Université de Batna 2
Faculté de mathématiques et d'informatique
Département de mathématiques
$3^{\text{ème}}$année LMD
Géométrie Différentielle

TD

Exercice 1: Soit l'application $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par:

$$\psi(x, y) = (xe^y \ , \ y)$$

1)- Montrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2)- Montrer que la différentielle $d\psi_{(x,y)}$ de ψ est inversible en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
3)- Montrer que ψ est injective.
4)- Montrer que ψ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global.

Exercice 2: On considère la fonction

$$f(x, y) = 1 - ye^x + xe^y$$

1)- Calculer $f(0, 1)$.
2)- Démontrer qu'il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}$, un voisinage V de 1 dans $\mathbb{R}$ et une application $\varphi : U \to V$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que

$$\forall x \in U, \forall y \in V \quad f(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x).$$

3)- Calculer $\varphi'(0)$.

Exercice 3: Soit $\Omega =]-\infty, 1[\times \mathbb{R}$ et définissons $f : \Omega \to \mathbb{R}$ par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 1$.
1)- À l'aide du théorème des fonctions implicites, montrer que pour tout $(a, b) \in \Omega$ vérifiant $f(a, b) = 0$, il existe un voisinage U de a et unique fonction $\varphi : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que $\varphi(a) = b$ et $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in U$.
2)- Calculer $\varphi'(a)$.
3)- Vérifier qu'on fait φ est de classe $\mathcal{C}^3$ et qu'elle vérifie l'équation différentielle

$$\varphi^2(x)\,\varphi'''(x) + 6\varphi(x)\,\varphi'(x)\,\varphi''(x) + 2\left(\varphi'(x)\right)^3 + 2 = 0.$$

Exercice 4: On cosidère l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$(x, y) \to \varphi(x, y) = (\sin(y/2) - x, \sin(x/2) - y).$$

1)- Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.
2)- Calculer la Jacobienne de φ et montrer que sa différentielle $d\varphi_{(x,y)}$ est inversible pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
3)- En déduire que φ est un difféomorphisme local de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$sur son image.

4)- Utilisez le théorème des accroissements finis pour démontrer que, pour tous u_1 et u_2 avec $u_1 < u_2$, il existe $u \in]u_1, u_2[$ tel que :

$$\sin(u_2/2) - \sin(u_1/2) = \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1)\cos(u/2).$$

En déduire que φ est injective.
5)- Déduire que φ est un difféomorphisme global.
6)- Soit $(u, v) = \varphi(x, y)$. Calculer $d\varphi^{-1}_{(u,v)}$ en fonction de $d\varphi_{(x,y)}$.

Exercice 5: Le paraboloïde de révolution est la surface obtenue faisant tourner une parabole autour de son axe, son équation cartésienne:

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z\right\}$$

1)- On définit la fonction f par $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$. Montrer que 0 est une valeur régulière de f.
2)- Montrer que S est une surface régulière.
3)- On considère l'application $X :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par:

$$X(u, v) = \left(\sqrt{u}\cos v\ ,\ \sqrt{u}\sin v\ ,\ u\right)$$

Montrer que X est une paramétrisation du paraboloïde S.

Exercice 1: Soit l'application $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$\psi(x,y) = (xe^y \ , \ y)$$

1)- Comme les composantes de ψ sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$
2)- On a :

$$\mathrm{Jac}(\psi) = \begin{pmatrix} e^y & xe^y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\det\mathrm{Jac}(\psi) = e^y \neq 0$ donc $d\psi_{(x,y)}$ est inversible.
3)- Pour tout (x_1,y_1), $(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \psi(x_1,y_1) = \psi(x_2,y_2) &\implies (x_1e^{y_1} \ , \ y_1) = (x_2e^{y_2} \ , \ y_2) \\ &\implies \left\{ \begin{array}{c} x_1e^{y_1} = x_2e^{y_2} \\ y_1 = y_2 \end{array} \right. \implies (x_1,y_1) = (x_2,y_2) \end{aligned}$$

donc ψ est injective.
4)- Comme ψ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et injective et $d\psi_{(x,y)}$ est inversible alors, d'aprés le théorème d'inversion globale, ψ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global.

