état de contraintes en places (saturation et application de contraintes jusqu'à pression interstitielle nulle  $u=0$ ).

**Phase 2 :** Cisaillement proprement dit.

Selon le drainage pendant l'une ou l'autre de ces deux phases, on distingue trois types d'essais :

- Essai non consolidé non drainé (**UU**) ;
- Essai consolidé non drainé (**CU**) ;
- Essai consolidé drainé (**CD**).

Pour déterminer les caractéristiques de cisaillement, deux types d'appareils sont couramment utilisés :

- l'appareil de cisaillement direct ou appareil de Casagrande ;
- l'appareil triaxial.

### 4-4-1 Essai de cisaillement direct

L'essai consiste à soumettre le sol à un cisaillement direct, rectiligne, suivant un plan imposé. L'échantillon de sols, de forme carrée, est placé entre 2 demi-boîtes mobiles qui peuvent glisser l'une par rapport à l'autre.



Figure 4-12: Appareil de cisaillement rectiligne

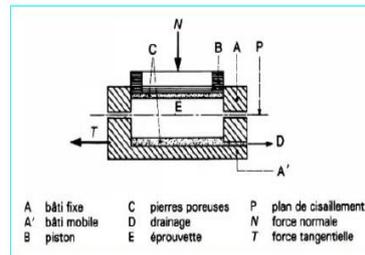
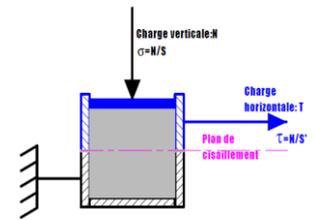
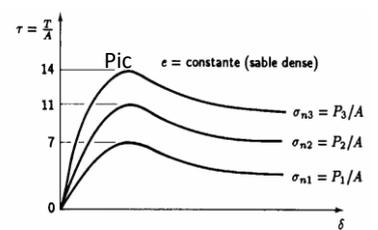


Figure 11 - Boîte de cisaillement



Boîte de Casagrand

On applique une contrainte normale ( $\sigma = P/A$ ) à l'échantillon de sol maintenu en conditions drainées, puis le soumettre à un cisaillement horizontal  $T$  ( $\tau = T/A$ ) jusqu'à la rupture tout en mesurant le déplacement horizontal de la demi boîte, ( $A$ :section horizontale de la boîte de cisaillement) et la courbe effort déformation ( $\epsilon, \tau$ ) peut être tracée.



Courbe contrainte- déformation

Trois échantillons identiques doivent être testés, pour trois contraintes normales différentes :

- \* Pour un sol pulvérulent : **100 - 200 - 300 kPa**.
- \* Pour un sol cohérent :
  - essai non consolidé, non drainé : **50 - 100 - 200 - 300 kPa**
  - essai consolidé, drainé ou non : appliquer les mêmes pressions que pour la consolidation de l'éprouvette.

Les valeurs des contraintes de cisaillement à la rupture sont représentées en fonction des contraintes normales

$$\tau = f(\sigma)$$

La courbe intrinsèque s'obtient directement en reportant les couples ( $\sigma, \tau$ ).

Cet essai s'interprète en considérant que la courbe intrinsèque est une droite (droite de Coulomb),

Ce n'est autre que la traduction graphique de l'équation de Coulomb :

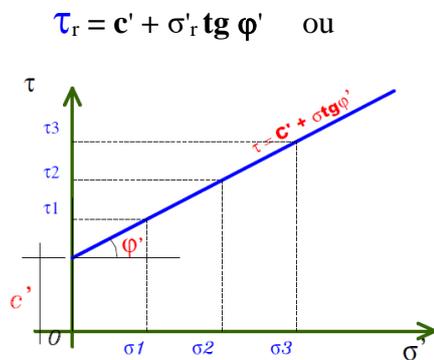


Figure 4-13 : Courbe intrinsèque

$\tau_r$  : contrainte tangentielle à la rupture

$\sigma'$  : contrainte normale

$c'$  : cohésion

$\phi'$  : angle de frottement interne

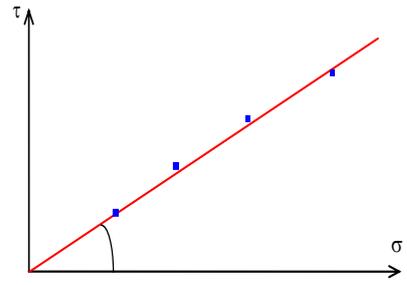
C'est la loi de MORH-COULOMB. Cette loi traduit clairement l'importance de l'état de contrainte dans le phénomène de rupture. Pour chaque contrainte  $\sigma$ , il y a une résistance au cisaillement.

L'angle que fait la droite de Coulomb avec l'axe des contraintes ( $\sigma$ ) étant l'angle de frottement interne du sol (l'angle  $\phi$ ),  $c'$  est le frottement entre les grains et la cohésion est la contrainte de cisaillement quand la contrainte normale  $\sigma$  égale à zéro.

**Pour les sols pulvérulents** (sables et graviers), la courbe intrinsèque dans le plan de Mohr peut être assimilée à une droite passant par l'origine. Le début de domaine de la plasticité est atteint lorsque :

$$\tau_r = \sigma_r \cdot \tan \varphi$$

Pour un sol fin normalement consolidé lui aussi sa cohésion est nulle.



