Géométrie différentielle

3ème année Licence

Mourad Boudersa

Espaces de Banach

Normes

Définition 1: Soit E un espace vectoriel sur le corps des réels $\mathbb{R}$. On appelle une norme sur E toute fonction notée $\|.\|$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telle que

1)- $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2)- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
3)- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in E$.

Exemple: Dans $\mathbb{R}^n$, on a trois normes usuelles

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad , \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \ .$$

Espaces Normés

Définition 2: Soit E un espace vectoriel sur le corps des réels $\mathbb{R}$. On dit que E est un espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme $\|.\|$.

Suites de Cauchy

Définition 3: Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments d'un espace normé $(E, \|.\|)$. On dit que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \geq n_0 \Longrightarrow \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

Suites convergentes

Définition 4: Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments d'un espace normé $(E, \|.\|)$. On dit que la suite $(x_n)_n$ est convergente dans E vers un élément $x \in E$ si

$$\lim_{n \to +\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Espaces complets

Définition 5: Un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est dit complet, si toute suite de Cauchy $(x_n)_n$ de E est une suite convergente dans E.

Espaces de Banach

Définition 6: On appelle espace de Banach $(E, \|.\|)$ tout espace vectoriel normé et complet.

Exemple: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ et E (si $\dim E < \infty$) sont des espaces de Banach.

Espaces produits

Définition 7: Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$; alors l'espace produit $E \times F$ défini par

$$G = E \times F = \{(x, y)\,, \text{ tels que } x \in E \text{ et } y \in F\}$$

est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$; par l'une des normes produits suivantes
$\|(x,y)\|_1 = \|x\|_E + \|y\|_F \quad \forall x \in E, \forall y \in F$
$\|(x,y)\|_p = (\|x\|_E^p + \|y\|_F^p)^{\frac{1}{p}} \quad \forall x \in E, \forall y \in F;\ 1 < p < \infty$
$\|(x,y)\|_\infty = \max\{\|x\|_E\ ,\ \|y\|_F\} \quad \forall x \in E, \forall y \in F.$

Ouvert, fermé et compact

Définition 8: Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $U \subset E$.
1)- U est un ouvert si et seulement si

$$\forall x \in U,\ \exists r > 0 : B(x, r) \subset U$$

où

$$B(x, r) = \{y \in E : \|x - y\| < r\}\,.$$

2)- U est un fermé de E si et seulement si son complémentaire $E - U$ est un ouvert de E.
3)- U est un compact de E si de tout recouvrement de U par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Remarque: U est un compact de E si et seulement sitoute suite de U admet une sous-suite convergente dans U.

Applications continues

Définition 9: Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$. Une application $f : G \subset E \to F$ est dite continue au point x_0 de G si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in G : \|x - x_0\|_E < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_F < \varepsilon.$$

Applications linéaires continues

Définition 10: Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ et $l : E \to F$ une application linéaire (c-à-d $\forall x, y \in E$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : l(\alpha x + \beta y) = \alpha l(x) + \beta l(y)$).
l est continue si et seulement si

$$\exists k > 0,\ \forall x \in E : \|l(x)\|_F \leq k\|x\|_E\,.$$

On note par $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires et continues de E dans F.
On voit que $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel normé muni de la norm

$$\forall l \in \mathcal{L}(E, F) : \|l\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|l(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|l(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|l(x)\|_F\ .$$

Remarque: Si F est un espace de Banach alors $\mathcal{L}(E,F)$ l'est aussi.

Espaces isomorphes

Définition 11: Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$. On dit que $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est un isomporphisme si f est bijective et si f^{-1} est continue.

Théorème 12: Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ et $f : E \to F$ une application linéaire continue bijective. Alors f est un isomorphisme.

Définition 13: Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$. On dit que E et F sont isomorphes s'il existe un isomorphisme f défini sur E dans F.

On note par $Isom(E,F)$ l'espace des isomorphismes de E dans F.

Applications multi-linéaires continues

Définition 14:

1)- Si E_1, $E_2, ..., E_n$ sont des espaces de Banach, alors le produit cartésien $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ muni de la norme

$$\begin{aligned} \text{Pour } x &= (x_1, x_2, ..., x_n) \in E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_n : \\ \|x\|_E &= \|(x_1, x_2, ..., x_n)\|_E = \|x_1\|_{E_1} + \|x_2\|_{E_2} + ... + \|x_n\|_{E_n} \end{aligned}$$

est aussi un espace de Banach.