Exercice 2: Soit :

$$f(x,y) = 1 - ye^x + xe^y$$

1)- $f(0,1) = 1 - 1 + 0 = 0$.
2)- Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, $f(0,1) = 0$ et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -1 \neq 0 \ , \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^x + xe^y\right),$$

alors, d'aprés le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}$, un voisinage V de 1 dans $\mathbb{R}$ et une application $\varphi : U \to V$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que

$$\forall x \in U, \forall y \in V \quad f(x,y) = 0 \iff y = \varphi(x).$$

3)- On a :

$$\varphi'(0) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -ye^x + e^y \implies \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = e - 1$$

donc :

$$\varphi'(0) = e - 1.$$

Exercice 3:

1)- Soit $(a,b) \in \Omega$ telle que $f(a,b) = 0$.

on a $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ car f est une fonction élémentaire.

Pour montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$ on suppose le contraire c-à-d $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

On a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 3b^2 = 0 \Longrightarrow b = 0$$

d'où

$$f(a,b) = a^3 + b^3 - 1 = 0 \Longrightarrow a^3 = 1 \Longrightarrow a = 1$$

ce qui contredit l'hypothèse que $a \in]-\infty, 1[$. Il vient que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$.

On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites qui assure l'existence d'un voisinage $U =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, $(\varepsilon > 0)$ de a et un voisinage V de $b \in \mathbb{R}$ (donc $V = \mathbb{R}$) et une unique fonction $\varphi : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tels que $\varphi(a) = b$ et $f(x, \varphi(x)) = 0$, $\forall x \in U$.

2)- D'aprés le théorème des fonctions implicites

$$\varphi'(a) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)} = -\frac{3a^2}{3b^2} = -\frac{a^2}{b^2}.$$

3)- D'aprés 1, φ est aussi de classe $\mathcal{C}^3$. De plus φ vérifie

$$f(x, \varphi(x)) = 0, \forall x \in U \quad \text{c-à-d } x^3 + (\varphi(x))^3 - 1 = 0 \quad x \in U$$

si on dérive cette équation par rapport à x trois fois successivement on trouve l'équation différentielle

$$3x^2 + 3\varphi^2\varphi' = 0.$$

Puis une deuxième dérivation

$$6x + 6\varphi(\varphi')^2 + 3\varphi^2\varphi'' = 0.$$

Puis une dernière dérivation

$$6 + 6(\varphi')^3 + 12\varphi\varphi'\varphi'' + 6\varphi\varphi'\varphi'' + 3\varphi^2\varphi''' = 0$$

c-à-d

$$2 + 2(\varphi')^3 + 6\varphi\varphi'\varphi'' + \varphi^2\varphi''' = 0.$$

Exercice 4:

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\varphi(x,y) = (\sin(y/2) - x, \sin(x/2) - y)$$

1)- φ a des coordonnées de classe $\mathcal{C}^\infty$ elle l'est donc donc aussi.

2)- On a:

$$\text{Jac } \varphi_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} \\ \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$\det\left(\text{Jac } \varphi_{(x,y)}\right) = 1 - \frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} \geq \frac{3}{4} > 0.$$

Par conséquent la jacobienne est inversible et $d\varphi_{(x,y)} \in Isom\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\right)$ (c-à-d $d\varphi_{(x,y)}$ est inversible).

3)- Comme φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et $d\varphi_{(x,y)}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ alors φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local de $\mathbb{R}^2$ sur son image.