L'essai de cisaillement direct à la boîte a pour avantage d'être économique, rapide et simple en particulier avec les matériaux granulaires, cependant il présente certains inconvénients :

- le plan de cisaillement est imposé (horizontale) et on ne peut s'assurer que cette direction correspond au plan le plus faible ou à la direction critique sur le terrain ;
- L'essai de cisaillement direct ne permet pas d'obtenir directement les contraintes principales qui peuvent cependant être déduites de l'enveloppe de rupture de Mohr-Coulomb.
- Dans l'essai les conditions de drainage ne sont pas maîtrisées, elles dépendent de la perméabilité du sol et de la vitesse d'essai.

Sols pulvérulents- drainage rapide - contraintes appliquées → contraintes effectives

Sols fins : - cisaillement rapide → contraintes totales et comportement à court terme

- cisaillement lent (µm/min) → contraintes effectives et comportement à long terme

### 4-4-2 Essai au triaxial

L'essai est réalisé sur des éprouvettes cylindriques élancées de sol. L'éprouvette est placée dans une cellule cylindrique remplie d'eau entre deux pierres poreuses

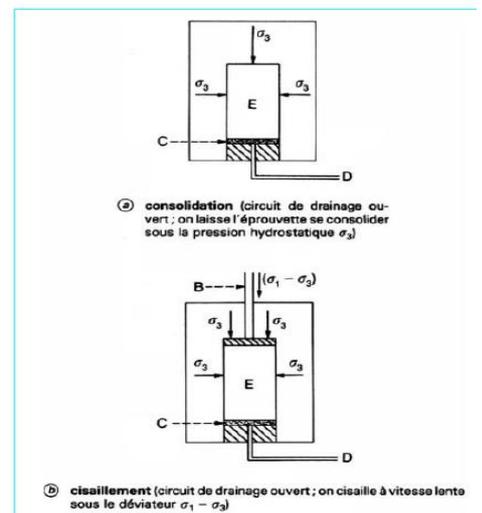
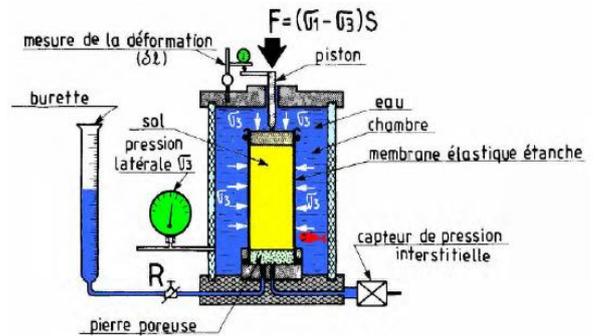
afin d'assurer le drainage en cours d'essai (fig.4-15). L'échantillon est recouvert d'une membrane élastique pour empêcher que l'eau contenu dans la cellule ne pénètre dans le matériau étudié.

Le dispositif d'essai permet de mettre cette eau en pression et ainsi d'appliquer à l'éprouvette une contrainte isotrope  $\sigma_3$  ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ )(a).

Par ailleurs, l'éprouvette peut être comprimée verticalement à l'aide d'un piston (Soit F la force appliquée).

La déformation verticale correspondante  $\delta l$  est mesurée à l'aide d'un capteur de déplacement. Durant cet essai on peut contrôler le drainage de l'échantillon et il peut être également possible de contrôler le cheminement des contraintes ; on suppose que les contraintes appliquées aux extrémités de l'échantillon sont les contraintes principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_3$  sont respectivement la contrainte verticale et horizontale.

L'essai consiste à faire augmenter le déviateur de contrainte ( $\Delta\sigma = F/S$ ) en enfonçant le piston à vitesse constante tout en maintenant la pression  $\sigma_3$  constante(b). S est la section droite de l'éprouvette à l'instant considéré. La rupture se produit par cisaillement, on peut alors trace la courbe « déviateur ( $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_3$ ) – déformation axiale  $\epsilon_1$  », sur laquelle on définit la valeur du déviateur correspondant à la rupture (pic) ou à l'état limite. Au moment de la rupture, le déviateur maximal des contraintes  $\Delta\sigma$  correspondant au cercle de Mohr tangent à la courbe intrinsèque est connu ( $\sigma_3$  et  $\sigma_1 = \sigma_3 + \Delta\sigma$ ).



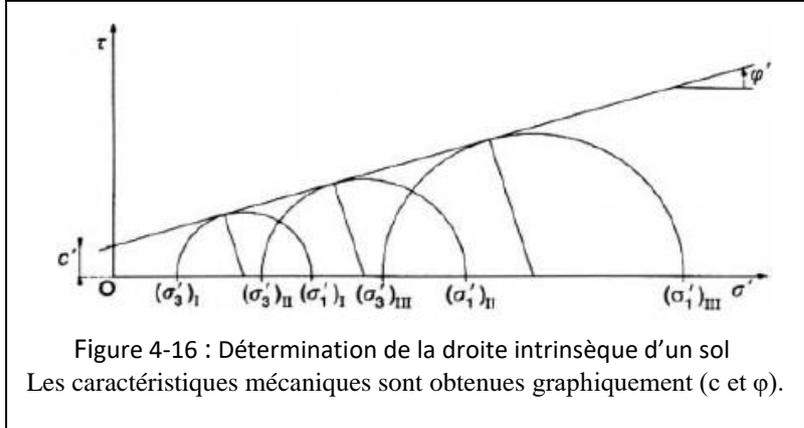
**Représentation de Mohr. Courbe intrinsèque**

En répétant l'essai pour différentes valeurs de  $\sigma_3$ , plusieurs cercles de Mohr peuvent être déterminés en fonction de  $(\sigma_1 = \sigma_3 + \Delta\sigma)$ . On définit alors le critère d'écoulement appelé courbe intrinsèque, comme l'enveloppe de ces cercles (figure 4-16), C'est la tangente des cercle des de Mohr.

