Modèles stochastiques
Applications à la finance

Mathématiques appliquées

Master 2

Table des matières

Couples de variables aléatoires

Loi conjointe et lois marginales et conditionnelles

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espce probabilisé. X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles est une application mesurable de Ω dans $\mathbb{R}^2$. La loi du couple (X, Y) est définie par l'ensemble des valeurs possibles du couple (qui est un ensemble fini ou dénombrable) noté $\{(x_i, y_j),\ i \in I,\ j \in J\}$ et par les probabilités associées

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) \quad \text{telles que } p_{ij} \geq 0 \ \text{ et } \sum_{i,j} p_{ij} = 1$$

dans le cas discret, et dans le cas continu par l'ensemble des valeurs possibles du couple (qui est un ensemble infini non dénombrable) et par une densité de probabilité f telle que

$$f(x, y) \geq 0 \ \text{ et } \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dxdy = 1.$$

Les lois marginales d'un couple (X, Y) sont les lois de X et de Y tells que:
cas discret:

$$\begin{aligned} P(X &= x_i) = p_{i.} = \sum_j p_{ij} \\ P(Y &= y_j) = p_{.j} = \sum_i p_{ij} \end{aligned}$$

cas continu:

$$\begin{aligned} \text{densité de } X &: \ f(x, .) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dy \\ \text{densité de } Y &: \ f(., y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dx \end{aligned}$$

Les lois conditionnelles d'un couple (X, Y) sont les lois de $X / Y = y$ et de $Y / X = x$ telles que:
cas discret:

$$\begin{aligned} P(X = x_i / Y = y_j) &= \frac{p_{ij}}{p_{.j}} \\ P(Y = y_j / X = x_i) &= \frac{p_{ij}}{p_{i.}} \end{aligned}$$

cas continu:

$$\begin{aligned} \text{densité de } X / Y = y &: \ f(x / y) = \frac{f(x, y)}{f(., y)} \\ \text{densité de } Y / X = x &: \ f(y / x) = \frac{f(x, y)}{f(x, .)} \end{aligned}$$

On dit que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes si:
cas discret:

$$p_{ij} = p_{i.}p_{.j} \quad \forall i \in I,\ \forall j \in J$$

ou

$$P\left(X = x_i \,/ Y = y_j\right) = p_{i.} \quad \forall i \in I,\ \forall j \in J$$

cas continu:

$$f\left(x, y\right) = f\left(x, .\right) f\left(., y\right) \quad \forall x,\ \forall y$$

ou

$$f\left(x \,/ y\right) = f\left(x, .\right) \quad \forall x,\ \forall y\ .$$

Espérance, variance et covariance:

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $\left(\Omega, \mathcal{P}\left(\Omega\right), P\right)$.
On a:

$$E\left(X + Y\right) = E\left(X\right) + E\left(Y\right).$$

et pour tous réels a et b, $Z = aX + b$ on a:

$$E\left(Z\right) = aE\left(X\right) + b.$$

$$Var\left(Z\right) = a^2 Var\left(X\right).$$

$$Cov\left(X, Y\right) = E\left[\left(X - E\left(X\right)\right)\left(Y - E\left(Y\right)\right)\right]$$

où

$$Cov\left(X, Y\right) = E\left(XY\right) - E\left(X\right) E\left(Y\right).$$

$$X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes } \Longrightarrow Coc\left(X, Y\right) = 0.$$

Espérance conditionnelle

Définition 1: Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espce probabilisé et X une variable aléatoire et $A \in \mathcal{F}$. On définit l'espérence conditionnelle de X sachant A (l'espérence de X conditionnée par A) par;

$$E\left(X \left/ A\right.\right) = \sum_{x_i} x_i P_A\left(X = x_i\right) = \frac{1}{P\left(A\right)} \sum_{x_i} x_i P\left(\{X = x_i\} \cap A\right)$$