2)- Une application $l : E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_n \to F$ est dite multi-linéaire si on a

$$\forall j \in \{1, ..., n\}, \ \forall (x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n) \in E_1 \times ... \times E_{j-1} \times E_{j+1} \times ... \times E_n$$

l'application partielle:

$$\begin{aligned} l &: E_j \to F \\ x &\to l(x_1, ..., x_{j-1}, x, x_{j+1}, ..., x_n) \end{aligned}$$

est linéaire, l est continue si toutes les applications partielles sont aussi continues c-à-d

$$\exists k > 0, \ \forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in E_1 \times E_2 \times ... \times E_n : \|l(x_1, x_2, ..., x_n)\|_F \leq k \|x_1\|_{E_1} \|x_2\|_{E_2} ... \|x_n\|_{E_n}.$$

L'espace des applications multi-linéaires continues est un espace vectoriel normé que l'on a noté $\mathcal{L}((E_1, E_2, ..., E_n), F)$ muni de la norme

$$\|l\|_{\mathcal{L}((E_1,E_2,...,E_n),F)} = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \|l(x_1, x_2, ..., x_n)\|_F : \|x_j\|_{E_j} \leq 1 \right\}.$$

Remarque: Dans le cas de la dimension finie tous ces espaces sont complet (c-à-d de Banach).

Différentiabilité

Fonctions différentielles, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 1: Soient E et F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert non vide de E. On dit qu'une fonction $f : U \to F$ est différentiable en un point $x \in U$ s'il existe une application linéaire continue $df_x \in \mathcal{L}(E, F)$ telle qu'on ait

$$\lim_{h \to 0_E} \frac{\|f(x+h) - f(x) - df_x(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0 \ .$$

Proposition 2: Si f est différentiable en $x \in U$ alors f est continue en x.

Définition 3: On dit que la fonction f est différentiable sur U si elle est différentiable en tout point $x \in U$. Dans ce cas, on appelle différentielle de f la fonction

$$\begin{array}{rcl} df & : & U \to \mathcal{L}(E, F) \\ x & \to & df_x \end{array}$$

Si de plus df est continue, on dit que f est continûment différentiable, ou de façon équivalente que f est de classe $\mathcal{C}^1$ ($f \in \mathcal{C}^1(U)$).

Exemples:

1)- Toute application constante est de classe $\mathcal{C}^1$ et de différentielle nulle. En effet, pour une fonction constante f, on a pour tout $(x, h) \in U \times E$ (avec $\|h\|$ assez petit pour que $x + h \in U$), $f(x+h) - f(x) = 0$.

2)- Toute application linéaire continue f ($f \in \mathcal{L}(E, F)$) est de classe $\mathcal{C}^1$ en tout point $x \in E$ et que $df_x = f$ (c-à-d $\forall h \in E : df_x(h) = f(h)$. En effet, par linéarité de f, on a pour tout $(x, h) \in E \times E$, $f(x+h) - f(x) - f(h) = 0$.

3)- Soit $f : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire continue. alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ en tout point $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ et on a

$$\forall (h_1, h_2) \in E_1 \times E_2 : df_{(x_1, x_2)}(h_1, h_2) = f(x_1, h_2) + f(h_1, x_2) \, .$$

4)- Une fonction $f : U \subset \mathbb{R} \to F$ de variable réelle à valeurs dans un espace normé F est différentiable si et seulement si elle est dérivable sur U, de plus:

$$\forall h \in \mathbb{R}, \ \forall x \in U : df_x(h) = hf'(x)$$

où f' la dérivée de f sur U.

5)- Soit $f : U \subset E \to F$ différentiable sur U. Alors la fonction

$$\begin{array}{rcl} g & : & \mathbb{R} \to F \\ t & \to & g(t) = f(x + th) \end{array}$$

est dérivable en $t = 0$ et de plus: $g'(0) = df_x(h)$ (c'est la notion de dérivée directionnelle de f dans la direction h).

Opérations sur les différentielles

Proposition 4: Si $f : U \subset E \to F$, $g : V \subset E \to F$ sont différentiables respectivement sur les ouverts U et V d'un même espace E. Alors
1)- $f + g$ est différentiable sur $U \cap V$ et on a

$$\forall h \in E : d(f+g)_x(h) = df_x(h) + dg_x(h), \ \forall x \in U \cap V$$

2)-

$$d(\lambda f)_x(h) = \lambda df_x(h), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

3)- Si $f : U \subset E \to F$ est différentiable en $x \in U$ et $g : V \subset F \to G$ est différentiable en $y = f(x) \in V$ alors la fonction $g \circ f : U \subset E \to G$ est différentiable en $x \in U$ et on a

$$\forall h \in E : d(g \circ f)_x(h) = dg_{f(x)}(df_x(h)).$$

Cas de la dimension finie

On suppose que $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}^*$

Dérivées partielles

Définition 5: Soit

$$\begin{array}{rcl} f & : & U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x & = & (x_1, ..., x_n) \to f(x) \end{array}$$

La dérivée partielle de f au point $x \in U$ par rapport à la composante x_j, $1 \leq j \leq n$, notée $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ ou $\partial_{x_j} f(x)$ ou $\partial_j f(x)$ est définie par

$$\text{pour } t > 0 \ \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$$

où

$$x = (x_1, ..., x_n) \in U, \quad e_j = \left(0, ..., \underset{j}{1}, ..., 0\right)$$

Remarques:

