Université Batna 2.
Institut Hygiène et Sécurité
Département Socle commun _ L1. L2.

Recueil d'exercices de mécanique du point

# Chapitre 1. Calcul vectoriel

## 1.1. Exercices

– **Ex 1.** a) Trouver la somme des trois vecteurs $\vec{V}_1 = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{V}_2 = -3\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}$; $\vec{V}_3 = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 6\vec{k}$

b) Calculer le module de la résultante ainsi que les angles qu'elle forme avec $Ox$, $Oy$ et $Oz$.

– **Ex 2.** a) Montrer que la surface d'un parallélogramme ([illegible]) est $|\vec{A} \wedge \vec{B}|$, $|\vec{A}|$ et $|\vec{B}|$ sont les côtés du parallélogramme.

b) Montrer que les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont $\perp$ si $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$.

**Ex 3.** Dans un repère cartésien orthonormé $(O : \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les trois points $A(1, 7)$, $B(8, 3)$ et $C(\frac{9}{2}, 1)$ formant le triangle $ABC$.

1) Déterminer les composantes et les normes des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{BC}$.

2) Exprimer la valeur de l'angle $\hat{B}$ (sommet B) à partir de la définition du produit scalaire.

**Ex 4** Dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs

$\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \alpha\vec{k}$; $\vec{b} = 6\vec{i} - \beta\vec{j} + 3\vec{k}$; $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$

où $\alpha$ et $\beta$ sont des constantes.

Ex 5 On considère dans un repère Oxyz, les 3 vecteurs $\vec{V_1} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{V_2} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ et $\vec{V_3} = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

a) Calculer les modules de $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$.

b) Calculer les composantes ainsi que le module des vecteurs $\vec{A} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3}$ et $\vec{B} = 2\vec{V_1} - \vec{V_2} + \vec{V_3}$

c) Déterminer le vecteur unitaire porté par $\vec{C} = \vec{V_1} + \vec{V_3}$

d) Calculer le produit vectoriel $\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}$

e) Calculer le produit scalaire $\vec{V_1} \cdot \vec{V_3}$ et en déduire l'angle formé par les deux vecteurs.

Ex 6. On donne le 3 vecteurs $\vec{A}(3, 2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ $\vec{B}(2, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ et $\vec{C}(1, 2, 2)$.

1. Calculer les normes $\|\vec{A}\|$, $\|\vec{B}\|$ et $\|\vec{C}\|$. En déduire les vecteurs unitaires $\vec{u}_A$, $\vec{u}_B$ et $\vec{u}_C$ des directions, respectivement, de $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$.

2. Calculer $\cos(\vec{u}_A, \vec{u}_B)$ $\cos(\vec{u}_B, \vec{u}_C)$ et $\cos(\vec{u}_C, \vec{u}_A)$ Sachant que les angles sont compris entre 0 et $\pi$

3. Calculer les composantes des vecteurs $\vec{e_1} = \vec{u}_B \wedge \vec{u}_C$, $\vec{e_2} = \vec{u}_C \wedge \vec{u}_A$ et $\vec{e_3} = \vec{u}_A \wedge \vec{u}_B$.

1.2 Solutions

Correction Ex 1.

$\Rightarrow \vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3} \rightarrow \vec{V} = 6\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}$

$|\vec{V}| = \sqrt{\sum_{i=1,3} V_i^2} = 8,54.$

$V_x = V \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{V_x}{V} = \frac{6}{8.54} = 0,70 \Rightarrow \alpha = 45,6^\circ$

$V_y = V \cdot \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{V_y}{V} = \frac{6}{8{,}54} \Rightarrow \beta = 45{,}6°$.

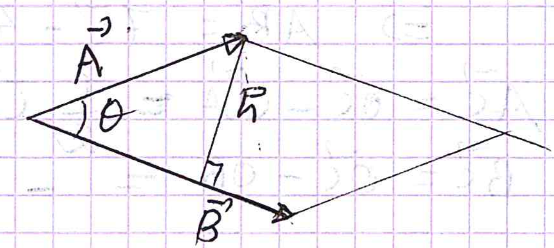
$V_z = V \cdot \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{V_z}{V} = \frac{1}{8{,}54} = \quad \theta = 83{,}1°$.