La cohésion ( $c$ ) et l'angle de frottement( $\phi$ ) sont déterminés graphiquement ainsi que les contraintes normale et tangentielle ( $\sigma, \tau$ ) à la rupture qui sont les coordonnées des points tangents de la courbe et des cercles de Mohr. Cette propriété explique pourquoi l'on peut utiliser les essais triaxiaux pour analyser le frottement sur des surfaces de rupture.

$$\tau = c' + \sigma' \tan \phi'$$

$$\sigma'_1 = 2 c' \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2} \right) + \sigma'_3 \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2} \right)$$

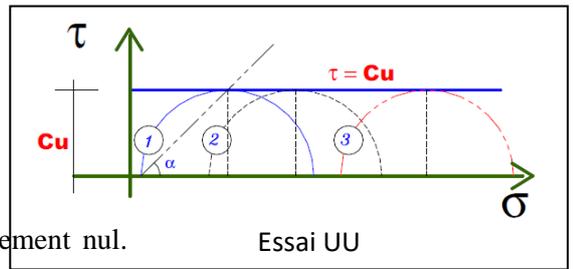


**4-5 Types d'essais**

On distingue les principaux types d'essais suivants :

**- Essais non consolidés-non drainés (UU) :**

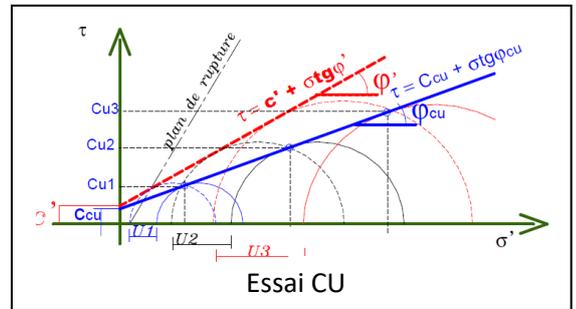
l'essai est effectuée à drainage fermé pour la consolidation et le cisaillement. Cet **essai rapide** correspond au comportement à **court terme**. Il est interprété en contraintes totales et permet d'estimer  $c_u$ , cohésion non drainée. L'angle de frottement est généralement nul.



L'orientation du plan de rupture :  $\alpha = \pi/4$  et  $\tau = C_u = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$

**- Essais consolidés-non drainés (CU) :**

au cours de l'étape de consolidation, le drainage est ouvert et l'on attend que les contraintes effectives deviennent égales aux contraintes totales appliquées (surpressions interstitielles nulles). Au cours de l'étape de cisaillement, le drainage est fermé et l'on peut mesurer la pression interstitielle pendant le chargement jusqu'à la rupture (on parle alors d'essais CU avec mesure de  $u$ ).



La représentation des résultats peut se faire en contraintes totales ( $C_{cu}, \phi_{cu}$ ) et  $\tau = C_{cu} + \sigma' \cdot \tan \phi_{cu}$  et en contraintes effectives ( $c'$  et  $\phi'$ ) ou  $\tau = c' + \sigma' \cdot \tan \phi'$ .

L'orientation du plan de rupture :  $\alpha = \pi/4 + \phi'/2$

**- Essais consolidés-drainés (CD) :**

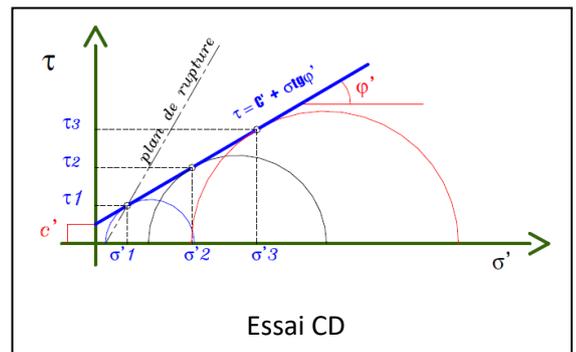
La première étape est identique à celle des essais CU. Le cisaillement est exécuté en condition de drainage ouvert, en augmentant la charge suffisamment lentement pour que la surpression interstitielle reste négligeable tout au long de l'essai. (essai lent qui correspond au comportement à *long terme* du sol).

Donc à tout instant  $u = 0$ .

La courbe intrinsèque est une droite d'équation  $\tau = c' + \sigma' \cdot \tan \phi'$  où

$\phi'$  : angle de frottement effectif, et  $c'$  : cohésion drainée, sont les caractéristiques intergranulaires du sol.

Orientation du plan de rupture :  $\alpha = \pi/4 + \phi'/2$



Suivant la perméabilité du sol, les phases de consolidation et de cisaillement peuvent être rapides (de l'ordre de quelques minutes à une heure pour les essais sur les sols pulvérulents et pour les essais non consolidés-non drainés sur sols fins) ou beaucoup plus lentes (de l'ordre du mois pour les essais drainés sur les argiles peu perméables).

#### 4-6 Choix des paramètres

Le choix du mode de représentation de la résistance au cisaillement en vue des calculs est une étape essentielle dans l'analyse du comportement des sols, il faut distinguer deux cas :

- Pour **les sols pulvérulents**, la résistance au cisaillement est toujours analysée en contraintes effectives. La grande perméabilité de ces sols rend pratiquement instantanée la dissipation des surpressions interstitielles créées par le chargement, de sorte que l'on n'est jamais dans les conditions dites « non drainées ». La résistance au cisaillement est décrite par l'équation :

$$\tau = c' + \sigma' \tan \phi' \quad \text{avec}$$

$c'$  cohésion effective,

$\phi'$  angle de frottement interne,

$\sigma' = \sigma - u$  contrainte normale effective,

$u$  pression interstitielle.

