Notes de cours
Analyse numérique
Master 1

Boudiaf Naima Département de Mathématiques

Table des matières

Chapitre 1

Rappels et compléments sur les différences finies

1.1 Notions fondamentales de la méthode des différences finies

Définition 1.1.1 *: Une EDP est une relation entre les variables indépendantes $x_1, x_2, ..., x_n$, la fonction u, et ses dérivées partielles.*

Dans le cas de 2 variables :

– Une EDP d'ordre un s'écrit par la relation :

$$f(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)) = 0.$$

– Une EDP d'ordre deux s'écrit par la relation :

$$f(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y), \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y), \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y)) = 0.$$

Définition 1.1.2 *: On appelle ordre d'une EDP l'ordre le plus élevé des dérivées partielles intervenant dans l'EDP.*

Définition 1.1.3 *: Une EDP est linéaire si l'équation est linéaire par rapport aux dérivées partielles de la fonction u.*

Exemples 1 *:*

1) L'équation de Laplace : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0$, est une équation linéaire d'ordre deux.

2) L'équation : $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{\partial u}{\partial y})(x,y) + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - u\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0$, est une équation non linéaire d'ordre 3.

Définition 1.1.4 *(Problème aux limites) : On appelle problème aux limites une équation aux dérivées partielles munie de conditions aux limites sur la totalité de la frontière du domaine sur lequel elle est posée.*

Exemples 2 *:*

1) $\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y), & (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0, & (x,y) \in \partial\Omega \; . \end{cases}$, c'est un problème aux limites.

2) $\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(t,x), \;\text{ pour } 0 < t < T \in \mathbb{R} \\ x(t=0) = x_0 \;\; \text{(conditions initiales)} \end{cases}$, n'est pas un problème aux limites.

Définition 1.1.5 *(Problème bien posé) : On dit que le problème $Au = f$ est bien posé si pour toute donnée f il admet une solution unique u, et si cette solution u dépend continûment de la donnée f.*

1.2 Consistance, Stabilité et Convergence

Considérons une EDP avec ses conditions aux limites et initiales :

$$\Psi(u) = 0 \qquad (*)$$

de solution $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Pour chaque point ih l'équation $(*)$ est discrétisée par différences finies sous la forme : $\Psi_i(u) = 0$.

1.2.1 Consistance

La consistance d'une méthode assure que la solution discrète tend vers la solution exacte lorsque le pas de la subdivision h tend vers 0.

Définition 1.2.1 *: Une approximation est consistante d'ordre p s'il existe une constante $c > 0$ indépendante de h tel que l'erreur est majorée par $c.h^p$ pour $p > 0$ fixé.*

1.2.2 Stabilité

La stabilité d'un schéma est une notion visant à mesurer la propagation des erreurs engendrées par les calculs précédents dans un schéma numérique.

Définition 1.2.2 *: Si les fonctions Ψ_i sont linéaires, alors la méthode peut s'écrire comme un système linéaire $A_h u_h = b_h$. On dit que ce schéma numérique est stable si la matrice de discrétisation A_h satisfait :* $\left\|A_h^{-1}\right\|_\infty \leq \dfrac{1}{8}$.

Lemme 1.2.1 *: Si les fonctions Ψ_i sont linéaires, alors on a l'estimation suivante sur les solutions du système :* $\|u_h\|_\infty \leq \dfrac{1}{8}\|b_h\|_\infty$.

1.2.3 Convergence

Définition 1.2.3 *: La méthode converge, si l'erreur globale $r = \max\limits_i |r_i|$ tend vers 0 lorsque le pas de la subdivision h tend vers 0.*

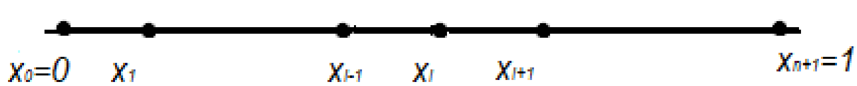
Théorème 1.2.1 *: une méthode stable et consistante est convergente.*

Définition 1.2.4 *(Maillage) : Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$. Un maillage de Ω est un découpage de Ω en polyèdres (triangles ou rectangles pour $n = 2$, et tétraèdre ou hexaèdre pour $n = 3$). Les sommets des polyèdres sont les noeuds du maillage.*