1)- Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en $x \in U$ et notons df_x la différentielle de f au point x. Alors (pour la dimension finie) l'application linéaire continue df_x peut être définie comme suit

$$\begin{aligned}\forall h &= (h_1,...,h_n) \in \mathbb{R}^n \\ df_x(h) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\ \ h_i = \nabla f(x).h\end{aligned}$$

où $\nabla f(x)$ est le vecteur gradient de f au point x

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right).$$

2)- Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable au point $x \in U$. Alors sa différentielle df_x peut être définie comme suit

$$\begin{aligned}\forall h &\in \mathbb{R}^n : \\ df_x(h) &= Jac\ f_x.h = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\, h_j\right)_{1\leq i\leq m}\end{aligned}$$

où $Jac\ f_x$ est la matrice jacobienne de f au point x c-à-d $Jac\ f_x = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$.

Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites

On introduit la notion difféomorphisme.

Définition 6: Soient E et F deux espaces de Banach sur $\mathbb{R}$ et soient U et V deux ouverts non vides de E et F respectivement. On dit que $f : U \to V$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U dans V si et seulement si
1)- f est bijective de U dans V,
2)- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U (c-à-d f est continûment différentiable),
3)- f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V.

Exemples:

1)- Soit la fonction

$$\begin{aligned} f &: \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) = \tan x \end{aligned}$$

f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ car
- f est bijective sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ car f est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

- $f \in \mathcal{C}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$, $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, f' est bien définie et continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
- f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$x = f^{-1}(y) \Longleftrightarrow f(x) = y \Longleftrightarrow \tan x = y \Longleftrightarrow x = \arctan y$$

c-à-d

$$f^{-1}(y) = \arctan y, \quad y \in \mathbb{R}$$

$$\forall y \in \mathbb{R} : \left(f^{-1}(y)\right)' = (\arctan y)' = \frac{1}{1+y^2}$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2)- Soit

$$f(x) = x^3, \quad x \in \mathbb{R}$$

f est bijective sur $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ car $f'(x) = 3x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$
f^{-1} n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,

$$y = f(x) \Longleftrightarrow y = x^3 \Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$$

donc

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} \ \text{ où } y \in \mathbb{R}$$

on a

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \left(y^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3y^{\frac{2}{3}}}$$

n'est pas définie en $y = 0$, donc f n'est pas un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 7: Si $f : U \to V$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U dans V où U et V deux ouverts de E et F respectivement alors sa différentielle en tout point de U est un isomorphisme de E dans F de plus la différentielle de f^{-1} est liée à la différentielle de f par la formule

$$df_y^{-1} = \left(df_{f^{-1}(y)}\right)^{-1} \ \text{ pour tout } y \in V.$$

Théorème d'inversion locale

Le théorème d'inversion locale fournit une sorte de réciproque de la proposition 7.

Théorème 8: Soit $f : U \to V$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, si $a \in U$ est tel que df_a soit un isomorphisme de E sur F alors il existe un voisinage ouvert U_a de a dans U et un voisinage ouvert V_b de $b = f(a)$ dans V tel que la restriction de f à U_a soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U_a sur V_b.

Exemple: On considère

$$f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \to f(x,y) = \left(x^2 - y^2, 2xy\right)$$

On a: $f \in \mathcal{C}^1 (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ (car les composantes sont des fonctions usuelles) de plus:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : \det Jac\ f_{(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4\left(x^2+y^2\right) \neq 0.$$

Alors f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Définition 9: Soit $f : E \to F$ où E et F deux espaces normés. On dit que f est lipschitzienne sur $U \subset E$ si et seulement si

$$\exists k > 0,\ \forall x, y \in U : \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E \ .$$

Si $0 < k < 1$ on dit que f est contractante.

Théorème des accroissements finis

Théorème 10: Soit $f : U \subset E \to F$ une fonction différentiable sur un ouvert convexe U où E et F deux espaces normés. S'il existe $k > 0$ tel que

$$\|df_x\| \leq k\ ,\quad \forall x \in U$$

$$\|df_x\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{h \neq 0_E} \frac{\|df_x(h)\|_F}{\|h\|_E}$$

alors

$$\forall x, y \in U : \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E \ .$$

Théorème de Banach-Picard

Théorème 11: Soit C un fermé non vide d'un espace de Banach E. Si $f : C \to C$ une fonction contractante sur C alors il existe un unique point $x \in C$ tel que $f(x) = x$ (c-à-d f admet un seul point fixe).

Théorème d'inversion globale

Corollaire 12: Une application $f : U \subset E \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U (U ouvert non vide) est un difféomorphisme de U sur $f(U)$ si et seulement si f est injective et sa différentielle en tout point de U est un isomorphisme de E sur F.