- Pour **les sols fins cohésifs saturés**, on distingue les états dits non drainés (de court terme) et drainés (de long terme). La résistance au cisaillement du sol est définie dans les deux cas par l'état des contraintes effectives, c'est-à-dire par une équation de même forme que pour les sols pulvérulents :

$$\tau = c' + \sigma' \tan \phi'$$

Cette équation est utilisée chaque fois que l'on connaît la distribution des contraintes effectives dans le massif de sol.

En cas de chargement rapide (par référence à la vitesse de consolidation du massif de sol) et d'absence de drainage, on peut caractériser la résistance au cisaillement en contraintes totales au moyen de la cohésion non drainée  $c_u$  :

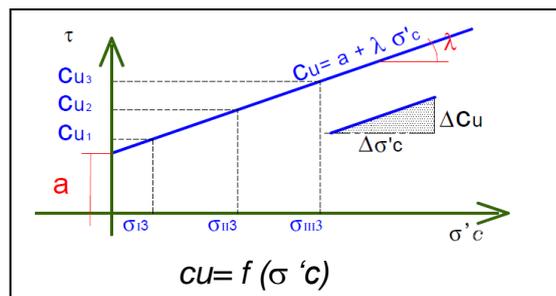
$$\tau = c_u \quad (\text{essai UU})$$

Cette possibilité est très utile car elle permet de faire certains calculs en contraintes totales, sans avoir à se préoccuper de la prévision, toujours difficile, des surpressions interstitielles.

La cohésion non drainée est associée à un état donné du sol. Si cet état change, par exemple du fait de la consolidation du sol au cours du temps, la cohésion non drainée est modifiée. Pour certains problèmes, il est donc important de caractériser les variations de  $c_u$  avec l'état de contraintes effectives du sol au début du cisaillement. C'est ce que traduit le paramètre  $\lambda_{cu}$  déterminé dans les essais de type CU à l'appareil triaxial :

$$\Delta u = \lambda_{cu} \Delta \sigma'_3$$

que l'on utilise en assimilant la contrainte isotrope  $\sigma'_3$  appliquée dans l'essai triaxial à la pression de préconsolidation du sol en place  $\sigma'_p$ .



**TD 4**

**Exercice 1:**

Soit les contraintes exercées sur l'élément ci-contre.

1/ Calculer la contrainte normale  $\sigma$  et tangentielle  $\tau$  sur un plan incliné à  $\alpha=35^\circ$  par rapport à l'horizontale.

2/ on fait subir à l'élément une rotation  $\beta$  par rapport à l'horizontale.

Trouver les contraintes  $\sigma$  et  $\tau$  sur le plan incliné de  $\alpha$  par rapport à la base de l'élément( graphiquement).

3/ Déterminer la contrainte de cisaillement maximale  $\tau_{max}$

On donne :  $\sigma_A = 52 \text{ kPa}$ ,  $\sigma_B = 12 \text{ kPa}$ ,  $\alpha = 35^\circ$  et  $\beta = 20^\circ$ .

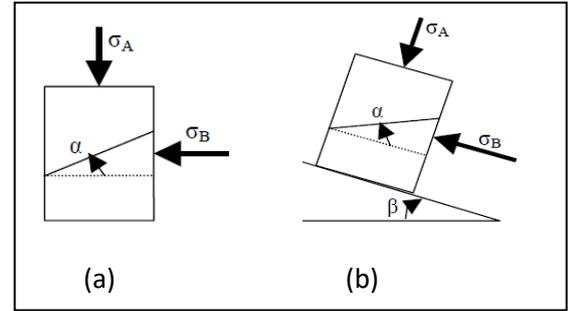
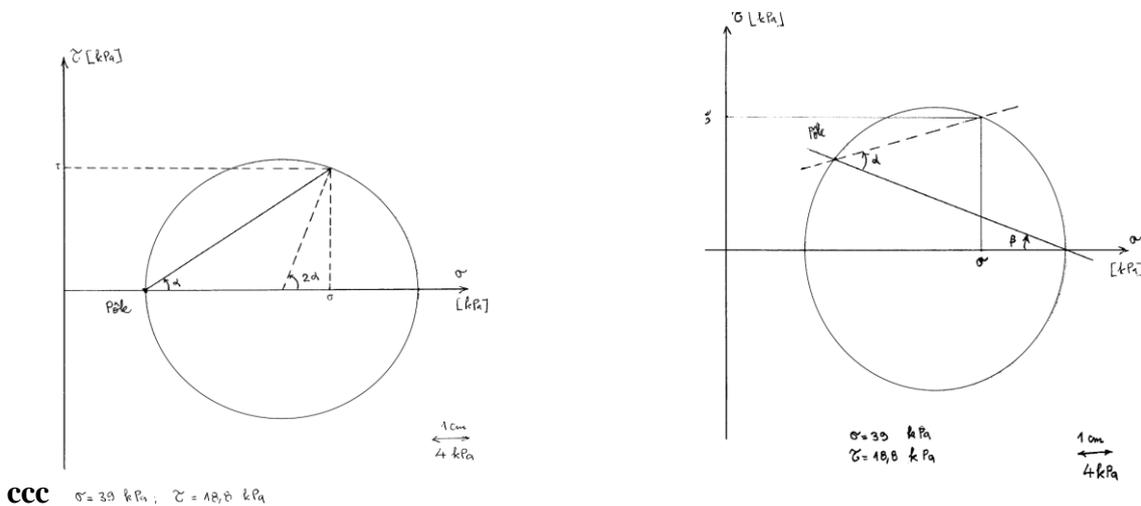


Figure 1

Les exercices1 relatifs au cercle de Mohr ont l'avantage de se résoudre rapidement grâce à la construction graphique. C'est ce que nous allons considérer dans cet exercice et les exercices suivants. Connaissant les contraintes principales, on procède dans le présent exercice à la construction directe du cercle de Mohr, par suite on répond à la question.