X est une variable aléatoire discrète, et

$$E\left(X \left/ A\right.\right) = \frac{1}{P\left(A\right)} E\left(X 1_A\right) = \frac{1}{P\left(A\right)} \int_A X dP$$

si X est une variable aléatoirev continue, où 1_A est la fonction indicatrice de A. Si f est une densité de la variable aléatoire X alors:

$$E\left(X \left/ A\right.\right) = \frac{1}{P\left(A\right)} \int_{X(A)} x f(x) dx$$

Si (A_i) est une partition de Ω formée d'évènements de probabilité non nulle:

$$E\left(X\right) = \sum_i P\left(A_i\right) E\left(X \left/ A_i\right.\right)$$

(formules des espérances totales).

Espérance conditionnée par une variable aléatoire

Définition 2: Soit X une variable aléatoire réelle dont l'espérance est définie et Y une variable aléatoire discrète. L'espérance conditionnelle de X sachant Y est la variable aléatoire réelle définie par:

$$E\left(X \left/ Y\right.\right) = \varphi(Y)$$

où la fonction φ est donnée par:

$$\begin{array}{ccl} \varphi & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y & \to & \varphi(y) = \left\{ \begin{array}{cc} E\left(X \left/ Y = y\right.\right) = \frac{E\left(X 1_{Y=y}\right)}{P(Y=y)} & \text{si } P\left(Y = y\right) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array}$$

En particulier si X est discrète:

$$E\left(X \left/ Y = y\right.\right) = \sum_k x_k P\left(X = x_k \left/ Y = y\right.\right).$$

Exemple: Lancer d'un dé. on prend $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ et $P(\{\omega\}) = \frac{1}{6}$ pour tout ω. Soient $X(\omega) = \omega$ et

$$Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si est } \omega \text{ impair} \\ 0 & \text{si est } \omega \text{ pair} \end{cases}$$

Alors

$$E(X/Y)(\omega) = \begin{cases} 3 & \text{si } \omega \in \{1,3,5\} \\ 4 & \text{si } \omega \in \{2,4,6\}. \end{cases}$$

Définition-Proposition 3: Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espce probabilisé, $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ intégrable. Alors, il existe une unique variable aléatoire réelle Y $\mathcal{B}$-mesurable et intégrable telle que

$$\forall B \in \mathcal{B} : \int_B X dP = \int_B Y dP$$

ou

$$\forall B \in \mathcal{B} : E(1_B X) = E(1_B Y)$$

Y est appelée espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$, notée $E(X / \mathcal{B})$.

Propriétés : Soient X et Y deux variables aléatoires réelles intégrables:

1)-

$$E(aX + bY + c / \mathcal{B}) = aE(X / \mathcal{B}) + bE(Y / \mathcal{B}) + c$$

2)-

$$X \leq Y \Longrightarrow E(X / \mathcal{B}) \leq E(Y / \mathcal{B})$$

3)-

$$E(E(X / \mathcal{B})) = E(X)$$

4)-

$$E(E(X / \mathcal{B}) / \mathcal{B}) = E(X / \mathcal{B}).$$

5)- Si X est $\mathcal{B}$-mesurable alors

$$E(X / \mathcal{B}) = X.$$

6)- Si X est indépendante de $\mathcal{B}$ alors:

$$E(X / \mathcal{B}) = E(X).$$

7)- Pour tout Y variable aléatoire réelle bornée, $\mathcal{B}$-mesurable

$$E(XY) = E(E(X / \mathcal{B})Y).$$

8)- Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe telle que $\varphi(X)$ soit intégrable, alors:

$$\varphi(E(X / \mathcal{B})) \leq E(\varphi(X) / \mathcal{B}) \quad p.s \quad \text{(Inégalité de Jensen)}$$