En dimension finie, le résultat peut s'énoncer ainsi:

Corollaire 13: Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application injective et de classe $\mathcal{C}^1$. Alors f est un difféomorphisme si et seulement si sa matrice jacobienne en tout point de U est inversible c-à-d

$$\forall a \in U \subset \mathbb{R}^n : \det Jac\ f_a \neq 0.$$

Exemple: Le théorème d'inversion globale assure que la fonction

$$f : (r, \theta) \to (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus (]-\infty, 0] \times \{0\})$.

Exercice: Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par:

$$(x, y) \to f(x, y) = \left(x^2 - y^2 - 2xy, y\right)$$

1)- Montrer que f définit une bijection de $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x > y\}$ sur $V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ u + 2v^2 > 0\}$.
2)- L'application f est-elle un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V ?

Solution:

1)-

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2 - y^2 - 2xy = u \\ y = v \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} y = v \\ x^2 - 2xv - v^2 - u = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} y = v \\ x = v \pm \sqrt{u + 2v^2} \\ \text{avec } u + 2v^2 > 0. \end{array} \right.$$

Donc l'application f est bijective si $x > y$, car le seul choix est $x = v + \sqrt{u + 2v^2}$. L'application réciproque est définie de V sur U par

$$f^{-1} : (u, v) \in V \to f^{-1}(u, v) = \left(v + \sqrt{u + 2v^2}, v\right).$$

2)- Oui, car les différentielles

$$df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x - 2y & -2y - 2x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ df^{-1}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{u+2v^2}} & 1 + \frac{2v}{\sqrt{u+2v^2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont continues sur U et V .

Théorème des fonctions implicites

Le théorème des fonctions implicites nous permet de dire à quel moment une courbe définie par une équation du type $f(x, y) = 0$ est localement le graphe d'une fonction $y = \varphi(x)$ où la régularité de φ est liée à celle de f. Par exemple considérons la courbe définie par $f(x, y) = 0$ où $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ (cercle unité), et soit $a \in]-1, 1[$, il est clair qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour x dans l'intervalle $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ la courbe $f(x, y) = 0$ coïncide avec le graphe de $\varphi(x) = y = \sqrt{1 - x^2}$. Cela est lié au fait que la tangente à la courbe en $\left(a, b = \sqrt{1 - a^2}\right)$ n'est pas verticale, c'est à dire $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 2b \neq 0$. Au contraire, en $(1, 0)$ où la tangente à la courbe est verticale, la courbe n'est jamais le graphe d'une fonction du type $y = \varphi(x)$. Le théorème des fonctions implicites concerne la résolution d'une équation non linéaire de la forme $f(x, y) = 0$, il signifie qu'on peut en tirer y comme fonction de x. On dit alors que $f(x, y) = 0$ définit implicitement y, ou encore y comme fonction implicite de x.

Théorème 14: Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $(a, b) \in U$ tel que

$$f(a, b) = 0 \ , \ \ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0.$$

Alors il existe $\alpha > 0$, $\beta > 0$ tels que
1)- $\forall x \in \left]a-\alpha, a+\alpha\right[$ l'équation implicite $f(x,y) = 0$ admet une solution unique $y = \varphi(x) \in \left]b-\beta, b+\beta\right[$.
2)- φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]a-\alpha, a+\alpha\right[$ et on a

$$\varphi'(a) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)}.$$

Le théorème des fonctions implicites (cas général)

Théorème 15: Soit U un ouvert non vide de $E \times F$ et $f : U \to G$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (E, F et G sont des espaces de Banach). On suppose qu'il existe $(a,b) \in U$ tel que $f(a,b) = 0_G$ et la différentielle partielle de f par rapport à y au point (a,b) est un isomorphisme de F sur G. Alors il existe un voisinage ouvert $U_{(a,b)}$ de (a,b) dans U et un voisinage ouvert W_a de a dans E et une fonction $\varphi : W_a \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\left(\ \forall (x,y) \in U_{(a,b)} : f(x,y) = 0_G\ \right) \Longleftrightarrow \left(\ y = \varphi(x),\ x \in W_a\ \right).$$

En dimension finie, ce théorème peut se formuler comme suit

Théorème 16: Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'en $(a,b) \in U$ ($a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$) $f(a,b) = 0$ et la différentielle partielle de f par rapport à y au point (a,b) est inversible

$$\det df_y(a,b) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}(a,b) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m}(a,b) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1}(a,b) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m}(a,b) \end{pmatrix} \neq 0\ .$$

Alors il existe un voisinage ouvert $V \times W \subset U$ de (a,b) et une unique fonction $\varphi : V \to W$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\left(\ \forall (x,y) \in V \times W : f(x,y) = 0\ \right) \Longleftrightarrow \left(\ \forall x \in V :\ y = \varphi(x)\ \right).$$

Le cas particulier $n = 1$ et $m = 1$ est donné par le théorème suivant

Théorème 17: Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $(a,b) \in U$ tel que $f(a,b) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$. Alors il existent $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et une unique fonction $\varphi : \left]a-\alpha, a+\alpha\right[\to \left]b-\beta, b+\beta\right[$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\left(\ \forall (x,y) \in \left]a-\alpha, a+\alpha\right[\times \left]b-\beta, b+\beta\right[: f(x,y) = 0\ \right) \Longleftrightarrow \left(\ \forall x \in \left]a-\alpha, a+\alpha\right[:\ y = \varphi(x)\ \right)$$

de plus

$$\varphi'(a) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)}.$$

Exercice:
1)- Démontrer que la relation

$$x + y + z + \sin(xyz) = 0$$

définit z comme fonction $\mathcal{C}^1$ de x et de y au voisinage du point $(0,0,0)$.
2)- Calculer $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ au voisinage du point $(0,0)$.

