UNIVERSITÉ BATNA 2

FACULTÉ DE TECHNOLOGIE

DÉPARTEMENT S.C.S.T.

Mathématiques 2

Série N°1 de Travaux Dirigés

CORRECTION DES EXERCICES SUR LES MATRICES ET LES DÉTERMINANTS

Préparé par :

Ali BOUCHETOB

Année Universitaire : **2019/2020**

<u>Exercice 1</u> :

On obtient les résultats suivants :

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 4 \\ 17 & 3 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 9 & 31 \end{bmatrix}$$

Il est clair que AB ≠ BA : le produit matriciel **n'est pas**, en général, **commutatif**.

$$CD = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ -12 & -11 \\ 11 & 43 \end{bmatrix}$$

$$2A + B = 2\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A - 4B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -28 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -26 & -1 \end{bmatrix}$$

<u>Exercice 2</u> :

<u>1ère méthode</u> :

Soit u = (x, y, z) un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et A la **matrice associée** à l'application linéaire f. Alors on sait que :

f(u) = Au

Cette relation peut encore s'écrire :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \text{... (1)}$$

Or par définition, f(x, y, z) = (5x + y + 7z, –10y + 2z, 7x + y – 12z)

Réécrivons cette définition de f sous la forme suivante :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 5x + y + 7z \\ -10y + 2z \\ 7x + y - 12z \end{bmatrix}$$

ce qui peut s'écrire sous forme matricielle :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 0 & -10 & 2 \\ 7 & 1 & -12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \text{... (2)}$$

En comparant les égalités (1) et (2) on en déduit la **matrice associée** à f :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 0 & -10 & 2 \\ 7 & 1 & -12 \end{bmatrix}$$

2

<u>**$2^{ème}$ méthode**</u> :

Pour rappel, la **matrice d'une application linéaire** f dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées $f(e_i)_{\,i = 1, \dots, n}$ dans cette base $\mathcal{B}$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base **canonique** de $\mathbb{R}^3$ avec $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

Il faut exprimer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ en fonction de e_1, e_2 et e_3.

Par définition, $f(x, y, z) = (5x + y + 7z, -10y + 2z, 7x + y - 12z)$. Cela entraine alors :

$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (5, 0, 7) = 5(1, 0, 0) + 0(0, 1, 0) + 7(0, 0, 1) = 5e_1 + 7e_3$

$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (1, -10, 1) = 1(1, 0, 0) - 10(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1) = e_1 - 10e_2 + e_3$

$f(e_3) = f(0, 0, 1) = (7, 2, -12) = 7(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) - 12(0, 0, 1) = 7e_1 + 2e_2 - 12e_3$

Par conséquent, la **matrice associée** à f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ s'écrit :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 0 & -10 & 2 \\ 7 & 1 & -12 \end{bmatrix}$$

<u>**Exercice 3**</u> **:**

Pour rappel, les formules de développement du **déterminant** d'une matrice **carrée** $A = (a_{ij})$ d'ordre **n** sont :

- suivant **la ligne i** : $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, s_{ij}$

- suivant **la colonne j** : $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, s_{ij}$

La quantité s_{ij} est appelée **cofacteur** du coefficient a_{ij}, elle s'exprime par : $s_{ij} = (-1)^{i+j}\, m_{ij}$.

La quantité m_{ij} est appelée **mineur** du coefficient a_{ij}. C'est le déterminant de la matrice d'ordre $(n - 1)$ obtenue en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne dans la matrice A.

1) Calculons les **déterminants** des matrices A et B. Pour cela, utilisons la **méthode des cofacteurs**.