En particulier:

$$|E(X / \mathcal{B})| \leq E(|X| / \mathcal{B}) \quad p.s$$

$$(E(X / \mathcal{B}))^2 \leq E\left(X^2 / \mathcal{B}\right) \quad p.s$$

$$\forall p \geq 1 \quad |E(X / \mathcal{B})|^p \leq E(|X|^p / \mathcal{B}) \quad p.s$$

9)- Si Y est $\mathcal{B}$-mesurable et XY est intégrable:

$$E(XY / \mathcal{B}) = Y E(X / \mathcal{B})$$

10)- Si $\mathcal{C}$ est une sous-tribu de $\mathcal{B}$

$$E(E(X / \mathcal{B}) / \mathcal{C}) = E(X / \mathcal{C}).$$

Définition 4: On dit que (X_n) converge presque sûrement vers X si

$$P\left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} X_n = X\right) = 1$$

ou de manière équivalente s'il existe un sous-ensemble P-négligeable $N \subset \Omega$ tel que

$$\forall \omega \in \Omega \backslash N \ , \ X_n(\omega) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} X(\omega)$$

et on écrit

$$X_n \xrightarrow{p.s} X$$

Théorème 5: (Théorème de convergence monotone)

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles, positive et presque sûrement croissante. Soit $X = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} X_n$. Alors:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} E(X_n / \mathcal{B}) = E\left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} X_n / \mathcal{B}\right) = E(X / \mathcal{B}) \quad p.s$$

Théorème 6: (Théorème de convergence dominée)

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles telle que $X_n \xrightarrow{p.s} X$ et il existe une variable aléatoire réelle Z telle que $|X_n| \leq Z$ $p.s$. Alors:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} E(X_n / \mathcal{B}) = E\left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} X_n / \mathcal{B}\right) = E(X / \mathcal{B}) \quad p.s$$

Martingales à temps discret

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espce probabilisé

Définition 1:

- On appelle processus la suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
- Une filtration $(\mathcal{F}_n)_n$ est une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}.$$

- On dit que le processus $(X_n)_n$ est adaptè à à la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$ (est $(\mathcal{F}_n)_n$ adapté) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable.
- On appelle filtration naturelle adapté au processus $(X_n)_n$ la filtration définie par $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, ..., X_n)$.
- Un processus $(X_n)_n$ est dit prévisible si, pour tout $n \geq 1$, X_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable.
- On appelle $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_n, P)$ espace de probabilité filtré.

Définition 2: On dit que le processus $(X_n)_n$ est une martingale, si pour tout $n \geq 0$:

$-$ $E(|X_n|) < +\infty$, (X_n est intégrable)
$-$ $X_n \in \mathcal{F}_n$, (X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable)
$-$ $E(X_{n+1} / \mathcal{F}_n) = X_n$.

Définition 3: On dit que:

- $(X_n)_n$ est une sous-martingale, si pour tout $n \geq 0$:
  $-$ $E(|X_n|) < +\infty$ et $X_n \in \mathcal{F}_n$
  $-$ $E(X_{n+1} / \mathcal{F}_n) \geq X_n$.
- $(X_n)_n$ est une sur-martingale, si pour tout $n \geq 0$:
  $-$ $E(|X_n|) < +\infty$ et $X_n \in \mathcal{F}_n$
  $-$ $E(X_{n+1} / \mathcal{F}_n) \leq X_n$.

Proposition 4: Soit $(X_n)_n$ une martingale (respectivement une sous-martingale, une sur-maringale)

1)- Pour tous $n \geq k \geq 0$: $E(X_n / \mathcal{F}_k) = X_k$ (respectivement $E(X_n / \mathcal{F}_k) \geq X_k$, $E(X_n / \mathcal{F}_k) \leq X_k$).

2)- Pour tout $n \geq 0$: $E(X_n) = E(X_0)$ (respectivement $E(X_n) \geq E(X_0)$, $E(X_n) \leq E(X_0)$).

