Modèles stochastiques
Master 2 M-A

Exercice 1: On tire simultanément deux jetons d'une urne contenant quatre jetons numérotés de 1 à 4. Soit X le plus petit et Y le plus grand des numéros obtenus.

1)- Déterminer la loi conjointe et les lois marginales de X et Y.

2)- X et Y sont-elles indépendantes?

3)- Déterminer la loi conditionnelle de Y lorsque le plus petit numéro toré vaut 3.

4)- Déterminer la loi conditionnelle de X lorsque le plus grand numéro tiré est pair.

5)- Déterminer l'espérance et l'écart-type de Y lorsque le plus petit numéro tiré vaut 3.

6)- Calculer $cov\,(X, Y)$.

Solution:

1)- Loi conjointe de X et Y :

$X \backslash Y$	2	3	4	Total
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$
2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
3	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Total	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	1

Loi marginale de X :

x_i	1	2	3
$p_{i.}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Loi marginale de Y :

y_j	2	3	4
$p_{.j}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

2)- X et Y ne sont pas indépendantes, car il y a plusieurs cas où $p_{ij} \neq p_{i.}p_{.j}$ $(p_{21} \neq p_{2.}p_{.1})$.

3)- Loi conditionnelle de Y lorsque le plus petit numéro tiré vaut 3 :

y_j	2	3	4
$p_{j/X=3}$	0	0	1

4)- Loi conditionnelle de X lorsque le plus grand numéro tiré est pair

x_i	1	2	3
$p_{i/(Y=2 \text{ ou } 4)}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

5)-

$$E\,(Y\,/X = 3\,) = 4 \;;\; \sqrt{Var\,(Y\,/X = 3\,)} = 0$$

6)-

$$\begin{aligned}
cov\left(X,Y\right) &= E\left(XY\right)-E\left(X\right)E\left(Y\right) \\
&= \frac{1}{6}\left[1(2)+1(3)+1(4)+2(3)+2(4)+3(4)\right]- \\
&\quad -\left[\frac{3}{6}(1)+\frac{2}{6}(2)+\frac{1}{6}(3)\right]\left[\frac{1}{6}(2)+\frac{2}{6}(3)+\frac{3}{6}(4)\right] \\
&= \frac{5}{18}
\end{aligned}$$

Exercice 2: Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires dont la loi est déterminée par la densité:

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases} kxy & \text{si } (x,y)\in[0,2]\times[0,5] \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

1)- Déterminer la valeur de k.
2)- Déterminer les lois marginales de X et Y.
Ces variables sont-elles indépendantes?
3)- Déterminer la loi conditionnelle de $X\,/Y=y$.

Solution:
1)- On a

$$\iint_{\mathbb{R}} f\left(x,y\right)dxdy=1\Longrightarrow k\left(\int_0^2 xdx\right)\left(\int_0^5 ydy\right)=1\Longrightarrow k=\frac{1}{25}.$$

2)- Loi marginale de X :

$$x\in[0,2]:f_X\left(x\right)=\int_{\mathbb{R}} f\left(x,y\right)dy=k\int_0^5 xydy=\frac{1}{25}\left[x\frac{y^2}{2}\right]_0^5=\frac{x}{2}$$

$$x\notin[0,2]:f_X\left(x\right)=0$$

Loi marginale de Y :

$$y\in[0,5]:f_Y\left(y\right)=\int_{\mathbb{R}} f\left(x,y\right)dx=k\int_0^2 xydy=\frac{1}{25}\left[\frac{x^2}{2}y\right]_0^2=\frac{2}{25}y$$

$$y\notin[0,5]:f_Y\left(y\right)=0$$

On a:

$$\forall x\in[0,2]\,,\ \forall y\in[0,5]:f_X\left(x\right)f_Y\left(y\right)=f\left(x,y\right)$$

donc X et Y sont indépendantes.

3)- Loi conditionnelle $X/Y=y$:

$$f_{X/Y}(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=f_X(x)=\frac{x}{2}.$$

Exercice 3: Soit $\Omega=\{1,2,3,4,5\}$ muni de la tribu $\mathcal{F}=\mathcal{P}(\Omega)$. Soit $X,Y:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ définies par $X(1)=X(2)=0$, $X(3)=1$, $X(4)=X(5)=2$ et $Y(\omega)=\omega^2$ pour tout $\omega\in\Omega$.

1)- Donner la tribu $\sigma(X)$ engendrée par X.

(rappel: c'est la plus petite tribu $\mathcal{G}$ de Ω telle que $X:(\Omega,\mathcal{G})\longrightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable).

