Université de Batna 2
Faculté de mathématiques et d'informatique
Département de mathématiques
$3^{\text{ème}}$année LMD
Géométrie Différentielle
2018-2019

Examen final

Exercice 1: Soit l'application $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par:

$$\psi(x, y) = (xe^y \ , \ y)$$

1)- Montrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2)- Montrer que la différentielle $d\psi_{(x,y)}$ de ψ est inversible en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
3)- Montrer que ψ est injective.
4)- Montrer que ψ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global.

Exercice 2: On considère la fonction

$$f(x, y) = 1 - ye^x + xe^y$$

1)- Calculer $f(0, 1)$.
2)- Démontrer qu'il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}$, un voisinage V de 1 dans $\mathbb{R}$ et une application $\varphi : U \to V$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que

$$\forall x \in U, \forall y \in V \quad f(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x).$$

3)- Calculer $\varphi'(0)$.

Exercice 3: Le paraboloïde de révolution est la surface obtenue faisant tourner une parabole autour de son axe, son équation cartésienne:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z\}$$

1)- On définit la fonction f par $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$. Montrer que 0 est une valeur régulière de f.
2)- Montrer que S est une surface régulière.
3)- On considère l'application $X :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par:

$$X(u, v) = \left(\sqrt{u} \cos v \ , \ \sqrt{u} \sin v \ , \ u\right)$$

Montrer que X est une paramétrisation du paraboloïde S.

Exercice 1: Soit l'application $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$\psi(x,y) = (xe^y \ , \ y)$$

1)- Comme les composantes de ψ sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$
2)- On a :

$$\mathrm{Jac}(\psi) = \begin{pmatrix} e^y & xe^y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\det \mathrm{Jac}(\psi) = e^y \neq 0$ donc $d\psi_{(x,y)}$ est inversible.
3)- Pour tout (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \psi(x_1,y_1) = \psi(x_2,y_2) &\implies (x_1e^{y_1} \ , \ y_1) = (x_2e^{y_2} \ , \ y_2) \\ &\implies \begin{cases} x_1e^{y_1} = x_2e^{y_2} \\ y_1 = y_2 \end{cases} \implies (x_1,y_1) = (x_2,y_2) \end{aligned}$$

donc ψ est injective.
4)- Comme ψ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et injective et $d\psi_{(x,y)}$ est inversible alors, d'aprés le théorème d'inversion globale, ψ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global.

Exercice 2: Soit :

$$f(x,y) = 1 - ye^x + xe^y$$

1)- $f(0,1) = 1 - 1 + 0 = 0$.
2)- Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, $f(0,1) = 0$ et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -1 \neq 0 \ , \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^x + xe^y\right),$$

alors, d'aprés le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}$, un voisinage V de 1 dans $\mathbb{R}$ et une application $\varphi : U \to V$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que

$$\forall x \in U, \forall y \in V \quad f(x,y) = 0 \iff y = \varphi(x).$$

3)- On a :

$$\varphi'(0) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -ye^x + e^y \implies \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = e - 1$$

donc :

$$\varphi'(0) = e - 1.$$

Exercice 3: Soit :

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=z\right\} \text{ et } f(x,y,z) = x^2+y^2-z$$

on a :

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 0\right\} = f^{-1}\left(\{0\}\right)$$

1)- Comme

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -1 \neq 0$$

alors f n'admet aucun point critique donc 0 est une valeur régulière de f.
2)- On a $S = f^{-1}(\{0\})$ et 0 est une valeur régulière de f alors S est une surface régulière.
3)- On considère l'application $X :]0,+\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par:

$$X(u,v) = \left(\sqrt{u}\cos v\ ,\ \sqrt{u}\sin v\ ,\ u\right)$$

Tout d'abord on montre que $\mathrm{Im}(X) \subset S$. Si on pose $x = \sqrt{u}\cos v$, $y = \sqrt{u}\sin v$ et $z = u$ alors $x^2+y^2 = u\cos^2 v + u\sin^2 v = u = z$ d'où $\mathrm{Im}(X) \subset S$.
On a :
a)- X est de classe $\mathcal{C}^1$donc X est différentiable.
b)- X est homéomorphisme :
X est bijective car

$$X(u,v) = (x,y,z) \Longrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{u}\cos v \\ y = \sqrt{u}\sin v \\ z = u \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = z \\ \frac{y}{x} = \tan v \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = z \\ v = \arctan\frac{y}{x} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow X^{-1}(x,y,z) = (u,v) = (z, \arctan\frac{y}{x})$$

et X et X^{-1} sont continues.
c)- Condition de régularité :
On a :

$$\text{Jac } X = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{u}}\cos v & -\sqrt{u}\sin v \\ \frac{1}{2\sqrt{u}}\sin v & \sqrt{u}\cos v \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

le mineur

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{u}}\cos v & -\sqrt{u}\sin v \\ \frac{1}{2\sqrt{u}}\sin v & \sqrt{u}\cos v \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

ou :

$$dX_u \wedge dX_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{2\sqrt{u}}\cos v & \frac{1}{2\sqrt{u}}\sin v & 1 \\ -\sqrt{u}\sin v & \sqrt{u}\cos v & 0 \end{vmatrix} = -\sqrt{u}\cos v\ \vec{i} - \sqrt{u}\sin v\ \vec{j} + 1\vec{k} \neq \vec{0}$$

d'où la régularité.
De a), b) et c) X est une paramétrisation pour S.