3)- Si $(X_n)_n$ est une martingale et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que pour tout $n \geq 0$ la variable aléatoire $\varphi(X_n)$ est intégrable alors la suite $(\varphi(X_n))_n$ est une sous-martingale. En particulier si $(X_n)_n$ est une martingale alors $(|X_n|)_n$ est une sous-martingale ($(X_n^2)_n$ est une sous-martingale).

Remarque: Une martingale est liée à un jeu équitable.

X_n représente la fortune d'un joueur au moment n. $\mathcal{F}_n$ est l'information dont il dispose au moment n. La fortune moyenne au moment $n+1$, sachant le passé jusqu'à n est l'avoir au moment n (ni perte, ni gain). X_1 est la fortune initiale du joueur.

Pour tout $n \geq 1$, $Z_{n+1} = X_{n+1} - X_n$ représente le gain au $n^{\text{ième}}$ coup. La tribu $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n) = \sigma(Z_1, ..., Z_n)$ renferme toute l'information jusqu'à l'instant n, et l'on a

$$E\left(X_{n+1} \,/\, \mathcal{F}_n\right) - X_n = E\left(Z_{n+1} \,/\, \mathcal{F}_n\right).$$

Si $(X_n)_n$ est une sous-martingale, $E\left(Z_{n+1} \,/\, \mathcal{F}_n\right) \geq 0$ le jeu est favorable au joueur.

Si $(X_n)_n$ est une martingale, $E\left(Z_{n+1} \,/\, \mathcal{F}_n\right) = 0$ le jeu est équitable.

Si $(X_n)_n$ est une sur-martingale, $E\left(Z_{n+1} \,/\, \mathcal{F}_n\right) \leq 0$ le jeu est défavorable.

Exemples:

1)- Marche aléatoire:

Soit $(Z_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes intégrables telles que $E(Z_n) = 0$, $\forall n \geq 0$.

On pose $X_0 = 0$, $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Z_k$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, ..., Z_n)$.

On a alors $X_n - X_{n-1} = Z_n$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$. En effet: $X_1 = Z_1 \in \sigma(Z_1)$ et $X_1 \in \sigma(X_1)$, et $X_2 = X_1 + Z_2$ donc $Z_2 = X_2 - X_1 \in \sigma(X_1, X_2)$.

(X_n) est une martingale:

$$E\left(X_{n+1} \,/\, \mathcal{F}_n\right) = E\left(X_n \,/\, \mathcal{F}_n\right) + E\left(Z_{n+1} \,/\, \mathcal{F}_n\right) = X_n + E(Z_{n+1}) = X_n.$$

2)- Soit X une variable aléatoire réelle intégrable et $(\mathcal{F}_n)_n$ une filtration. On pose $X_n = E\left(X \,/\, \mathcal{F}_n\right)$. Alors (X_n) est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale:

$$E\left(X_{n+1} \,/\, \mathcal{F}_n\right) = E\left(E\left(X \,/\, \mathcal{F}_{n+1}\right) \,/\, \mathcal{F}_n\right) = E\left(X \,/\, \mathcal{F}_n\right) = X_n$$

Une martingale de ce type est dite formée.

3)- Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires positives, bornées et indépendantes et $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, ..., Y_n)$ et $X_n = \prod\limits_{k=1}^{n} Y_n$. Si $E(Y_n) = 1$ pour tout n, alors (X_n) est une martingale, car:

$$E\left(X_{n+1} \,/\, \mathcal{F}_n\right) = E\left(X_n Y_{n+1} \,/\, \mathcal{F}_n\right) = X_n E(Y_{n+1}) = X_n.$$

Transformation de martingale

Théorème 5: (Intégrale stochastique discrète)

Soit $(X_n)_n$ un processus adapté et $(H_n)_n$ un processus prévisible tel que, pour tout n, la variable $H_n(X_n - X_{n-1})$ soit intégrable. Alors, on définit le processus $(H.X)$ de la façon suivante:

$$(H.X)_n = H_0 X_0 + \sum_{k=1}^{n} H_k \left(X_k - X_{k-1} \right).$$

Si $(X_n)_n$ est une martingale et $(H_n)_n$ est une suite de variables aléatoires prévisibles alors $H.X$ est une martingale.

