UNIVERSITÉ BATNA 2
FACULTÉ DE TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT S.C.S.T.

Mathématiques 2

Série N°3 de Travaux Dirigés

CORRECTION DES EXERCICES SUR LES INTÉGRALES

Préparé par :
Ali BOUCHETOB

Année Universitaire : **2019/2020**

Dans tout ce qui suit, l'omission de la constante arbitraire dans les résultats intermédiaires est volontaire ; elle est rajoutée dans l'expression définitive.

<u>Exercice 1</u> :

1) On sait que $\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + C$ (*voir table des intégrales des fonctions élémentaires*).

Effectuons le ***changement de variable*** $u = \frac{x}{a}$, alors $du = \frac{1}{a}dx$

Donc, l'intégrale s'écrit :

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(\frac{x}{a})^2+1} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a\,du}{u^2+1} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{a}\arctan u + C = \frac{1}{a}\arctan\frac{1}{a} + C$$

2) ***Décomposons la fraction*** sous le signe d'intégration de la manière suivante :

$$\frac{1}{a^2-x^2} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{a+x}$$

Réduisons les fractions au même dénominateur :

$$\frac{1}{a^2-x^2} = \frac{A(a+x)}{a^2-x^2} + \frac{B(a-x)}{a^2-x^2}$$

$$= \frac{(A+B)a+(A-B)x}{a^2-x^2}$$

Les numérateurs étant égaux, on va donc égaler les coefficients de x^1 et x^0. On obtient les équations :

$A - B = 0$,

$(A + B)a = 1$.

Leur résolution donne :

$A = B = \frac{1}{2a}$

Ainsi, l'intégrale s'écrit :

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{a-x} + \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{a+x}$$

On sait que $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ (*voir table des intégrales des fonctions élémentaires*).

- Considérons la première intégrale :

Effectuons le ***changement de variable*** $u = a - x$, alors $du = -dx$. Par conséquent :

$$\frac{1}{2a}\int \frac{dx}{a-x} = \frac{1}{2a}\int \frac{-du}{u} = -\frac{1}{2a}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2a}\ln|u| = -\frac{1}{2a}\ln|a-x|$$

- Considérons la seconde intégrale :

Opérons le ***changement de variable*** $t = a + x$, alors $dt = dx$. De ce fait :

$$\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{a+x}=\frac{1}{2a}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2a}\ln|t|=\frac{1}{2a}\ln|a+x|$$

En définitive, on a :

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=-\frac{1}{2a}\ln|a-x|+\frac{1}{2a}\ln|a+x|+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$$

3) On sait que $\int e^x dx = e^x + C$ (*voir table des intégrales des fonctions élémentaires*).

Posons $u = ax$, alors $du = a\,dx$

Ainsi, l'intégrale s'écrit :

$$\int e^{ax}dx=\int e^u\left(\frac{du}{a}\right)=\frac{1}{a}\int e^u du=\frac{1}{a}e^u+C=\frac{1}{a}e^{ax}+C$$

4) Effectuons le ***changement de variable*** $u = x^2 + h$, alors $du = 2x\,dx$ et l'intégrale s'écrit :

$$\int\frac{x\,dx}{x^2+h}=\int\frac{1}{u}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln|x^2+h|+C$$

5) Effectuons les transformations :

$$\frac{x^2}{x^4+1}=\frac{x^2}{(x^2+1)^2-2x^2}=\frac{x^2}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}$$

Décomposons la fraction de la manière suivante :

$$\frac{x^2}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

Réduisons les fractions au même dénominateur :

$$\frac{x^2}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}=\frac{(Ax+B)(x^2+\sqrt{2}x+1)+(Cx+D)(x^2-\sqrt{2}x+1)}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}$$

Après développement et réarrangement, on obtient :

$$\frac{x^2}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}=\frac{(A+C)x^3+(\sqrt{2}A+B-\sqrt{2}C+D)x^2+(A+\sqrt{2}B+C-\sqrt{2}D)x+(B+D)}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}$$

Les numérateurs étant égaux, on va donc égaler les coefficients de x^3, x^2, x^1 et x^0. On obtient les équations :

$A + C = 0$,

$\sqrt{2}A + B - \sqrt{2}C + D = 1$,

$A + \sqrt{2}B + C - \sqrt{2}D = 0$,

$B + D = 0$.