- Par rapport à la **$1^{ère}$ ligne**, le **déterminant** de A s'écrit :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}\, s_{1j} = a_{11}s_{11} + a_{12}s_{12} + a_{13}s_{13} = (0)s_{11} + (a)s_{12} + (b)s_{13}$$

Calculons ensuite les **cofacteurs** s_{12} et s_{13} :

$$s_{12} = (-1)^{1+2}\, m_{12} = -\begin{vmatrix} a & c \\ b & 0 \end{vmatrix} = -(0 - bc) = bc$$

$s_{13} = (-1)^{1+3}\, m_{13} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix} = ac - 0 = ac$

Ainsi, det(A) = abc + bac = 2abc

- Par rapport à la **1ère ligne**, le **déterminant** de B s'écrit :

$$\det(B) = \sum_{j=1}^{3} b_{1j}\, s_{1j} = b_{11}s_{11} + b_{12}s_{12} + b_{13}s_{13} = (a - b - c)s_{11} + (2a)s_{12} + (2a)s_{13}$$

Calculons ensuite les **cofacteurs** s_{11}, s_{12} et s_{13} :

$$s_{11} = (-1)^{1+1}\, m_{11} = \begin{vmatrix} b-c-a & 2b \\ 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (b - c - a)(c - a - b) - 4bc = a^2 - b^2 - c^2 - 2bc$$

$$s_{12} = (-1)^{1+2}\, m_{12} = -\begin{vmatrix} 2b & 2b \\ 2c & c-a-b \end{vmatrix} = -[2b(c - a - b) - 4bc] = 2b^2 + 2ab + 2bc$$

$$s_{13} = (-1)^{1+3}\, m_{13} = \begin{vmatrix} 2b & b-c-a \\ 2c & 2c \end{vmatrix} = 4bc - 2c(b - c - a) = 2c^2 + 2ac + 2bc$$

Il en résulte :

$\det(B) = (a - b - c)(a^2 - b^2 - c^2 - 2bc) + 2a(2b^2 + 2ab + 2bc) + 2a(2c^2 + 2ac + 2bc)$

Après développement et simplification, on obtient :

$\det(B) = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 6abc + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$

Notons que :

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 &= (a+b+c)(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2) \\ &= a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 6abc + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3\end{aligned}$$

Ainsi, $\det(B) = (a+b+c)^3$

2) Pour rappel, l'**inverse** de la matrice C se calcule en utilisant la formule :

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C}(\operatorname{com} C)^t$$

où $(\operatorname{com} C)^t$ est la **transposée** de la **comatrice** de C. Pour rappel, la comatrice de C est la matrice dont les coefficients sont les cofacteurs de C.

- Calculons d'abord le **déterminant** de C.

Pour cela, utilisons la **règle de Sarrus**. Rappelons que la **règle de Sarrus n'est valable que pour les déterminants d'ordre 3**, **et n'est absolument pas généralisable**. Elle consiste à écrire les trois colonnes du déterminant, puis à répéter les deux premières. On additionne, les produits obtenus en multipliant les éléments sur les diagonales, en attribuant le signe + pour les produits calculés selon la direction de la diagonale principale, et le signe – pour les autres.

Ainsi :

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

$$= (1)(0)(-1) + (1)(1)(1) + (0)(1)(-1) - (1)(0)(0) - (-1)(1)(1) - (-1)(1)(1)$$

$$= 0 + 1 - 0 - 0 + 1 + 1 = 3$$

- Calculons ensuite les **cofacteurs** des coefficients de C :

$$s_{11} = (-1)^{1+1}\, m_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1$$

$$s_{12} = (-1)^{1+2}\, m_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 1) = 2$$

$$s_{13} = (-1)^{1+3}\, m_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1$$

$$s_{21} = (-1)^{2+1}\, m_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 0) = 1$$

$$s_{22} = (-1)^{2+2}\, m_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1$$

$$s_{23} = (-1)^{2+3}\, m_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 1) = 2$$

$$s_{31} = (-1)^{3+1}\, m_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$$

$$s_{32} = (-1)^{3+2}\, m_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 0) = -1$$

$$s_{33} = (-1)^{3+3}\, m_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$$

Ainsi, la **comatrice** de C s'écrit :

$$\operatorname{com} C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Sa **transposée** est obtenue en échangeant les lignes et les colonnes :

$$(\text{com } C)^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, l'**inverse** de la matrice C s'écrit :

$$C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

On vérifiera aisément que $CC^{-1} = C^{-1}C = I$.