4)- La fonction $x \to \sin\frac{x}{2}$ est continue sur $[u_1, u_2]$ et dérivable sur $]u_1, u_2[$ alors, d'aprés le théorème des accroissements finis, il existe $u \in]u_1, u_2[$ tq

$$\sin\frac{u_2}{2} - \sin\frac{u_1}{2} = \frac{1}{2}\left(u_2 - u_1\right)\cos\frac{u}{2}.$$

Soit $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tq: $\varphi(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2)$ donc:

$$\begin{cases} \sin\frac{y_1}{2} - x_1 = \sin\frac{y_2}{2} - x_2 \\ \sin\frac{x_1}{2} - y_1 = \sin\frac{x_2}{2} - y_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \sin\frac{y_2}{2} - \sin\frac{y_1}{2} = x_2 - x_1 \\ \sin\frac{x_2}{2} - \sin\frac{x_1}{2} = y_2 - y_1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\left(y_2 - y_1\right)\cos\frac{y_3}{2} = x_2 - x_1 \\ \frac{1}{2}\left(x_2 - x_1\right)\cos\frac{x_3}{2} = y_2 - y_1 \end{cases} \Longrightarrow \left(1 - \frac{1}{4}\cos\frac{y_3}{2}\cos\frac{x_3}{2}\right)\left(y_2 - y_1\right) = 0$$

avec $y_3 \in]y_1, y_2[$ et $x_3 \in]x_1, x_2[$

$$\Longrightarrow y_2 = y_1 \text{ et } x_2 = x_1$$

alors φ est injective.

5)- Comme φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et injective et $d\varphi_{(x,y)}$ est isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ (det Jac$\varphi_{(x,y)} \neq 0$) alors φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global.

6)- On a:

$$d\varphi^{-1}_{(u,v)} = \left(d\varphi_{\varphi^{-1}_{(u,v)}}\right)^{-1}.$$

Exercice 5: Soit :

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z\} \text{ et } f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$$

on a :

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$$

1)- Comme

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -1 \neq 0$$

alors f n'admet aucun point critique donc 0 est une valeur régulière de f.
2)- On a $S = f^{-1}(\{0\})$ et 0 est une valeur régulière de f alors S est une surface régulière.
3)- On considère l'application $X :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par:

$$X(u,v) = \left(\sqrt{u}\cos v \ , \ \sqrt{u}\sin v \ , \ u\right)$$

Tout d'abord on montre que $\mathrm{Im}(X) \subset S$. Si on pose $x = \sqrt{u}\cos v$, $y = \sqrt{u}\sin v$ et $z = u$ alors $x^2 + y^2 = u\cos^2 v + u\sin^2 v = u = z$ d'où $\mathrm{Im}(X) \subset S$.
On a :
a)- X est de classe $\mathcal{C}^1$donc X est différentiable.
b)- X est homéomorphisme :
X est bijective car

$$X(u,v) \quad = \quad (x,y,z) \Longrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{u}\cos v \\ y = \sqrt{u}\sin v \\ z = u \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = z \\ \frac{y}{x} = \tan v \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = z \\ v = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad X^{-1}(x,y,z) = (u,v) = (z, \arctan \frac{y}{x})$$

et X et X^{-1} sont continues.
c)- Condition de régularité :
On a :

$$\text{Jac } X = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{u}}\cos v & -\sqrt{u}\sin v \\ \frac{1}{2\sqrt{u}}\sin v & \sqrt{u}\cos v \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

le mineur

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{u}}\cos v & -\sqrt{u}\sin v \\ \frac{1}{2\sqrt{u}}\sin v & \sqrt{u}\cos v \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

ou :

$$dX_u \wedge dX_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{2\sqrt{u}}\cos v & \frac{1}{2\sqrt{u}}\sin v & 1 \\ -\sqrt{u}\sin v & \sqrt{u}\cos v & 0 \end{vmatrix} = -\sqrt{u}\cos v \ \vec{i} - \sqrt{u}\sin v \ \vec{j} + 1\vec{k} \neq \vec{0}$$

d'où la régularité.
De a), b) et c) X est une paramétrisation pour S.