1)  $\tau = \sin 2\alpha \cdot (\sigma_1 - \sigma_3) / 2 = \sin 70^\circ \cdot (52 - 12) / 2 = 18,8 \text{ kPa}$

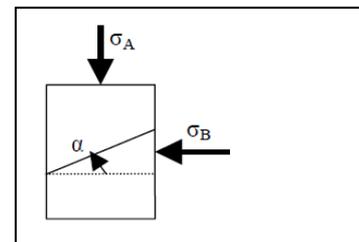
$\sigma = (\sigma_1 + \sigma_3) / 2 + \cos 2\alpha (\sigma_1 - \sigma_3) / 2 = (52 + 12) / 2 + \cos 70^\circ (52 - 12) / 2 = 38,8 \text{ kPa}$

3)  $\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2 = (52 - 12) / 2 = 20 \text{ kPa}$

**Exercice 2 :**

Pour l'élément montré à la figure ou  $\sigma_1 = \sigma_A = 52 \text{ kPa}$  et  $\sigma_3 = \sigma_B = 12 \text{ kPa}$  et si  $c = 10 \text{ kPa}$  et  $\phi = 36^\circ$

- a) Déterminer la contrainte de cisaillement mobilisée;
- b) Déterminer la contrainte de cisaillement disponible;
- c) Quel est le facteur de sécurité ?
- d) Pour quelle valeur de  $\sigma_1$  F.S. = 1?



**Solution**

a)  $\alpha = 45 + \phi / 2 = 45 + 36 = 63^\circ$

$\tau = \sin 2\alpha (\sigma_1 - \sigma_3) / 2 = \sin 126^\circ (52 - 12) / 2 = 16,2 \text{ kPa}$

b)  $\sigma_n = (\sigma_1 + \sigma_3) / 2 + \cos 2\alpha \cdot (\sigma_1 - \sigma_3) / 2$

$= (52 + 12) / 2 + \cos 126^\circ (52 - 12) / 2 = 20,24 \text{ kPa}$

$$\tau_{ff} = c + \sigma_n \tan\varphi = 10 + 20,24 \tan(36^\circ) = 24,7 \text{ kPa}$$

$$c) F.S = \tau / \tau_{ff} = 24,7 / 16,2 = 1,52$$

$$d) F.S = 1 \rightarrow \tau = \tau_{ff} \rightarrow \sin 2\alpha (\sigma_1 - \sigma_3) / 2 = c + [(\sigma_1 + \sigma_3) / 2 + \cos 2\alpha_\varphi (\sigma_1 - \sigma_3) / 2] \tan\varphi$$

$$\rightarrow \sigma_1 = \sigma_3 \tan^2(45^\circ + \varphi / 2) + 2c \tan(45^\circ + \varphi / 2) = 12 \tan^2(63^\circ) + 20 \tan(63^\circ) = 85,5 \text{ kPa}$$

### Exercice 3:

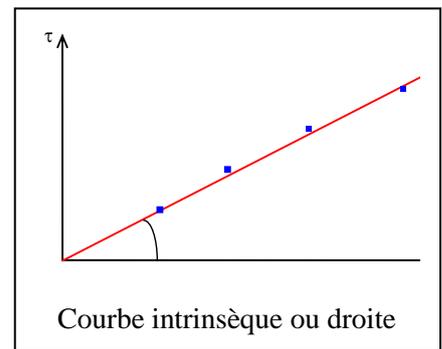
Un essai de cisaillement direct est effectué sur un échantillon de sable sec avec une contrainte normale de 140 kN/m<sup>2</sup>. La rupture est produite à une contrainte de cisaillement de 94,5 kN/m<sup>2</sup>. Les dimensions de l'échantillon sont de 50 mm x 50 mm x 25 mm (épaisseur).

Déterminer l'angle de friction,  $\varphi$ . Pour une contrainte normale de 84 kN/m<sup>2</sup>, quelle est la force de cisaillement requise pour cisailer l'échantillon.

### Solution :

Expérimentalement, Coulomb a été montré que la courbe intrinsèque d'un sol :

- deux demi-droites symétriques par rapport à  $\sigma\sigma'$  la pente de la droite de Coulomb est angle de frottement interne ( $\phi$ ) pour :
- sols pulvérulents : les droites passent par l'origine (cohésion  $c=0$ ) .
- sols cohérents : existence d'une résistance au cisaillement sous contrainte normale nulle cohésion.



$$\tau_r = c + \sigma' \tan\varphi$$

$$\text{sable} \rightarrow c=0$$

$$\tan\varphi = \tau_r / \sigma' = 94,5 / 140 = 0,675$$

$$\varphi = \tan^{-1}(0,675) = 34^\circ$$

$$\tau_r = \sigma' \tan\varphi$$

$$\tau_r = 84 \times \tan(34^\circ) = 56,7 \text{ kPa}$$

$$F_c = \tau_r \times S = 56,7 \times (0,0025) \times 103 = 141,75 \text{ N}$$

### Exercice 5 :

Dans un essai au triaxial sur un échantillon de sable compacte on trouve que l'angle de frottement interne  $\varphi$  est de 36°.