Démonstration: On utilise

$$\begin{aligned} E\left((H.X)_{n+1} - (H.X)_n \,/\, \mathcal{F}_n\right) &= E\left(H_{n+1}\left(X_{n+1} - X_n\right) / \,\mathcal{F}_n\,\right) \\ &= H_{n+1} E\left(X_{n+1} - X_n \,/\, \mathcal{F}_n\,\right) \\ &= H_{n+1}.0 = 0 \end{aligned}$$

car (X_n)-intégrable.

Temps d'arrêt

Définition 6: On appelle temps d'arrêt adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$ une variable aléatoire T à valeurs dans $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$.

Remarque: $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ équivaut à $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

Exemple:

Soient B un sous-ensemble borélien et T_B le temps d'entrée dans B de (X_n) i.e:

$$T_B \inf \{n \geq 0 : X_n \in B\} \ , \quad \inf \phi = +\infty.$$

Alors T_B est un temps d'arrêt de la filtration natureele de X puisque

$$\{T_B = n\} = \{X_0 \notin B\} \cap ... \cap \{X_{n-1} \notin B\} \cap \{X_n \in B\}.$$

Mouvement Brownien

Processus stochastiques

Pour représenter l'état d'un système dépendant du temps et du hasard. Le modèle mathématique se présente naturellement sous la forme d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et d'une fonction $(t, \omega) \longrightarrow X_t(\omega)$ représentant l'état du système. Pour t fixé, l'état du système du système est une variable aléatoire $X_t(\omega)$, en revanche pour une évolution particulière du système (i.e à ω fixé) les états succssifs sont représentés par la fonction $t \longrightarrow X_t(\omega)$ que l'on nomme par abus de langage une trajectoire.

Définition 1: Une filtration $\{\mathcal{F}_t \ , 0 \leq t \leq +\infty\}$ est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$ **:**

$$\text{pour } 0 \leq s \leq t \leq +\infty; \ \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \ .$$

Définition 2: On appelle processus stochastique (resp processus stochastique adapté), la donnée $X = \left(\Omega, \mathcal{F}, (X_t)_{t\in T}, P\right)$, $\left(\text{resp } X = \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, (X_t)_{t\in T}, P\right)\right)$, où T est un sous ensemble de $\mathbb{R}_+$ (qui représente le temps), $(X_t)_{t\in T}$ une famille de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeurs dans un espace topologique E muni de sa tribu des boréliens $\mathcal{B}_E$ (resp qu'on suppose de plus adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ i.e telle que pour tout $t \in T$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable). L'application $t \longrightarrow X_t(\omega)$ de T dans E est la trajectoire du processus correspondant à l'éventualité $\omega \in \Omega$.

Remarque: Dans la plupart des cas, l'espace des états $(E, \mathcal{B}_E)$ est l'espace $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}\right)$ de dimension d et l'ensemble des temps T est un intervalle $[0, a]$ ou $[0, +\infty[$. Dans ce cas le processus X est dit à temps continu. Lorsque T est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers, le processus est à temps discret.

Définition 3:

1)- Un processus X est mesurable si l'application suivante:

$$\begin{array}{rcl} ([0, +\infty[\times \Omega, \mathcal{B}([0, +\infty[\otimes \mathcal{F})) & \longrightarrow & \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}\right) \\ (t, \omega) & \longrightarrow & X_t(\omega) \end{array}$$

est mesurable.

2)- Un processus est dit continu si pour presque tout $\omega \in \Omega$, $t \longrightarrow X_t(\omega)$ est continu (i.e les trajectoires sont continues).