Cor. Exo 2

a) Surface du parallélogramme : $S = h \cdot |\vec{B}|$

On remarque que

$\sin\theta = \frac{h}{|\vec{A}|}$




$\Rightarrow h = |\vec{A}| \sin\theta$

Donc $S = |\vec{A}| \sin\theta \, |\vec{B}| = |\vec{A}| \, |\vec{B}| \sin\theta$.

ce résultat est la définition du module du produit vectoriel des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$

b) Soient les deux vecteurs

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} ; \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}$$

$\vec{A}_x$ ; $A_y$ ; $A_z$ sont les composantes respectives du vecteur $\vec{A}$.

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \left[ (A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2 + (A_z + B_z)^2 \right]^{1/2}$$

$$|\vec{A} - \vec{B}| = \left[ (A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2 \right]^{1/2}.$$

En égalisant les deux dernières expressions, et en développant nous arrivons au résultat.

$A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0$, qui n'est autre que le produit scalaire $(\vec{A} \cdot \vec{B}) = 0 \Leftrightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$.

Ex 3/ 1) On a les coordonnées de :

$$A(1;7) \quad B(8;3) \quad \text{et} \quad C\left(\frac{9}{2};4\right).$$

les composantes des vecteurs

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \vec{AB} = 7\vec{i} - 4\vec{j}$$ de m.

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \frac{7}{2}\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = -\frac{7}{2} - 2\vec{j}$$

Normes des vecteurs

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{65} \simeq 8{,}06, \quad \|\vec{AC}\| = \frac{\sqrt{193}}{2} \simeq 6{,}95$$

et $\|\vec{BC}\| = \frac{\sqrt{65}}{2} \simeq 4{,}03$.

2). D'après la définition du produit scalaire de deux vecteurs $\vec{BA}$ et $\vec{BC}$ (ici on cherche l'angle $\beta$ formé par $\vec{BA}$ et $\vec{BC}$ du triangle ABC)

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \|\vec{BA}\| \cdot \|\vec{BC}\| \cos\beta$$

$$\Rightarrow \cos\beta = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{\|\vec{BA}\| \, \|\vec{BC}\|}$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7/2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{49}{2} - 8 = \frac{33}{2}$$

avec $\|\vec{BA}\| \cdot \|\vec{BC}\| = \sqrt{65}$

$$\cos\beta = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{\|\vec{BA}\| \cdot \|\vec{BC}\|} = \left(\frac{33}{2}\right) \Big/ \frac{65}{2} = \frac{33}{65} = 0{,}507$$

$$\beta = 60^\circ.$$

Correction exo 4

1) on a : $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \alpha\vec{k}$ , $\vec{b} = 6\vec{i} - \beta\vec{j} + 3\vec{k}$

et $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

Valeurs de $\alpha$ et $\beta$ pour que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ soient colinéaires : $\vec{a} = f(\vec{b})$ . $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

Donc : $-2\vec{i} + 3\vec{j} + \alpha\vec{k} = \lambda(6\vec{i} - \beta\vec{j} + 3\vec{k})$

$= 6\lambda\vec{i} - \beta\lambda\vec{j} + 3\lambda\vec{k}$.

par identification

$-2 = 6\lambda$ (1)

$3 = -\beta\lambda$ (2)

$\alpha = 3\lambda$ (3)

3 equations à 3 inconnues =)

$\Rightarrow$ ~~de~~ $\lambda = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$.

$\beta = \frac{-3}{\lambda} = \frac{-3}{-1/3} = 9$. et $\alpha = 3\lambda = -1$.

D'où les vecteurs

$\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$

$\vec{b} = 6\vec{i} - 9\vec{j} + 3\vec{k}$

2) Calcul des modules $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$

$\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ $\|\vec{a}\| = \sqrt{14}$.

$\vec{b} = 3\sqrt{14}$, et $\|\vec{c}\| = \sqrt{14}$.

$\vec{a} + \vec{b} = 2(2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = \|\vec{a} + \vec{b}\| = 2\sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + 1^2} =$

$\vec{a} + \vec{b} = 2\sqrt{14}$.

$(\vec{a} - \vec{b}) = 4(-2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) = \|\vec{a} - \vec{b}\| = 4\sqrt{14}$.

$(\vec{a}+\vec{c}) = -\vec{i}+5\vec{j}-4\vec{k} \Rightarrow \|\vec{a}+\vec{c}\| = \sqrt{3}\sqrt{14}$.

$\vec{a}-\vec{c} = -3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k} \Rightarrow \|\vec{a}-\vec{c}\| = \sqrt{14}$.