- 1- Etablir le critère de rupture (la relation qui lie les contraintes principales ( $\sigma_1, \sigma_3$ ), la cohésion ( $c$ ) et l'angle de frottement interne ( $\varphi$ )).
- 2- Calculer la contrainte principale majeure si la pression Latérale est de 220KPa.
- 3- Tracer le cercle de Mohr correspondant en mentionnant les différents paramètres. En déduire la contrainte de cisaillement et la contrainte normale à la rupture (graphiquement)
- 4- Déterminer l'angle d'inclinaison du plan de rupture  $\alpha$  .

### Solution :

1-Courbe intrinsèque d'un sol cohérent ( $c \neq 0$  et  $\phi \neq 0$ ) avec 2 cercles de Mohr

C1 en équilibre limite élastique

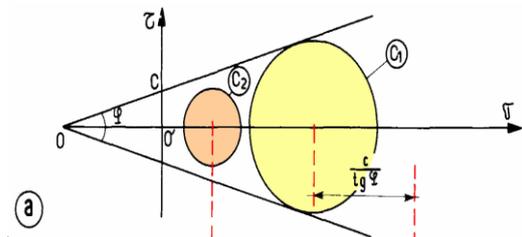
C2 en équilibre surabondant (cercle pas en contact avec la C1)

Le critère de rupture :

$$\sigma_{1f} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \cdot \sigma_{3f} + \frac{2 \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} c \Leftrightarrow \sigma_{1f} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sigma_{3f} + 2 \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot c$$

2) Pour le sable  $c=0$ ,  $\varphi=36^\circ$  et  $\sigma_3=220 \text{ KPa}$

$$\sigma_1 = \sigma_3 \tan^2(45^\circ + \varphi / 2) + 2c \cdot \tan(45^\circ + \varphi / 2) = 220 \tan^2(45^\circ + 36 / 2) = 847,4 \text{ KPa}$$



3) On doit tracer le cercle et en déduire :

Par calcul on trouve

$$\tau = \sin 2\alpha \cdot (\sigma_1 - \sigma_3) / 2 = \sin 2 \cdot 63^\circ \cdot (847,4 - 220) / 2 = 253,8 \text{ kPa}$$

$$\sigma = (\sigma_1 + \sigma_3) / 2 + \cos 2\alpha (\sigma_1 - \sigma_3) / 2 = (847,4 + 220) / 2 + \cos 126 \cdot (313,7) = 349,3 \text{ kPa}$$

4) L'angle d'inclinaison du plan de rupture :

$$\alpha = 45^\circ + \varphi / 2 = 45^\circ + 36 / 2 = 63^\circ$$

### Exercice 6 :

Un essai de cisaillement consolidé non-drainé est effectué sur un échantillon d'argile normalement consolidé permet d'avoir les résultats suivants :  $\sigma_3 = 84 \text{ kPa}$ ; contrainte du déviateur finale  $(\Delta\sigma)_f = 63,7 \text{ kPa}$  et pression finale  $(\Delta u_d)_f = 47,6 \text{ kPa}$

a) Déterminer l'angle de friction total  $\varphi_{cu}$  et l'angle de friction drainé  $\varphi$ ;

b) Déterminer la résistance au cisaillement.

### Solution :

a)  $\sigma_1 = \sigma_3 + (\Delta\sigma) = 84 + 63,7 = 147,7$

$$\sigma_1 = \sigma_3 \tan^2(45^\circ + \varphi / 2) + 2c \tan(45^\circ + \varphi / 2) = \sigma_3 \tan^2(45^\circ + \varphi_{cu} / 2)$$

$$45^\circ + \varphi_{cu} / 2 = \tan^{-1} (\sigma_1 / \sigma_3) 0,5 = \tan^{-1} (147,7 / 84) 0,5 = 52,9^\circ$$

$$\varphi_{cu} = 16^\circ$$

$$\sigma'_1 = \sigma_1 - (\Delta u_d) = 147,7 - 47,6 = 100,1 ; \quad \sigma'_3 = \sigma_3 - (\Delta u_d) = 84 - 47,6 = 36,4$$

$$\sigma_1 = \sigma_3 \tan^2(45^\circ + \varphi / 2) + 2c \tan(45^\circ + \varphi / 2) = \sigma_3 \tan^2(45^\circ + \varphi / 2)$$

$$45^\circ + \varphi / 2 = \tan^{-1} (\sigma_1 / \sigma_3) 0,5 = \tan^{-1} (100,1 / 36,4) 0,5 = 58,9^\circ$$

$$\varphi_{cu} = 27,8^\circ$$

### Exercices:

1) On effectue un essai triaxial CD sur un sol granulaire. A la rupture,  $\sigma'_1 / \sigma'_3 = 4$ . La contrainte effective mineure à la rupture est de 100 kPa.

1. Calculer l'angle de frottement  $\varphi'$ .
2. Quelle est la différence entre les contraintes principales à la rupture.
3. Mettre en graphique le cercle de Mohr et l'enveloppe de rupture

2) Un échantillon d'argile saturée normalement consolidée est consolidée, dans une cellule triaxiale sous une pression de confinement de 400 kPa. Lorsque la consolidation est achevée le circuit de drainage est fermé et tout en maintenant la pression de confinement constante le déviateur est appliqué progressivement jusqu'à la rupture.

- 1- De quel type d'essai s'agit-il ?
- 2- Calculer la valeur du déviateur de contrainte et Tracer le cercle de Mohr correspondant.
- 3- Déterminer l'inclinaison du plan de rupture.