<u>Exercice 4</u> :

1) Pour montrer que f est une **application linéaire**, il suffit de montrer que :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^3,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v)$$

Soit $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Il s'ensuit :

$$f(\alpha u + v) = f\left[\alpha\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right]$$

$$= f\left[\begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ \alpha u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right]$$

$$= f\begin{pmatrix} \alpha u_1 + v_1 \\ \alpha u_2 + v_2 \\ \alpha u_3 + v_3 \end{pmatrix}$$

Or par définition, $f(x, y, z) = (x + y, 2x - y + z, x + z)$. Cela implique :

$$f(\alpha u + v) = \begin{bmatrix} \alpha u_1 + v_1 + \alpha u_2 + v_2 \\ 2\alpha u_1 + 2v_1 - \alpha u_2 - v_2 + \alpha u_3 + v_3 \\ \alpha u_1 + v_1 + \alpha u_3 + v_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha(u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \\ \alpha(2u_1 - u_2 + u_3) + (2v_1 - v_2 + v_3) \\ \alpha(u_1 + u_3) + (v_1 + v_3) \end{bmatrix}$$

$$= \alpha\begin{bmatrix} u_1 + u_2 \\ 2u_1 - u_2 + u_3 \\ u_1 + u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 + v_2 \\ 2v_1 - v_2 + v_3 \\ v_1 + v_3 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha f(u) + f(v)$$

Ceci prouve que f est une application linéaire.

2) On sait que la **matrice d'une application linéaire f dans une base** $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées $f(e_i)_{i = 1, \dots, n}$ dans cette base $\mathcal{B}$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base **canonique** de $\mathbb{R}^3$ avec $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.
Il faut exprimer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ en fonction de e_1, e_2 et e_3.
Or par définition, $f(x, y, z) = (x + y, 2x - y + z, x + z)$. Il en découle :
$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 2, 1) = 1(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1) = e_1 + 2e_2 + e_3$
$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (1, -1, 0) = 1(1, 0, 0) - 1(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1) = e_1 - e_2$
$f(e_3) = f(0, 0, 1) = (0, 1, 1) = 0(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1) = e_2 + e_3$

Ainsi, la **matrice de f dans la base canonique** de $\mathbb{R}^3$ s'écrit :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) Soit $u = (1, 2, 3)$.

- En utilisant la définition de f :
  $f(u) = f(1, 2, 3) = (1+2, 2-2+3, 1+3) = (3, 3, 4)$
- En utilisant la matrice A associée à f :
  $$f(u) = Au = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

4) Une façon de montrer que la famille de vecteurs (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ est de revenir à la définition, c'est-à-dire qu'il faut démontrer que la famille (v_1, v_2, v_3) est **libre** et **génératrice** (deux propriétés à prouver). Cependant si l'on regarde de plus près les hypothèses, il existe une façon plus simple de procéder. En effet, le **nombre d'éléments de cette famille qui vaut 3 est égal à la dimension de l'espace vectoriel** $\mathbb{R}^3$. Par conséquent, il suffit de démontrer que cette famille est **libre** ou **génératrice** (une seule propriété à prouver).

- **<u>1ère méthode</u>** :

Pour rappel, une famille de vecteurs (v_1, v_2, v_3) est **libre** dans $\mathbb{R}^3$ si et seulement si :

$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}, (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0)$

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des réels tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$.
Introduisons les coordonnées des vecteurs v_1, v_2 et v_3 dans l'équation précédente :
$\lambda_1(2, 1, -1) + \lambda_2(2, -1, 2) + \lambda_3(3, 0, 1) = (0, 0, 0)$
Ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$\lambda_1\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}+\lambda_3\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Ce qui équivaut au système d'équations :

$$\begin{cases}2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 & \dots (1)\\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 & \dots (2)\\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 & \dots (3)\end{cases}$$

De l'équation (2), on tire : $\lambda_2 = \lambda_1$ ... (4)

En substituant cette expression dans l'équation (3), on obtient : $\lambda_3 = -\lambda_1$ ... (5)

En remplaçant les équations (4) et (5) dans l'équation (1), on trouve : $\lambda_1 = 0$.