Solution:
1)- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z) = x + y + z + \sin(xyz).$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, elle vérifie $f(0,0,0) = 0$ et sa dérivée partielle par rapport à z est

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 1 + xy\cos(xyz).$$

En particulier $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 1 \neq 0$, et le théorème des fonctions implicites s'applique. Il existe donc un voisinage $\mathcal{U}$ de $(0,0)$, un intervalle ouvert I contenant 0 et une fonction $g : \mathcal{U} \to I$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que

$$\forall (x,y,z) \in \mathcal{U} \times I,\ f(x,y,z) = 0 \Longleftrightarrow z = g(x,y).$$

2)-

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)} = -1.$$

Surfaces régulières

homéomorphisme

Définition 1: Une application X d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans un ouvert V de $\mathbb{R}^m$ est un homéomorphisme si et seulement si X est continue et bijective et son inverse X^{-1} est continue. U et V sont alors dits homéomorphes.

Surfaces

Définition 2: Un sous-ensemble $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$ est une surface si pour tout point p de $\mathcal{S}$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et un ouvert V de $\mathbb{R}^3$ contenant p tel que U et $\mathcal{S} \cap V$ sont homéomorphes.

c-à-d il existe un homéomorphisme X de U dans $\mathcal{S} \cap V$.

- L'application X est dite une paramétrisation de la surface $\mathcal{S}$ au point p.

Surfaces régulières

Définition 3: On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$ est une surface régulière si pour tout point p de $\mathcal{S}$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, un ouvert V de $\mathbb{R}^3$ contenant p et une application différentiable

$$\begin{array}{rcl} X & : & U \subset \mathbb{R}^2 \to V \cap \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \to & (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{array}$$

tels que

1)- X est un homéomorphisme sur U

2)- pour tout $q \in U \subset \mathbb{R}^2$, la différentielle de X au point q est de rang 2.

Surfaces définies implicitement

Définition 4: On dit qu'une surface $\mathcal{S}$ est définie implicitement s'il existe une fonction F de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\mathcal{S} = \left\{(x,y,y) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,y) = 0\right\}.$$

La surface est régulière au point (x_0, y_0, z_0) si F est différentiable en (x_0, y_0, z_0) et le gradient $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ est non nul.

Surfaces définies explicitement

Définition 5: On dit qu'une surface $\mathcal{S}$ est définie explicitement s'il existe une fonction ϕ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\mathcal{S} = \left\{(x,y,y) \in \mathbb{R}^3 : z = \phi(x,y),\ \ (x,y) \in U \subset \mathbb{R}^2\right\}.$$

Remarques:

1)- Rappel sur le produit vectoriel

$$\begin{aligned}\forall (a,b,c)\,,\ (x,y,z) &\in \mathbb{R}^3 : \\ (a,b,c) \wedge (x,y,z) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = (bz - yc)\,\vec{i} - (az - cx)\,\vec{j} + (ay - xb)\,\vec{k}\ .\end{aligned}$$

2)- Condition de régularité

On sait que la différentielle de X au point $q \in U$ est définie par la matrice jacobienne de X au point q

$$dX_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad dX_q = \left(\frac{\partial X}{\partial u}(q)\ \frac{\partial X}{\partial v}(q) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{pmatrix}$$

Le rang de la matrice dX_q égale 2 donc les colonnes sont linéairement indépendantes, i.e leur produit vectoriel est non nul $\frac{\partial X}{\partial u}(q) \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(q) \neq \vec{0}$. Cela est équivalent à vérifier que les mineurs de dX_q ne sont pas nulles, où les mineurs sont

$$\frac{\partial (x,y)}{\partial (u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \frac{\partial (x,z)}{\partial (u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \frac{\partial (y,z)}{\partial (u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}\ .$$

Exemple: La sphère unité $\mathcal{S}^2$ est l'ensemble

$$\mathcal{S}^2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}.$$

Nous voulons justifier que c'est une surface régulière. Il s'agit de montrer que pour tout $p \in \mathcal{S}^2$ il existe une paramétrisation de la surface $\mathcal{S}^2$ au point p.