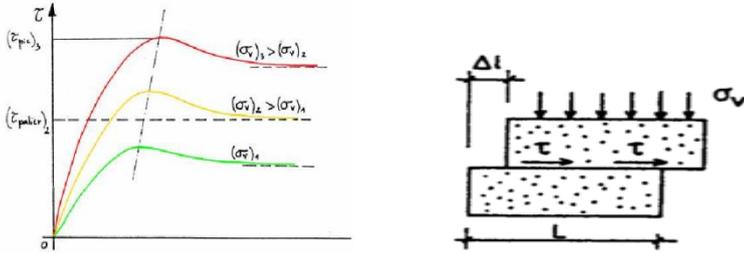
Les paramètres de la résistance au cisaillement sont :  $\varphi = 13^\circ$  et  $c = 0$

3) Dans un essai au triaxial sur un échantillon de sol on trouve que l'angle de frottement interne est de  $28^\circ$  et la cohésion est de 52 kPa.

- 1-Etablir la relation qui lie les contraintes principales, la cohésion et l'angle de frottement interne.
- 2-Pour quelle valeur de contrainte l'échantillon se rompra-t-il ? si la pression Latérale est de 280 kPa et tracer le cercle de Mohr correspondant en mentionnant les différents paramètres.
- 3-Déterminer l'inclinaison du plan de rupture.

**Annexe**

**Essai cisaillement direct (à la boîte de Casagrande)**



L : longueur (ou diamètre) de l'échantillon     $\Delta L$  : déplacement relatif horizontal  
Figure 3 – Courbes contrainte – déplacement

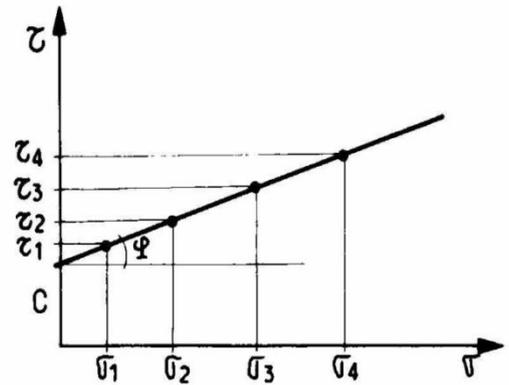


Figure 4 – Détermination de  $\phi$  et C

**Courbe effort-déformation. Résistance au cisaillement**

Les courbes « effort-déformation » ( $\tau$  en fonction de  $\epsilon$  dans les essais à la boîte ou  $(\sigma_1 - \sigma_3)$  en fonction de  $\epsilon$  dans les essais triaxiaux) ont de façon générale l'allure de l'une des courbes de la figure 8.

- Pour les sols compacts ou denses (indice des vides faible), la contrainte de cisaillement passe par un maximum, puis décroît vers une valeur sensiblement constante (courbe I). La valeur de ce maximum sert à définir la résistance au cisaillement, effort nécessaire pour désenchevêtrer les grains au voisinage du plan de cisaillement.

- Pour les sols peu compacts ou lâches (indice des vides  $e$  élevé), la contrainte de cisaillement croît régulièrement jusqu'à une valeur asymptotique (courbe II). On définit alors la rupture pour une valeur conventionnelle de la déformation,  $\epsilon_{max}$ , en pratique inférieure à 20 %.

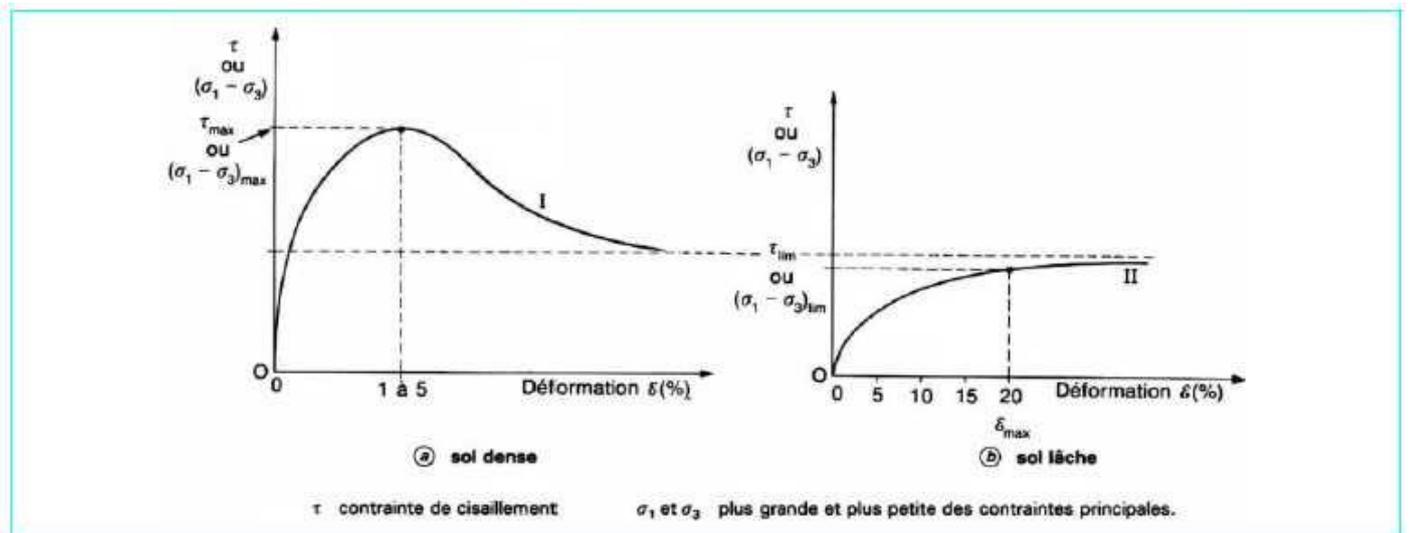


Figure 8 – Courbe « effort-déformation » d'un sol pulvérulent dans un essai de cisaillement

## Types d'essais

Les essais de cisaillement à l'appareil triaxial comportent deux étapes :

- une première étape de consolidation, au cours de laquelle on amène l'éprouvette dans l'état à partir duquel on veut exécuter le cisaillement ;
- une seconde étape, de cisaillement proprement dit, au cours de laquelle on augmente le déviateur des contraintes jusqu'à ce que la rupture de l'éprouvette se produise.