Martingale

Définition 4: Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, P\right)$ un espace probabilisé filtré. Une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est un processus stochastique $(M_t)_{t\in T}$ tels que:
1)- M_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout t,
2)- $E\left(|M_t|\right) < +\infty$,
3)- $E\left(M_s \,/\, \mathcal{F}_t\right) = M_t$ pour tout $s \geq t$.

Processus gaussiens

Définition 5: Le vecteur $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ est gaussien si pour tous $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire réelle $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i$ est de la loi normale.

Définition 6: Un processus aléatoire à valeurs dans $E = \mathbb{R}^d$ est dit gaussien si toutes ses lois de dimension finie sont gaussiens.

Mouvement brownien

Définition 7: Un processus $B = \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (B_t)_{t\geq 0}, P\right)$ à valeurs réelles est appelé mouvement brownien si:
1)- $B_0 = 0$ P-$p.s$,
2)- $\forall 0 \leq s \leq t$, la variable aléatoire $B_t - B_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$,
3)- $\forall 0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ est de loi $\mathcal{N}\left(0, t-s\right)$.

Autrement dit, le processus B part de 0, ses accroissements sont indépendants du du passé et sont de loi normale centrée et de variance égale à la longueur de l'intervalle de temps.

Définition 8: Lorsque $(\mathcal{F}_t = \sigma\left(B_s\right), 0 \leq s \leq t)$ est la filtration naturelle de $(B_t)_{t\geq 0}$, on dit que B est un mouvement brownien naturel.

Remarques:
1)-On considère parfois des mouvements browniens sus un untervalle de temps compact $T = [0, a]$.
2)- Les variables $B_t - B_s$ et $B_{u_1},...,B_{u_n}$ sont indépendantes pour tous $u_1, ..., u_n \leq s$.

Proposition 9: Tout mouvement brownien est une martingale relativement à sa filtration:

$$\text{Pour tout } s < t, \quad E\left(B_t \,/\, \mathcal{F}_s\right) = B_s \ .$$

Preuve: Si $s < t$, l'indépendance de $B_t -\ B_s$ et $\mathcal{F}_s$ implique que:

$$E\left(B_t - B_s \,/\, \mathcal{F}_s\right) = E\left(B_t - B_s\right) = 0$$

puisque B est centré. D'où le résultat.

Proposition 10: Tout mouvement brownien est un à acroissements indépendants i.e:

Pour tous $s = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ les variables aléatoires $B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ $(k = 1, ..., n)$ sont indépendantes et indépendantes de la tribu $\mathcal{F}_s$.

Corollaire 11: Si B est un mouvement brownien, le processus $\left(B_t^2 - t\right)_{t \geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.

Preuve: Soit $t > s$. Comme $E\left(B_t B_s \,/\, \mathcal{F}_s\right) = B_s^2$ (car B est une martingale) et

$$E\left((B_t - B_s)^2 \,/\, \mathcal{F}_s\right) = E\left((B_t - B_s)^2\right)$$

(voir la proposition 8), on a:

$$E\left(B_t^2 - t \,/\, \mathcal{F}_s\right) = E\left((B_t - B_s)^2 + B_s^2 - t \,/\, \mathcal{F}_s\right) = t - s + B_s^2 - t = B_s^2 - s.$$

Corollaire 12: Si B est un mouvement brownien, on a:

$$\text{pour tout } t: \; E\left(B_t\right) = 0$$

$$\text{pour tous } t \text{ et } s: \; E\left(B_t B_s\right) = \min\left(t, s\right)$$

Intégrale stochastique

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ un espace probabilisé filtré et $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien standard.

Définition 1: Soit $\mathcal{V}$ la classe de processus $(X_t)_{t\geq 0}$ vérifiant:
- $(t, \omega) \longrightarrow X_t(\omega)$ est $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{F}$ mesurable $\mathcal{F}$
- X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable
- $E\left[\int_0^T (X_t(\omega))^2 \, dt\right] < +\infty$.