Leur résolution donne :

$A = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $B = 0$; $C = -\frac{\sqrt{2}}{4}$; $D = 0$

En définitive, on a la décomposition :

$$\frac{x^2}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{x}{(x^2-\sqrt{2}x+1)}-\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{x}{(x^2+\sqrt{2}x+1)}$$

Par conséquent, l'intégrale s'écrit :

$$\int\frac{x^2dx}{x^4+1}=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{x\,dx}{(x^2-\sqrt{2}x+1)}-\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{x\,dx}{(x^2+\sqrt{2}x+1)}=I_1-I_2$$

➢ Considérons d'abord la première intégrale I_1.

Effectuons les transformations :

$$I_1=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{x\,dx}{(x^2-\sqrt{2}x+1)}=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{\frac{1}{2}(2x-\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}}{2}}{(x^2-\sqrt{2}x+1)}dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{2}\int\frac{2x-\sqrt{2}}{(x^2-\sqrt{2}x+1)}dx+\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{dx}{(x^2-\sqrt{2}x+1)}=I_{11}+I_{12}$$

- Considérons la première intégrale I_{11}.

Effectuons le ***changement de variable*** $t = x^2-\sqrt{2}x+1$, alors $dt=(2x-\sqrt{2})\,dx$ et l'intégrale I_{11} s'écrit :

$$I_{11}=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{2}\int\frac{2x-\sqrt{2}}{(x^2-\sqrt{2}x+1)}dx=\frac{\sqrt{2}}{8}\int\frac{dt}{t}=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln|t|=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

- Considérons la seconde intégrale I_{12}.

Effectuons les transformations :

$$I_{12}=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{dx}{(x^2-\sqrt{2}x+1)}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x^2-\sqrt{2}x+1)}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}$$

Posons $u = x-\frac{\sqrt{2}}{2}$, alors $du = dx$ et l'intégrale I_{12} s'écrit :

$$I_{12}=\frac{1}{4}\int\frac{du}{u^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=\frac{1}{4}(\sqrt{2})\arctan\sqrt{2}u=\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x-1)$$

En définitive, l'intégrale I_1 s'écrit :

$$I_1=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{x\,dx}{(x^2-\sqrt{2}x+1)}=I_{11}+I_{12}=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x-1)$$

➢ Considérons maintenant la seconde intégrale I_2.

Notons que le calcul de l'intégrale I_2 est ***très similaire*** à celui de I_1.

Effectuons les transformations :

$$I_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{x\,dx}{(x^2+\sqrt{2}x+1)} = \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{\frac{1}{2}(2x+\sqrt{2})-\frac{\sqrt{2}}{2}}{(x^2+\sqrt{2}x+1)}dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{2}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{(x^2+\sqrt{2}x+1)}dx - \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dx}{(x^2+\sqrt{2}x+1)} = I_{21} - I_{22}$$

- Considérons d'abord la première intégrale I_{21}.

Effectuons le ***changement de variable*** $v = x^2 + \sqrt{2}x + 1$, alors $dv = (2x+\sqrt{2})\,dx$ et l'intégrale I_{21} s'écrit :

$$I_{21} = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{2}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{(x^2+\sqrt{2}x+1)}dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{dv}{v} = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln|v| = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

- Considérons ensuite la seconde intégrale I_{22}.