Différentes modalités d'essais peuvent être définies, selon que les phases successives de l'essai sont exécutées avec ou sans drainage.

On distingue les principaux types d'essais suivants :

- **Essais non consolidés-non drainés (UU)** : la première étape de l'essai est effectuée à drainage fermé, de même que le cisaillement ;
- **Essais consolidés-non drainés (CU)** : au cours de l'étape de consolidation, le drainage est ouvert et l'on attend que les contraintes effectives deviennent égales aux contraintes totales appliquées (surpressions interstitielles nulles). Au cours de l'étape de cisaillement, le drainage est fermé et l'on peut, si nécessaire, mesurer la pression interstitielle pendant le chargement jusqu'à la rupture (on parle alors d'essais CU avec mesure de  $u$ ) ;
- **Essais consolidés-drainés (CD)** : la première étape est identique à celle des essais CU. Le cisaillement est exécuté en condition de drainage ouvert, en augmentant la charge suffisamment lentement pour que la surpression interstitielle reste négligeable tout au long de l'essai.

Suivant la perméabilité du sol, les phases de consolidation et de cisaillement peuvent être rapides (de l'ordre de quelques minutes à une heure pour les essais sur les sols pulvérulents et pour les essais non consolidés-non drainés sur sols fins) ou beaucoup plus lentes (de l'ordre du mois pour les essais drainés sur les argiles peu perméables).

### 3. Résistance au cisaillement des sols pulvérulents

Dans le cas des sols pulvérulents, on s'intéresse essentiellement aux caractéristiques drainées. Les essais de cisaillement correspondants sont donc réalisés à drainage ouvert et à une vitesse appropriée, en relation avec la perméabilité du sol. Dans ces conditions, la surpression interstitielle reste toujours négligeable et les contraintes totales et effectives sont confondues. Dans la suite du paragraphe 3, on utilise ( $\sigma$ ,  $\tau$ ,  $c$ ,  $\phi$ ) pour décrire le comportement des sols pulvérulents.

Tableau 3 – Valeurs approchées de $\phi$ pour des sols pulvérulents suivant leur compacité, leur granularité, la dimension et l'angularité des grains			
Dimension des grains	Compacité	$\phi$ (degrés)	
		Grains arrondis Granulométrie uniforme	Grains anguleux bien gradués
Sable moyen	Très lâche	28 à 30	32 à 34
	Moyennement dense	32 à 34	36 à 40
	Très dense	35 à 38	44 à 46
Sable et gravier (1) : 65 % gravier 35 % sable	Lâche		39
	Moyennement dense	37	41
	Dense		45
	Lâche	34	
Roches fragmentées à l'explosif.....	.....	40 à 55	

(1) Valeurs déterminées par interpolation, à partir de travaux de Holtz et Gibbs.

<b>Tableau 5 - Valeurs typiques des caractéristiques de résistance au cisaillement des sols</b>			
Type de sol (provenance)	$c'$ (kPa)	$\varphi'$ (degré)	$\lambda_{cu}$
<b>Argiles et vases</b>			
<b>— normalement consolidées</b>			
(faiblement surconsolidées)			
Argile grise (Narbonne)	0	34	
Argile organique (Narbonne)	11	31	
Vase (Martrou)	13	26	
Argile organique (Lanester)	7	31	0,29
Argile organique (Cubzac)	10	29	0,35
Argile molle (Cran)	0	34	0,26
<b>— surconsolidées</b>			
Argile verte (Romainville)	19	20	
Argile du Toarcien (Ville au Val)	10	27	.....
Argile du Sparnacien (Provins)	16	14	
Argile des Flandres	24	22	
Argile de l'Oligocène (Sallèdes)	16	23	.....
Argile de l'Albien (Vallon des Bottentuits)	30	21	.....
<b>Marnes</b>			
Marne (Argenteuil)	75	30	
Marne (Clemont-Ferrand)	25	28	
<b>Limons</b>			
Limon (Orly)	0	39	
Limon (Orly)	40	25	
Limon (Jossigny)	12	32	
Limon fin (Plancoët)	0	34	
<b>Sables</b>			
Sable fin (Fontainebleau)	0	30 à 40	
Sable de Loire (Angers)	0	33	
Sable (Dunkerque)	0	42	
Sable (Asnières)	0	36	
Sable de Cuise (Oise)	0	35	
Sable lâche (Le Verdon)	0	32	
Sable coquillier (Le Verdon)	0	34	
Sable et galets (Le Verdon)	0	38	
Sable fin argileux (Le Verdon)	10	40	
Sable fin (Saint-Malo)	0	37	
Sable argileux (Narbonne)	0	39	
<b>Graviers</b>			
Ballast	0	45	
Grave non traitée 0/14	30	54	
<b>Tourbe</b>			
Tourbe (Montreuil-sur-Mer)	10	30	
Tourbe (Bourgoin)	5	39	
Tourbe (Caen)	.....	.....	0,36
Tourbe (Vallée de la Dives)	.....	.....	0,50