Exemples 3 *:*

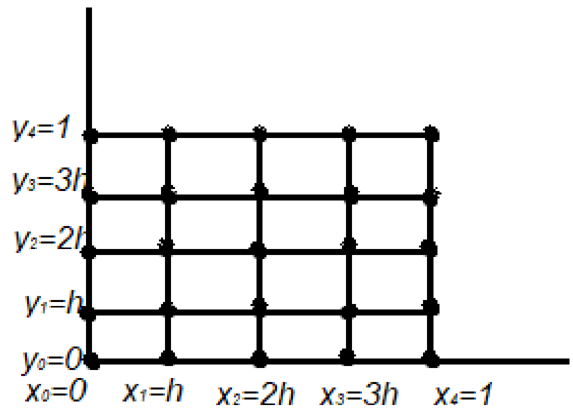
1) $\Omega =]0, 1[, \quad h = \dfrac{1}{n+1}$ (pas de discrétisation), $n \in \mathbb{N}$.

$\Omega_h = \{x_i = ih,\ 0 \leq i \leq n+1\}$ un maillage de Ω.



2) $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[, \quad h = \dfrac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ (maillage régulier).

$\Omega_h = \{(ih, jh),\, 0 \leq i, j \leq n+1\}$, c'est l'ensemble des carrés délimités par les droites d'équations $x = ih$, $y = jh$, $1 \leq i, j \leq n$.



maillage régulier pour n=3

1.3 Classification des équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre 2

L'équation aux dérivées partielles linéaires d'ordre 2 à deux variables s'écrit sous la forme :

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = g \tag{1}$$

Définition 1.3.1 *: On dit que l'équation (1) est*

- Elliptique si : $b^2 - 4ac < 0$.
- Parabolique si : $b^2 - 4ac = 0$.
- Hyperbolique si : $b^2 - 4ac > 0$.

1.4 Les principales formules des différences finies

Théorème 1.4.1 *(Développement de Taylor) : Soit f une fonction de classe C^{n+1} au voisinage d'un point $x \in \mathbb{R}$, alors pour tout h réel on a :*

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) + o(h^{n+1}).$$

Proposition 1.4.1 *: Les formules suivantes donnent des approximations des dérivées de f au point x.*

1) Formule des différences finies progressive d'ordre 1 en h :

$$f'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + o(h).$$

2) Formule des différences finies rétrograde d'ordre 1 en h :

$$f'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + o(h).$$

3) Formule des différences finies centrée d'ordre 1 en h :

$$f'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + o(h^2).$$

4) Formule des différences finies centrée d'ordre 2 en h :

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + o(h^2).$$

Preuve :

3) Ecrivons la formule de Taylor d'ordre 2 aux points $(x+h)$ et $(x-h)$ on obtient :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + o(h^3) \qquad \textbf{(1)}$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + o(h^3) \qquad \textbf{(2)}$$

en soustrayant la seconde équation de la première on obtient :

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + o(h^2).$$

4) Ecrivons la formule de Taylor d'ordre 3 aux points $(x+h)$ et $(x-h)$ on obtient :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + o(h^4) \qquad \textbf{(3)}$$

$$f(x+h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(x) + o(h^4) \qquad \textbf{(4)}$$

(3)+(4) donne :

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + o(h^2)$$

ce qui achève la démonstration.

■

Théorème 1.4.2 *: Pour toute fonction $f \in C^4$, pour tout point $x \in \mathbb{R}$, il existe une constante $c > 0$ tel que pour tout $h \in]0,1[$ on a :*

$$|r_x| = \left| f''(x) - \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \right| \leq c.h^2.$$

(r_x l'erreur en point x).

Remarque 1.4.1 *: c dépend de f et x, mais pas de h, on remarque que l'erreur est divisée par 4 chaque fois que h est divisé par 2.*

Preuve (Théorème 1.4.2) : Le développement de Taylor d'ordre 3 aux points $(x+h)$ et $(x-h)$ est donné par :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\theta_1) \qquad \textbf{(5)}$$

où $x < \theta_1 < x+h$,

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\theta_2) \qquad \textbf{(6)}$$

où $x - h < \theta_2 < x$.