Effectuons les transformations :

$$I_{22} = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dx}{(x^2+\sqrt{2}x+1)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x^2+\sqrt{2}x+1)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}$$

Posons $w = x + \frac{\sqrt{2}}{2}$, alors $dw = dx$ et l'intégrale I_{22} s'écrit :

$$I_{22} = \frac{1}{4}\int \frac{dw}{w^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{1}{4}(\sqrt{2})\arctan\sqrt{2}w = \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x+1)$$

En définitive, l'intégrale I_2 s'écrit :

$$I_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{x\,dx}{(x^2+\sqrt{2}x+1)} = I_{21} - I_{22} = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1) - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x+1)$$

Nous avons en définitive :

$$\int \frac{x^2dx}{x^4+1} = I_1 - I_2$$

$$= [\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x-1)] - [\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1) - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x+1)] + C$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}[\arctan(\sqrt{2}x-1) + \arctan(\sqrt{2}x+1)] + \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right) + C$$

6) ***Décomposons la fraction*** de la manière suivante :

$$\frac{x+1}{x^3(x^2+1)^2} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} + \frac{Fx+G}{x^2+1}$$

Réduisons les fractions au même dénominateur :

$$\frac{x+1}{x^3(x^2+1)^2}=\frac{A(x^2+1)^2}{x^3(x^2+1)^2}+\frac{Bx(x^2+1)^2}{x^3(x^2+1)^2}+\frac{Cx^2(x^2+1)^2}{x^3(x^2+1)^2}+\frac{x^3(Dx+E)}{x^3(x^2+1)^2}+\frac{x^3(x^2+1)(Fx+G)}{x^3(x^2+1)^2}$$

Après développement et réarrangement, on obtient :

$$\frac{x+1}{x^3(x^2+1)^2}=\frac{(C+F)x^6+(B+G)x^5+(A+2C+D+F)x^4+(2B+E+G)x^3+(2A+C)x^2+Bx+A}{x^3(x^2+1)^2}$$

Les numérateurs étant égaux, on va donc égaler les coefficients de x^6, x^5, x^4, x^3, x^2, x^1 et x^0. On obtient le système d'équations :

$C + F = 0$,

$B + G = 0$,

$A + 2C + D + F = 0$,

$2B + E + G = 0$,

$2A + C = 0$,

$B = 1$,

$A = 1$.

La résolution de ce système donne :

$A = 1$; $B = 1$; $C = -2$; $D = 1$; $E = -1$; $F = 2$; $G = -1$.

En définitive, on a la décomposition :

$$\frac{x+1}{x^3(x^2+1)^2}=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+\frac{x-1}{(x^2+1)^2}+\frac{2x-1}{x^2+1}$$

Par conséquent, l'intégrale s'écrit :

$$\int\frac{(x+1)dx}{x^3(x^2+1)^2}=\int\frac{dx}{x^3}+\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{2\,dx}{x}+\int\frac{(x-1)dx}{(x^2+1)^2}+\int\frac{(2x-1)dx}{x^2+1}=I_1+I_2-I_3+I_4+I_5$$

- D'abord, considérons la première intégrale I_1.

$$I_1=\int\frac{dx}{x^3}=\int x^{-3}dx=\frac{x^{-3+1}}{-3+1}=\frac{x^{-2}}{-2}=\frac{-1}{2x^2}$$

- Ensuite, considérons la deuxième intégrale I_2.

$$I_2=\int\frac{dx}{x^2}=\int x^{-2}dx=\frac{x^{-2+1}}{-2+1}=\frac{x^{-1}}{-1}=\frac{-1}{x}$$

- Puis, considérons la troisième intégrale I_3.

$$I_3=\int\frac{2\,dx}{x}=2\int\frac{dx}{x}=2\ln|x|$$

- Maintenant, considérons la quatrième intégrale I_4.

$$I_4=\int\frac{(x-1)dx}{(x^2+1)^2}=\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}-\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=I_{41}-I_{42}$$

- Considérons d'abord la première intégrale I_{41}.

Effectuons le ***changement de variable*** $t = x^2 + 1$, alors $dt = 2x\,dx$ et l'intégrale I_{41} s'écrit :

$$I_{41} = \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{1}{t^2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{-1}{2t} = -\frac{1}{2(x^2+1)}$$

- Considérons ensuite la seconde intégrale I_{42}.