Soit $p = (x,y,z) \in \mathcal{S}^2$. On peut supposer que $z \neq 0$. Posons

$$U = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \right\}.$$

Si $z > 0$, on considère

$$\begin{aligned} X_1 \quad &: \quad U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \quad &\to \quad X_1(x,y) = \left(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2} \right). \end{aligned}$$

Montrons que X_1 est une paramétrisation de $\mathcal{S}^2$, où

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \right\}.$$

Tout d'abord on voit que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et l'image de U par X_1, $X_1(U)$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^3$ qui couvre le plan (xoy). On voit que:
1)- X_1 admet des dérivées partielles continues par rapport à x et à y car les fonctions $(x,y) \to x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, $(x,y) \to y$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $(x,y) \to 1-(x^2+y^2)$ est bien définie car $x^2+y^2<1$ et elle admet des dérivées partielles continues.
2)- X_1 est un homéomorphisme:
X_1 est continue et bijective car chaque point $(x,y,z) \in \mathcal{S}^2$ avec $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ alors il existe un unique point $(x,y) \in U$ tel que $X_1(x,y) = \left(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}\right)$ donc X_1^{-1} l'inverse de X_1 existe et on a

$$\begin{array}{ccc} X_1^{-1} & : & \mathcal{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \to U \subset \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \to & X_1^{-1}(x,y,z) = (x,y) \end{array}$$

est continue.
3)- La condition de régulirité:
on a

$$JacX_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & \dfrac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix}$$

on a le mineur:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ donc } \frac{\partial X_1}{\partial x} \wedge \frac{\partial X_1}{\partial y} \neq 0$$

de 1,2 et 3 alors X_1 est une paramétrisation de $\mathcal{S}^2$ sur le demi plan (xoy). Si $z<0$, de même on vérifie que

$$\begin{array}{ccc} X_2 & : & U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \to & X_2(x,y) = \left(x, y, -\sqrt{1-x^2-y^2}\right) \end{array}$$

est une paramétrisation de $\mathcal{S}^2$ sur le demi plan (xoy), on remarque que $X_1(U) \cup X_2(U)$ couvre la sphère $\mathcal{S}^2$ moins l'équateur $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1,\ z=0\}$. Donc, en utilisant les plans (xoz) et (yoz) pour couvrir complètement la sphère $\mathcal{S}^2$, on va définir les paramétrisations

$$\begin{array}{rcl} X_3(x,z) & = & \left(x, \sqrt{1-x^2-z^2}, z\right) \quad , \quad X_4(x,z) = \left(x, -\sqrt{1-x^2-z^2}, z\right) \\ X_5(y,z) & = & \left(\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z\right) \quad , \quad X_6(y,z) = \left(-\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z\right). \end{array}$$

Cela implique que la sphère unité $\mathcal{S}^2$ est une surface régulière de $\mathbb{R}^3$.

Graphes de fonctions

Proposition 6: Soit $h : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable définie sur un ouvert U. Le graphe de h c-à-d le sous ensemble de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\mathcal{S}_h = \{(x, y, h(x, y)) : (x, y) \in U\}$$

est une surface régulière.

Preuve: Il suffit de démontrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} X & : & U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \to & X(x, y) = (x, y, h(x, y)) \end{array}$$

est une paramétrisation du graphe $\mathcal{S}_h$, on a:

1)- X est différentiable sur U (car h est différentiable).

2)- X est continue (car X est différentiable) de plus X est bijective car par définition du graphe $\mathcal{S}_h$, un point (x, y, z) appartient à $\mathcal{S}_h$ s'il existe un seul point $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$ tel que $z = h(x, y)$. Comme X est bijective donc X^{-1} existe et on a

$$\begin{array}{rcl} X^{-1} & : & \mathbb{R}^3 \to U \subset \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \to & (x, y) \end{array}$$

alors X^{-1} n'est que la projection orthogonale du point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sur le plan (xoy), comme la projection est une application continue alors X^{-1} est aussi continue d'où X est un homéomorphisme.

3)- Condition de régularité

$$JacX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix}$$

le mineur

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

de 1,2 et 3: X est une paramétrisation du graphe $\mathcal{S}_h$.

Points critiques

Définition 7:

1)- Soit $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur U. Un point $p \in U$ est dit point critique (singulier) pour f si on a $f'(p) = 0$ c-à-d la dérivée de f au point p est l'ensemble des vecteurs nuls. Dans le cas contraire on dit que p est un point régulier pour f.

2)- Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable sur un ouvert U non vide de $\mathbb{R}^n$. Un point $p \in U$ est un point critique pour f si l'application différentielle de f au point p (c-à-d $df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$) est non surjective.

3)- Si $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur U et $p = (x_0, y_0, z_0) \in U$ donc

$$df_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(p) & \frac{\partial f}{\partial y}(p) & \frac{\partial f}{\partial z}(p) \end{pmatrix} = \nabla f_p$$

p est un point critique pour f si $df_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une application non surjective c-à-d $\mathrm{Im}(df_p) \subsetneq \mathbb{R}$ il vient que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p) = \frac{\partial f}{\partial z}(p) = 0.$$

L'ensemble

$$f(U) = \mathrm{Im}\, f = \{l \in \mathbb{R} : \exists (x, y, z) \in U : l = f(x, y, z)\}$$

est dit la valeur régulière de f si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ sont pas simultanément nulle à n'importe quel point de l'image inverse $f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = a\}$.