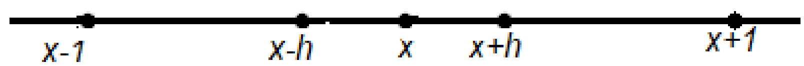
(5)+(6) donne :

$$f(x+h) - f(x-h) - 2f(x) = h^2 f''(x) + \frac{h^4}{24}(f^{(4)}(\theta_1) + f^{(4)}(\theta_2)),$$

utilisons le théorème des valeurs intermidiaires on obtient :

$$\frac{1}{h^2}(f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)) = f''(x) + \frac{h^2}{12}(f^{(4)}(\beta)) \qquad \textbf{(7)}$$

$\beta \in]\theta_2, \theta_1[$



on a : $x-1 < x-h < \theta_2 < x$, $x < \theta_1 < x+h < x+1$, il s'ensuit : $x-1 < \theta_2 < \beta < \theta_1 < x+1$, par conséquent $\left|f^{(4)}(\beta)\right| \leq \max\limits_{x-1 \leq t \leq x+1} \left|f^{(4)}(t)\right|$, alors (7) implique :

$$\left| f''(x) - \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \right| \leq \frac{h^2}{12} \max_{x-1 \leq t \leq x+1} \left|f^{(4)}(t)\right|,$$

il suffit alors de prendre $c = \frac{1}{12} \max\limits_{x-1 \leq t \leq x+1} \left|f^{(4)}(t)\right|$. ■

1.5 La méthode des différences finies en dimension 1 appliquée à un problème elliptique

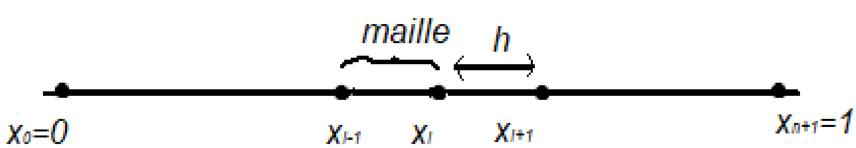
1.5.1 Discrétisation du problème de Dirichlet

Exemple 1 : *(Problème de Dirichlet homogène) : Considérons le problème aux limites suivant :*

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & \textit{pour } x \in \Omega =]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

avec $f \in C([0,1])$.

Notre objectif est de proposer un schéma qui permettra de calculer des valeurs u_i qui sont des approximations de $u(x_i)$.



Le domaine (l'intervalle) $[0,1]$ est subdivisé en $(n+1)$ points, notons $h = \frac{1}{n+1}$ le pas d'espace (déstiné à être petit, n déstiné à être grand). on a $x_i = ih$, $i = 0, ..., n+1$.

Pour approcher la dérivée seconde on utilise une formule de différences finies centrée :

$$-u''(x_i) + o(h^2) = \frac{-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1})}{h^2} = f(x) + o(h^2),$$

remplaçons $u(x_{i-1})$, $u(x_i)$ et $u(x_{i+1})$ par u_{i-1}, u_i, et u_{i+1} respectivement on obtient le schéma numérique suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} = f(x_i), \;\; i = 1, ..., n \\ u_0 = 0, \; u_{n+1} = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{h^2}(2u_1 - u_2) = f_1\,; \\ \\ \dfrac{1}{h^2}(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) = f_i, \;\; i = 2, ..., n-1\,; \\ \\ \dfrac{1}{h^2}(-u_{n-1} + 2u_n) = f_n. \end{cases}$$

ce schéma correspond la résolution d'un système linéaire qui s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & . & . & . & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ . \\ f_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow A_h u = f \qquad (\mathbf{8})$$

A_h est une matrice tridiagonale, symétrique et définie positive, donc on peut utiliser la décomposition de Cholesky, $A_h = LL^T$ pour résoudre le système linéaire $A_h u = f$.