Effectuons les transformations :

$$I_{42} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{-x^2+x^2+1}{(x^2+1)^2}dx = -\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx + \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}dx = -\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx + \int \frac{dx}{x^2+1} = J + J'$$

❖ Considérons l'intégrale $J = -\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = \int x \frac{-x\,dx}{(x^2+1)^2}$

Appliquons la ***méthode d'intégration par parties***, en posant :

$u = x$, $du = dx$

$dv = -\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$, $v = \frac{1}{2(x^2+1)}$

Ainsi, l'intégrale J s'écrit :

$$J = \int x \frac{-x\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\arctan x$$

❖ Considérons l'intégrale J'. Celle-ci peut être calculée ***immédiatement***. En effet :

$$J' = \int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x$$

Par conséquent, l'intégrale I_{42} s'écrit :

$$I_{42} = J + J' = [\frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\arctan x] + \arctan x = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x$$

En définitive, l'intégrale I_4 s'écrit :

$$I_4 = \int \frac{(x-1)dx}{(x^2+1)^2} = I_{41} - I_{42} = -\frac{1}{2(x^2+1)} - [\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x] = -\frac{x+1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\arctan x$$

➢ Enfin, considérons la cinquième intégrale I_5.

$$I_5 = \int \frac{(2x-1)dx}{x^2+1} = \int \frac{2x\,dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1} = I_{51} - I_{52}$$

- Considérons la première intégrale I_{51}.

Effectuons le ***changement de variable*** $t = x^2 + 1$, alors $dt = 2x\,dx$ et l'intégrale I_{51} s'écrit :

$I_{51} = \int \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln(x^2+1)$

- Considérons la seconde intégrale I_{52}.

$I_{52} = \int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x$

Ainsi, l'intégrale I_5 s'écrit :

$I_5 = I_{51} - I_{52} = \ln(x^2+1) - \arctan x$

En définitive, l'intégrale recherchée s'écrit :

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^3(x^2+1)^2} = I_1 + I_2 - I_3 + I_4 + I_5$$

$$= -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} - 2\ln|x| - \frac{x+1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\arctan x + \ln(x^2+1) - \arctan x + C$$

Finalement, après réarrangement :

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^3(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{x+1}{2(x^2+1)} - 2\ln|x| + \ln(x^2+1) - \frac{3}{2}\arctan x$$

<u>Exercice 2</u> :

1) On sait que $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ (*voir table des intégrales des fonctions élémentaires*).

Effectuons le ***changement de variable*** $t = ax$, alors $dt = a\,dx$ et l'intégrale s'écrit :

$$\int \sin ax\,dx = \int \sin t \frac{dt}{a} = \frac{1}{a}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{a}\cos t + C = -\frac{1}{a}\cos ax + C$$

2) Utilisons la ***formule trigonométrique*** bien connue :

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

En substituant cette expression dans l'intégrale à calculer, nous trouvons :

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$

$$= \int \frac{1}{2}dx + \int \frac{1}{2}\cos 2x\,dx$$

- Considérons la première intégrale.

$$\int \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx = \frac{x}{2}$$

- Considérons la seconde intégrale.

Effectuons le ***changement de variable*** $t = 2x$, alors $dt = 2\,dx$ et l'intégrale s'écrit :

$$\int \frac{1}{2}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos t\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{4}\int \cos t\,dt = \frac{1}{4}\sin t = \frac{1}{4}\sin 2x$$

En définitive, on a :

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

3) Utilisons la ***formule trigonométrique*** qui découle de la définition de la fonction ***tangente*** :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Substituons cette expression dans l'intégrale à calculer :

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$$

Effectuons le ***changement de variable*** $t = \cos x$, alors $dt = -\sin x\,dx$ et l'intégrale s'écrit :

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int \frac{-dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C$$

4) Appliquons la ***méthode d'intégration par parties***, en posant :

$u = x^2$, $du = 2x\,dx$

$dv = \cos x\,dx$, $v = \sin x$

Ainsi, l'intégrale s'écrit :