Ainsi, ce système a pour **unique** solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille (v_1, v_2, v_3) est **libre**, c'est donc une **base** de $\mathbb{R}^3$.

- **2ème méthode** :

Pour rappel, une famille de vecteurs (v_1, v_2, v_3) est **génératrice** de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si :

$\forall u \in \mathbb{R}^3, \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \,/\, u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$

Soit $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On cherche λ_1, λ_2 et $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$.

Introduisons les coordonnées des vecteurs u, v_1, v_2 et v_3 dans l'équation ci-dessus :

$(a, b, c) = \lambda_1(2, 1, -1) + \lambda_2(2, -1, 2) + \lambda_3(3, 0, 1)$

Ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$\lambda_1\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}+\lambda_3\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

D'où le système d'équations :

$$\begin{cases}2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = a & \dots (1)\\ \lambda_1 - \lambda_2 = b & \dots (2)\\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = c & \dots (3)\end{cases}$$

De l'équation (2), on tire : $\lambda_1 = b + \lambda_2$ ... (4)

Substituons cette expression de λ_1 dans l'équation (1) : $4\lambda_2 + 3\lambda_3 = a - 2b$ ... (5)

De même, substituons l'expression de λ_1 dans l'équation (3) : $\lambda_2 + \lambda_3 = b + c$ ... (6)

De l'équation (6), on tire : $\lambda_2 = b + c - \lambda_3$ ... (7)

D'abord remplaçons cette expression de λ_2 dans l'équation (5) : $\lambda_3 = -a + 6b + 4c$

Ensuite remplaçons cette expression de λ_3 dans l'équation (7) : $\lambda_2 = a - 5b - 3c$

Enfin remplaçons cette nouvelle expression de λ_2 dans l'équation (4) : $\lambda_1 = a - 4b - 3c$.

En résumé, ce système a pour solution :

$\lambda_1 = a - 4b - 3c$

$\lambda_2 = a - 5b - 3c$

$\lambda_3 = -a + 6b + 4c$

et ceci quels que soient les réels a, b et c. La famille (v_1, v_2, v_3) est **génératrice**, c'est donc une **base** de $\mathbb{R}^3$.

- Calculons d'abord $f(v_1)$ en utilisant la définition, $f(x, y, z) = (x + y, 2x - y + z, x + z)$:

$f(v_1) = f(2, 1, -1) = (3, 2, 1)$

Pour exprimer $f(v_1)$ en fonction de v_1, v_2 et v_3, il faut trouver trois réels α, β et γ qui satisfont la relation :

$f(v_1) = (3, 2, 1) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \alpha(2, 1, -1) + \beta(2, -1, 2) + \gamma(3, 0, 1)$

Ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$\alpha\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$$

D'où le système d'équations :

$$\begin{cases}2\alpha + 2\beta + 3\gamma = 3\\ \alpha - \beta = 2\\ -\alpha + 2\beta + \gamma = 1\end{cases}$$

Ce système est **identique** à celui que l'on a obtenu par le procédé ci-dessus où l'on a montré que la famille (v_1, v_2, v_3) est **génératrice** de $\mathbb{R}^3$. Par analogie, le coefficient α correspond à λ_1, β à λ_2, γ à λ_3, la coordonnée a à 3, b à 2 et enfin c à 1.

Le système sus-cité a donc pour solution :

$\alpha = a - 4b - 3c = 3 - 4(2) - 3(1) = -8$

$\beta = a - 5b - 3c = 3 - 5(2) - 3(1) = -10$

$\gamma = -a + 6b + 4c = -3 + 6(2) + 4\,(1) = 13$

- De même, calculons $f(v_2)$ en utilisant la définition, $f(x, y, z) = (x + y, 2x - y + z, x + z)$:

$f(v_2) = f(2, -1, 2) = (1, 7, 4)$

Pour exprimer $f(v_2)$ en fonction de v_1, v_2 et v_3, il faut trouver trois réels α', β' et γ' qui satisfont la relation :

$f(v_2) = (1, 7, 4) = \alpha'(2, 1, -1) + \beta'(2, -1, 2) + \gamma'(3, 0, 1)$

Là aussi, nous obtenons un deuxième système d'équations identique à celui obtenu plus haut où le coefficient α' correspond à λ_1, β' à λ_2, γ' à λ_3, la coordonnée a à 1, b à 7 et enfin c à 4.