Proposition 8: Soit $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur U et soit $a \in f(U)$ une valeur régulière pour f. Alors l'image inverse de a par f (c-à-d $f^{-1}(a)$) est une surface régulière de $\mathbb{R}^3$.

Exemple: L'ellipsoïde

$$\mathbf{E} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1\right\}$$

est une surface régulière $(a, b, c \neq 0)$.
Posons

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1$$

donc

$$f^{-1}(\{0\}) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\right\} = \mathbf{E}$$

on a f est différentiable (de classe $\mathcal{C}^1$), 0 est une valeur régulière pour f car

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{2}{a}x \ , \ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{2}{b}y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{2}{c}z \ .$$

On voit que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0) = \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0) = 0$$

mais le point $(0, 0, 0) \notin f^{-1}(\{0\})$. d'où 0 est une valeur régulière pour f. D'aprés la proposition précédente $f^{-1}(\{0\})$ est une surface régulière dans $\mathbb{R}^3$ d'où $\mathbf{E} = f^{-1}(\{0\})$ est une surface régulière.

Proposition 9: Soit $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière et soit $p \in \mathcal{S}$ alors il existe un voisinage V de p dans $\mathcal{S}$ tel que V est le graphe d'une fonction différentiable qui a l'une des formes suivantes

$$z = f((x, y) \ , y = g(x, z) \ , x = h(y, z) .$$

Changement de paramètre

Proposition 10: Soit $\mathcal{S}$ une surface régulière de $\mathbb{R}^3$ et $p \in \mathcal{S}$. Soit $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{S}$ et $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{S}$ deux paramétrisations de la surface $\mathcal{S}$ au point p telles que $p \in X(U) \cap Y(V) = W$ alors le changement de coordonnées $h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \to X^{-1}(W)$ est un difféomorphisme.

Remarque: Si

$$\begin{aligned} X &: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{S} \\ (u,v) &\to X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Y &: V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{S} \\ (\zeta,\eta) &\to Y(\zeta,\eta) = (x(\zeta,\eta), y(\zeta,\eta), z(\zeta,\eta)). \end{aligned}$$

Alors le changement de coordonnées $h = X^{-1} \circ Y$ est donné par

$$\begin{aligned} h &= X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \to X^{-1}(W) \\ (\zeta,\eta) &\to h(\zeta,\eta) = (u(\zeta,\eta), v(\zeta,\eta)). \end{aligned}$$

Définition 11: Soit $f : V \subset \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert V d'une surface régulière $\mathcal{S}$. On dit que f est différentiable au point $p \in V$ si pour une paramétrisation $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec $p \in X(U) \subset V$ alors $f \circ X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable au point $X^{-1}(p)$.

Courbe régulière

Définition 12: Une courbe régulière de $\mathbb{R}^3$ est un sous ensemble $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ vérifiant la propriété suivante: Pour tout point $p \in \mathcal{C}$, il existe un voisinage V de p dans $\mathbb{R}^3$ et un homéomorphisme différentiable

$$\begin{aligned} \gamma &: I \subset \mathbb{R} \to V \cap \mathcal{C} \\ t &\to \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

(où I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$), tel que la différentielle $d\gamma_t$ admet des mineurs non nulles pour tout $t \in I$ (donc $\gamma(t)$ est une paramétrisation de la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de p).

Vecteur tangent

Définition 13: Soit $\mathcal{S}$ une surface régulière de $\mathbb{R}^3$ et p un point de $\mathcal{S}$. Un vecteur v de $\mathbb{R}^3$ est dit vecteur tangent de $\mathcal{S}$ au point p s'il existe une courbe régulière

$$\begin{aligned} \gamma &: I =]-a, a[\subset \mathbb{R} \to \mathcal{S} \\ t &\to \gamma(t) \end{aligned}$$

telle que

$$\gamma(0) = p \quad \text{et} \quad \gamma'(0) = \frac{d\gamma}{dt}(0) = v.$$

Proposition 14: Soit $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{S}$ une paramétrisation d'une surface régulière $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$ et $q_0 = (u_0, v_0) \in U$. Alors le sous espace vectoriel de dimension deux $dX_{q_0}(\mathbb{R}^2)$ coïncide avec l'ensemble des vecteurs tangents à la surface $\mathcal{S}$ au point $p_0 = X(q_0)$.