$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - \int 2x\sin x\,dx$$

Appliquons ***de nouveau*** à cette dernière intégrale la ***méthode d'intégration par parties***, en posant :

$t = x$, $dt = dx$

$dw = \sin x\,dx$, $w = -\cos x$

Alors :

$$\begin{aligned}\int 2x\sin x\,dx &= 2\int x\sin x\,dx = 2\left[-x\cos x - \int(-\cos x)\,dx\right]\\ &= -2x\cos x + 2\int \cos x\,dx\\ &= -2x\cos x + 2\sin x\end{aligned}$$

Nous avons en définitive :

$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - [-2x\cos x + 2\sin x] + C = (x^2-2)\sin x + 2x\cos x + C$$

<u>Exercice 3</u> :

1) Effectuons le ***changement de variable*** $t = x^4 + 9$, alors $dt = 4x^3\,dx$ et l'intégrale s'écrit :

$$\int \frac{5x^3dx}{9+x^4} = \int \frac{5}{t}\frac{dt}{4} = \frac{5}{4}\int \frac{dt}{t} = \frac{5}{4}\ln|t| + C = \frac{5}{4}\ln|x^4+9| + C$$

2) On sait que $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$ (*voir table des intégrales des fonctions élémentaires*).

Effectuons le ***changement de variable*** $u = 1 - x^2$, alors $du = -2x\,dx$ et l'intégrale s'écrit :

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1}{u^{1/2}} \frac{du}{(-2)} = -\frac{1}{2}\int u^{-1/2} du = -\frac{1}{2}\frac{u^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = -\frac{1}{2}\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = -u^{1/2} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

3) Multiplions et divisons la fonction à intégrer par $\sqrt{1-x^2}$:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = I_1 - I_2$$

- La première intégrale I_1 peut être calculée immédiatement.

$I_1 = \int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$ (*voir table des intégrales des fonctions élémentaires*).

- Considérons maintenant la seconde intégrale I_2.

$$I_2 = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int x \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Appliquons la ***méthode d'intégration par parties***, en posant :

$u = x$, $du = dx$

$dv = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = -\sqrt{1-x^2}$ (pour les détails, voir réponse 2 plus haut)

Ainsi, l'intégrale I_2 s'écrit :

$$I_2 = \int x \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Substituons les expressions de I_1 et I_2 ainsi obtenues dans l'intégrale que nous désirons calculer :

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Transposons dans le premier membre de cette égalité le ***dernier terme*** du second :

$$2\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \arcsin x + x\sqrt{1-x^2}$$

Nous avons en définitive :

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$$

4) Effectuons le ***changement de variable*** $u = 4x^2$, alors $du = 8x\,dx$ et l'intégrale s'écrit :

$$\int e^{4x^2} x\,dx = \int e^u \frac{du}{(8)} = \frac{1}{8}\int e^u du = \frac{1}{8}e^u + C = \frac{1}{8}e^{4x^2} + C$$

5) Effectuons le ***changement de variable*** u = sinx, alors du = cosx dx et l'intégrale s'écrit :

$$\int \frac{\cos x\, dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + C = \arctan(\sin x) + C$$

6) Effectuons les transformations :

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \int \frac{-x^2+1+x^2}{(1+x^2)^{3/2}}dx = -\int \frac{x^2}{(1+x^2)^{3/2}}dx + \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^{3/2}}dx$$

$$= -\int x\frac{x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = I_1 + I_2$$

Considérons la première intégrale I_1.

$$I_1 = -\int x\frac{x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}$$

Appliquons la ***méthode d'intégration par parties***, en posant :

u = x, du = dx

$$dv = \frac{x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}},\ v = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Ainsi, l'intégrale I_1 s'écrit :

$$I_1 = -\int x\frac{x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}} = -\left[-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\right] = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Notons qu'il n'est pas nécessaire à ce stade de calculer l'intégrale $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$. En effet, celle-ci n'apparait plus lorsqu'on substitue l'expression de I_1 dans l'intégrale que nous voulons calculer :

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\right] + \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Nous avons en définitive :

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$$