Définition 2: Un processus $H = (H_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{V}$ est élémentaire si:

$$H_t(\omega) = \sum_{i=0}^{N-1} \phi_i(\omega) 1_{[t_i, t_{i+1}[}(t)$$

où $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T$, et ϕ_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable et bornée et pour tout $i = 1, ..., N-1$, ϕ_i est $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-mesurable et bornée.

Si H est un processus élémentaire, on peut défini

$$\int_0^T H_s dB_s = \sum_{i=0}^{N-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right).$$

Proposition 3: Si $H \in \mathcal{V}$ est borné et élémentaire:

$$E\left[\left(\int_0^T H_t dB_t\right)^2\right] = E\left[\int_0^T H_t^2 dt\right].$$

Lemme 4: Soit $Y \in \mathcal{V}$ un processus borné, continu pour tout $\omega \in \Omega$. Il existe une suite $(H_n)_n$ de processus élémentaires telle que:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} E\left[\int_0^T (Y - H_n)^2 \, dt\right] = 0.$$

Lemme 5: Soit $Z \in \mathcal{V}$ un processus borné,alors il existe (Y_n) suite de processus de $\mathcal{V}$ telle que pour tout $\omega \in \Omega$, $Y_n(., \omega)$ est continu et

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} E\left[\int_0^T (Z - Y_n)^2 \, dt\right] = 0.$$

Lemme 6: Soit $X \in \mathcal{V}$, alors il existe (Z_n) suite de processus de $\mathcal{V}$ tel que Z_n soit un processus borné et

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} E\left[\int_0^T (X - Z_n)^2 \, dt\right] = 0.$$

Théorème 7: Soit $X \in \mathcal{V}$ et (H_n) une suite de processus élémentaires tels que:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} E\left[\int_0^T (X - H_n)^2 \, dt\right] = 0.$$

alors on définit:

$$\int_0^T X_t dB_t = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^T H_{n,t} dB_t \ .$$

Formule d'Itô

Définition 1: Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ un espace probabilisé filtré et $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien. On appelle processus d'Itô, un processus (X_t) de la forme:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s \tag{1}$$

avec

- X_0 $\mathcal{F}_0$-mesurable;
- μ_t et σ_t sont $\mathcal{F}_0$-adaptés;
- $\int_0^t |\mu_s| \, ds < +\infty \quad P \ p.s$;
- $\int_0^t |\sigma_s|^2 \, ds < +\infty \quad P \ p.s.$

L'équation (1) s'écrit sous la forme:

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$$

Théorème 2: (Formule d'Itô)

Si $f(t, X_t)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors la formule d'Itô s'écrit:

$$d(f(t, X_t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)\, dt + \frac{\partial f}{\partial X}(t, X_t)\, dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(t, X_t)\, \sigma_t^2 dt$$

Modèle de Black-Scholes

Le mouvement brownien géométrique est souvent utilisé en finance comme le plus simple modèle d'évolution de cours de bourse. Il s'agit de la solution de l'équation différentielle stochastique:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

où:

- S_t est le prix de l'action sous-jacente,
- μ (constant)est le taux de dérive du prix de l'action,
- σ (constant) est la volatilité du prix de l'action,

- B_t est un mouvement brownien.

Si $\sigma = 0$, alors:

$$S_t = S_0 \exp(\mu t).$$

En posant $f(t, S_t) = \ln S_t$, on obtient grâce à la formule d'Itô:

$$\begin{aligned} d(\ln S_t) &= 0dt + \frac{1}{S_t}dS_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{S_t^2}\right)(\sigma S_t)^2\, dt \\ &= \frac{1}{S_t}(\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dB_t \end{aligned}$$

On peut alors intégrer et il en découle que:

$$S_t = S_0 \exp\left(\sigma B_t + \mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right).$$