Plan tangent

Définition 15: Le plan $dX_{q_0}(\mathbb{R}^2)$ passe par le point $p_0 = X(q_0)$ ne dépend pas du choix de la paramétrisation X de $\mathcal{S}$. Ce plan est appelé le plan tangent à la surface $\mathcal{S}$ au point p_0

$$T_{p_0}(\mathcal{S}) = dX_{q_0}\left(\mathbb{R}^2\right) = \left\{ X(q_0) + \lambda \frac{\partial X}{\partial u}(q_0) + \mu \frac{\partial X}{\partial v}(q_0) \ \ / \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Vecteur normal (unitaire)

Définition 16: Le vecteur $\dfrac{\partial X}{\partial u}(q_0) \wedge \dfrac{\partial X}{\partial v}(q_0)$ dirige une droite normale à $\mathcal{S}$ en $p_0 = X(q_0)$, il sera noté $\mathcal{N}$. Le vecteur

$$n = \frac{\dfrac{\partial X}{\partial u}(q_0) \wedge \dfrac{\partial X}{\partial v}(q_0)}{\left\| \dfrac{\partial X}{\partial u}(q_0) \wedge \dfrac{\partial X}{\partial v}(q_0) \right\|}$$

est appelé vecteur unitaire normal à $\mathcal{S}$ en $p_0 = X(q_0)$.

Exercice: Considérons la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\mathcal{S} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2 \right\}$$

(Paraboloïde hyperbolique: La selle de cheval)
1)- Écrire $\mathcal{S}$ sous forme $f^{-1}(\{a\})$ où a est valeur régulière de f, puis déduire que $\mathcal{S}$ est une surface régulière de $\mathbb{R}^3$.
2)- Montrer que les deux applications

$$X_1(x, y) = (x + y, x - y, 4xy) \quad , \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$X_2(x, y) = \left(x \cosh y, x \sinh y, x^2\right) \quad , \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x \neq 0$$

sont deux paramétrisations de deux parties de $\mathcal{S}$.

Solution:

1)- Posons

$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z$$

donc

$$\mathcal{S} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0 \right\} = f^{-1}(\{0\}).$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2x\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=-2y\ ,\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=-1\neq 0$$

donc 0 est une valeur régulière de f (f n'admet pas de points critiques). Or que $\mathcal{S}=f^{-1}(\{0\})$. Alors $\mathcal{S}$ est une surface régulière.

2)- On montre que $\operatorname{Im} X_1 \subset \mathcal{S}$;

$$X_1(u,v)=(u+v,u-v,4uv)$$

si on pose

$$x=u+v\ ,\ y=u-v\ ,\ z=4uv$$

alors

$$x^2-y^2=(u+v)^2-(u-v)^2=4uv=z.$$

D'où $\operatorname{Im} X_1 \subset \mathcal{S}$.
On a:
a)- X_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (fonctions polynômiales) donc X_1 est différentiable.
b)- X_1 est homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ car:
si

$$x=u+v\ ,\ y=u-v\ ,\ z=4uv$$

alors

$$u=\frac{x+y}{2} \text{ et } v=\frac{x-y}{2}$$

d'où X_1 est bijective, X_1 et X_1^{-1} sont continues.
c)- Condition de régularité:

$$JacX_1=\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 4v & 4u \end{array}\right|$$

on a le mineur

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array}\right|=-2\neq 0$$

d'où la régularité.
On peut utiliser:

$$dX_{1u}\wedge dX_{1v}=\left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{array}\right|=\left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 4v \\ 1 & -1 & 4u \end{array}\right|=4(u+v)\overrightarrow{i}-4(u-v)\overrightarrow{j}-2\overrightarrow{k}\neq\overrightarrow{0}$$

ou

$$\|dX_{1u}\wedge dX_{1v}\|^2=16(u+v)^2+16(u-v)^2+4=32\left(u^2+v^2\right)\neq 0.$$

Intégrale de surface

Définition 17: Soit $\mathcal{S}$ une surface paramétrée déterminée par sa paramétrisation $X(u,v)$, $(u,v) \in U$. Soit f une fonction définie sur $\mathcal{S}$. On définit l'intégrale de surface de f sur $\mathcal{S}$ par

$$\iint_{\mathcal{S}} f d\sigma = \iint_U f(X(u,v)) \left\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\| dudv.$$

Lorsque $f = 1$, l'intégrale de surface de f est l'aire de la surface $\mathcal{S}$

$$\mathrm{Aire}(\mathcal{S}) = \iint_U \left\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\| dudv.$$

Si la surface est donnée par une équation $z = \phi(x,y)$, où ϕ est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur U, l'intégrale de surface de f sur $\mathcal{S}$ est donnée par

$$\iint_{\mathcal{S}} f d\sigma = \iint_U f(x,y,\phi(x,y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2} dxdy.$$

Exemple: Soit $\mathcal{S}$ la surface définie par $z = x^2 + y$ avec $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \ -1 \leq y \leq 1\}$. Calculer l'intégrale de surface de la fonction $f(x,y,z) = x$.

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} f d\sigma &= \iint_U x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2} dxdy \\ &= \int_0^1 x\sqrt{2+4x^2} dx \int_{-1}^1 dy = \left[\frac{\sqrt{2}}{3}\left(1+2x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{3} + \sqrt{6}. \end{aligned}$$