3) – $2\vec{a}+\vec{b}/3-\vec{c}+\vec{d}=0$

isolant le vecteur $\vec{d}$ de la relation vectorielle

$\vec{d} = -2\vec{a} - \vec{b}/3 + \vec{c} = -2(-2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k})$

$-\frac{1}{3}(6\vec{i}-9\vec{j}+3\vec{k}) + (\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k})$

$\vec{d} = 3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ d'où le vecteur unitaire

$$\vec{u} = \frac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|} = \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{j} - \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{k}$$

car $\|\vec{d}\| = \sqrt{(3)^2+(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{14}$.

Sol _ Exo 5

a) $\|\vec{V_1}\| = 6,40$ ; $\|\vec{V_2}\|$ $5,38$, $\|\vec{V_3}\| = 5,91$

b) $\vec{A} = 10\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ ; $\vec{B} = 9\vec{i}-15\vec{j}+15\vec{k}$

c) $\vec{c} = 8\vec{i}-5\vec{j}+7\vec{k}$ ; $\vec{u}_c = \frac{\vec{C}}{\|\vec{C}\|} = \frac{8}{\sqrt{35}}\vec{i} - \frac{5}{\sqrt{35}}\vec{j} + \frac{7}{\sqrt{35}}\vec{k}$

d) $\vec{V_2}\wedge\vec{V_3} = 5\vec{i}-26\vec{j}-17\vec{k}$

e) $\vec{V_1}\cdot\vec{V_3} = x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 \Rightarrow \vec{V_1}\cdot\vec{V_3} = 15+4+12 = 31$.

avec $\vec{V_1}\cdot\vec{V_3} = |\vec{V_1}||\vec{V_3}|\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{V_1}\cdot\vec{V_3}}{V_1V_3}$

$\cos\alpha = 0,176 \Rightarrow \alpha = 79,86°$.

Ex 06.

on a $\|\vec{V}\| = \sqrt{\Sigma_{i=1,3} V_i^2}$.

donc $\|\vec{A}\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + \sqrt{3}^2} = 4$

$\|\vec{B}\| = \sqrt{2^2 + \sqrt{3}^2 + \sqrt{2}^2} = 3$

$\|\vec{C}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$

les vecteurs unitaires sont.

$\vec{u}_A = \vec{u}_{Ax} + \vec{u}_{Ay} + \vec{u}_{Az}$

$\Rightarrow \vec{u}_A = \left( \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$.

$\vec{u}_B = \left( \frac{2}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3} \right)$

$\vec{u}_C = \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$

$$\cos(\widehat{\vec{A},\vec{B}}) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|} = \frac{3 \times 2 + 2 \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times \sqrt{2}}{4 \times 3} = 0,993$$

de même

$$\cos(\widehat{\vec{B},\vec{C}}) = 0,921.$$

et

$$\cos(\widehat{\vec{C},\vec{A}}) = 0,872$$

3) étant donnée $\vec{e}_1 = \vec{u}_B \wedge \vec{u}_C$

$$\Rightarrow \vec{e}_1 = \left( \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} \right)$$

$$= \left( \frac{2(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{9}, \frac{\sqrt{2} - 4}{9}, \frac{4 - \sqrt{3}}{9} \right)$$

de même

$$\vec{e}_2 = \vec{u}_C \wedge \vec{u}_A = \left( \frac{2(\sqrt{3}-2)}{12}, \frac{6-\sqrt{3}}{12}, -\frac{1}{3} \right)$$

et $$\vec{e}_3 = \vec{u}_A \wedge \vec{u}_B = \left( \frac{2\sqrt{2}-3}{12}, \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{12}, \frac{4\sqrt{3}-3}{12} \right)$$

## Chapitre 2. Cinématique du point.

### Exo 1.

Etant données les équations du mouvement d'un point matériel, trouver l'équation de sa trajectoire en coordonnées cartésiennes et donner l'origine du mouvement.

1. $x = 3t - 5$, $y = 4 - 2t$
2. $x = 2t$, $y = 8t^2$.
3. $x = 5\sin 10t$, $y = 3\cos 10t$.

**Exo 2.** Un pont roulant se déplace dans l'atelier d'après l'équation $x = t$; un chariot roule sur ce pont dans la direction transversale d'après l'équation $y = 1{,}5t$. Déterminer la trajectoire du centre de gravité de la charge si la chaîne se raccourcit avec la vitesse $v = 0.5\,m$ (chaîne qui porte la charge) l'axe $Oz$ est orienté vers le haut.