Ce deuxième système a donc pour solution :

$\alpha' = a - 4b - 3c = 1 - 4(7) - 3(4) = -39$

$\beta' = a - 5b - 3c = 1 - 5(7) - 3(4) = -46$

$\gamma' = -a + 6b + 4c = -1 + 6(7) + 4(4) = 57$

- De la même manière, calculons $f(v_3)$ en utilisant la définition, $f(x, y, z) = (x + y, 2x - y + z, x + z)$:

$f(v_3) = f(3, 0, 1) = (3, 7, 4)$

Pour exprimer $f(v_3)$ en fonction de v_1, v_2 et v_3, il faut trouver trois réels α'', β'' et γ'' qui satisfont la relation :

$f(v_3) = (3, 7, 4) = \alpha''(2, 1, -1) + \beta''(2, -1, 2) + \gamma''(3, 0, 1)$

Là encore, nous obtenons un troisième système d'équations identique à celui trouvé auparavant où le coefficient α'' correspond à λ_1, β'' à λ_2, γ'' à λ_3, la coordonnée a à 3, b à 7 et enfin c à 4.

Ce troisième système a donc pour solution :

$\alpha'' = a - 4b - 3c = 3 - 4(7) - 3(4) = -37$

$\beta'' = a - 5b - 3c = 3 - 5(7) - 3(4) = -44$

$\gamma'' = -a + 6b + 4c = -3 + 6(7) + 4(4) = 55$

Il en résulte :

$f(v_1) = -8v_1 - 10v_2 + 13v_3$

$f(v_2) = -39v_1 - 46v_2 + 57v_3$

$f(v_3) = -37v_1 - 44v_2 + 55v_3$

Or, nous savons que la **matrice de l'application linéaire f dans la base** $V = (v_1, v_2, v_3)$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées $f(v_i)_{i = 1, \dots, 3}$ dans cette même base V.

Ainsi, la **matrice de f dans la base** V s'écrit :

$$B = \begin{bmatrix} -8 & -39 & -37 \\ -10 & -46 & -44 \\ 13 & 57 & 55 \end{bmatrix}$$

- Pour rappel, la **matrice de passage** de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $V = (v_1, v_2, v_3)$ est la matrice dont les coefficients de la colonne i sont les coordonnées du vecteur v_i dans la base canonique $\mathcal{B}$.

Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

Il faut exprimer v_1, v_2 et v_3 en fonction de e_1, e_2 et e_3 :

$v_1 = (2, 1, -1) = \mathbf{2}(1, 0, 0) + \mathbf{1}(0, 1, 0) \mathbf{-} \mathbf{1}(0, 0, 1) = 2e_1 + e_2 - e_3$

$v_2 = (2, -1, 2) = \mathbf{2}(1, 0, 0) \mathbf{-} \mathbf{1}(0, 1, 0) + \mathbf{2}(0, 0, 1) = 2e_1 - e_2 + 2e_3$

$v_3 = (3, 0, 1) = \mathbf{3}(1, 0, 0) + \mathbf{0}(0, 1, 0) + \mathbf{1}(0, 0, 1) = 3e_1 + e_3$

La **matrice de passage** de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ à la base $V = (v_1, v_2, v_3)$ s'écrit donc :

$$C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},V}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

On vérifiera aisément la **formule de changement de bases** $B = C^{-1}AC$. Tel que susmentionné, C représente la **matrice de passage** de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base V, A la **matrice de f dans la base canonique** $\mathcal{B}$ et B la **matrice de f dans la base** V.