2)- On munit Ω de la loi uniforme. Donner $E(Y/\sigma(X))$.

(Soit X une variable aléatoire on note $E(Y/X)=E(Y/\sigma(X))$ où $\sigma(X)$ est la tribu engendrée par X et $Y\in L^1$).

Solution:

1)-

$$\begin{aligned}\sigma(X)&=\sigma(\{1,2\},\{3\},\{4,5\})\\&=\{\phi,\Omega,\{1,2\},\{3\},\{4,5\},\{1,2,3\},\{1,2,4,5\}\{3,4,5\}\}\end{aligned}$$

2)- Soit $Z=E(Y/\sigma(X))$. Z est $\sigma(X)$-mesurable donc constante sur chacun des ensembles $\{1,2\},\{3\}$ et $\{4,5\}$. Par ailleurs, si A est un de ces trois ensembles, on a :

$$E(Z1_A)=E(Y1_A).$$

Donc:

$$\sum_{\omega\in A}Z(\omega)P(\omega)=\sum_{\omega\in A}Y(\omega)P(\omega).$$

Si $A=\{1,2\}$, on obtient:

$$Z(1)P(1)+Z(2)P(2)=Y(1)P(1)+Y(2)P(2)$$

comme $Z(1)=Z(2)$, alors:

$$Z_{\{1,2\}}(P(1)+P(2))=Y(1)P(1)+Y(2)P(2)$$

$$\Longrightarrow Z_{\{1,2\}}=\frac{5}{2}$$

et on trouve:

$$Z_{\{3\}}=9\ ,\ Z_{\{4,5\}}=\frac{41}{2}.$$

Exercice 4: Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_n, P)$ un espace probablisé filtré et

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} 1_{B_k}$$

avec $B_n \in \mathcal{F}_n$ pour tout n.

Montrer que (X_n) est une sous martingale.

Solution:

Le processus (X_n) est adapté ($X_n \in \mathcal{F}_n$) et intégrable ($E(|X_n|) < \infty$). De plus:

$$E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = E\left(1_{B_{n+1}} + X_n/\mathcal{F}_n\right) = E\left(1_{B_{n+1}}/\mathcal{F}_n\right) + X_n \geq X_n$$

car

$$1_{B_{n+1}} \geq 0 \Longrightarrow E\left(1_{B_{n+1}}/\mathcal{F}_n\right) \geq 0.$$

Donc (X_n) est une sous martingale.

Exercice 5: Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit:

$$f(x,y) = 6xy\ 1_{\left\{0<y<\sqrt{x}<1\right\}}$$

1)- Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2)- Calculer les densités marginales f_X et f_Y .
3)- Calculer $f_{X/Y}(x/y)$ et $f_{Y/X}(y/x)$.
4)- Calculer $E(X/Y)$ et $E(Y/X)$.

Solution:

1)- On a:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} 6xydy \\ &= \int_0^1 dx\left[3xy^2\right]_0^{\sqrt{x}} \\ &= \int_0^1 3x^2dx = \left[x^3\right]_0^1 = 1\end{aligned}$$

donc f est une densité de probabilité.

2)- Loi marginale de X:

$$f_X(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy & \text{si } x \in \left]0,1\right[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on a:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \int_0^{\sqrt{x}} 6xydy = \left[3xy^2\right]_0^{\sqrt{x}} = 3x^2$$

donc:

$$f_X(x) = 3x^2 1_{\{0<x<1\}}.$$

Loi marginale de Y:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx & \text{si } y \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on a:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx = \int_{y^2}^{1} 6xydx = \left[3x^2y\right]_{y^2}^{1} = 3y\left(1-y^4\right)$$

donc:

$$f_Y(y) = 3y\left(1-y^4\right) 1_{\{0<y<1\}}.$$

3)-

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2x}{1-y^4} 1_{\{0<y<\sqrt{x}<1\}}$$

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{2y}{x} 1_{\{0<y<\sqrt{x}<1\}}.$$

4)-

$$E(X/Y=y) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X/Y}(x/y)dx = \int_{y^2}^{1} \frac{2x^2}{1-y^4}dx = \left[\frac{2}{1-y^4}\frac{x^3}{3}\right]_{y^2}^{1} = \frac{2\left(1-y^6\right)}{3\left(1-y^4\right)}$$

$$E(Y/X=x) = \int_{\mathbb{R}} y f_{Y/X}(y/x)dy = \int_{0}^{\sqrt{x}} \frac{2y^2}{x}dy = \left[\frac{2}{x}\frac{y^3}{3}\right]_{0}^{\sqrt{x}} = \frac{2}{3}\sqrt{x}.$$