Théorème 1.5.1 *: Supposons que $u \in C^4([0,1])$, alors il existe une constante $c > 0$ tel que pour tout $h \in]0,1[$, l'erreur au point x_i est donnée par :*

$$\max_{1\leq i\leq n} |u_i - u(x_i)| \leq c.h^2.$$

Preuve : Le schéma numérique :

$$\frac{-u_{i-1}+2u_i-u_{i+1}}{h^2}=f(x_i),\ \ i=1,...,n$$

est équivalent au système :

$$Au=f \tag{9}$$

d'un autre côté la solution exacte $u(x)$ satisfait l'équation suivante :

$$\frac{-u(x_{i-1})+2u(x_i)-u(x_{i+1})}{h^2}=f(x)+o(h^2)$$

$$\Longleftrightarrow Aw=f+r \tag{10}$$

où

$$w=\begin{pmatrix} u(x_1)\\ u(x_2)\\ .\\ .\\ .\\ u(x_n)\end{pmatrix},\ \text{et}\ r=\begin{pmatrix} r_1\\ r_2\\ .\\ .\\ .\\ r_n\end{pmatrix}.$$

(10)-(9) donne :

$$A(w-u)=r,$$

d'aprés le lemme 1.2.1 on a :

$$\|w-u\|_\infty\leq\frac{1}{8}\|r\|_\infty$$

c-à-d

$$\max_{1\leq i\leq n}|u(x_i)-u_i|\leq\frac{1}{8}\max_{1\leq i\leq n}|r_i|,$$

d'aprés le théorème 1.4.2 on a :

$$|r_i|\leq\frac{1}{12}\max_{0\leq x\leq 1}\left|u^{(4)}(x)\right|.h^2,\ \ i=1,...,n$$

d'où :

$$\max_{1\leq i\leq n}|u(x_i)-u_i|\leq\frac{1}{8}.\frac{1}{12}\max_{0\leq x\leq 1}\left|u^{(4)}(x)\right|.h^2$$

il suffit de prendre $c=\frac{1}{96}\max_{0\leq x\leq 1}\left|u^{(4)}(x)\right|$. ■

1.5.2 Principe du maximum discret

Proposition 1.5.1 *: Soit $f \in \mathbb{R}^n$ tel que $f_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Si $u \in \mathbb{R}^n$ vérifie $A_h u = f$, où A_h est donnée par (8), alors $u_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$.*

Preuve : Soit

$$k = \min \left\{ i \ / \ u_i = \min_j (u_j) \right\}.$$

On suppose que $u_k < 0$. Trois cas sont possibles : $k = 1$, $1 < k < n$, et $k = n$.

- Pour $k = 1$, $(A_h u)_1 = f_1 \geq 0$ entraîne :

$$\frac{1}{h^2}(2u_1 - u_2) = f_1 \geq 0 \Longrightarrow u_2 \leq 2u_1$$

  or

$$u_1 = \min_i u_i \leq u_2$$

  donc

$$2u_1 \leq u_2 + u_1 < u_2$$

  $(u_1 < 0)$, finalement

$$u_2 < u_2$$

  impossible donc $u_1 \geq 0$.
- Pour $k = n$, $(A_h u)_n = f_n \geq 0$ entraîne :

$$\frac{1}{h^2}(-u_{n-1} + 2u_n) = f_n \geq 0 \Longrightarrow u_{n-1} \leq 2u_n$$

  or

$$u_n = \min_i u_i < u_{n-1}$$

  donc

$$2u_n < u_{n-1} + u_n < u_{n-1}$$

  $(u_n < 0)$, finalement

$$u_{n-1} < u_{n-1}$$

  impossible donc $u_n \geq 0$.
- Pour $1 < k < n$, $(A_h u)_k = f_k \geq 0$ entraîne :

$$\frac{1}{h^2}(-u_{k-1} + 2u_k - u_{k+1}) = f_k \geq 0$$

  d'où

$$(u_k - u_{k-1}) + (u_k - u_{k+1}) \geq 0,$$

mais

$$\begin{aligned} u_k - u_{k-1} &< 0, \text{ et} \\ u_k - u_{k+1} &\leq 0 \end{aligned}$$

donc

$$(u_k - u_{k-1}) + (u_k - u_{k+1}) < 0$$

contradiction, il s'ensuit que $k \notin \{2, ..., n-1\}$, finalement $u_i \geq 0, \forall i \in \{1, ..., n\}$.

■

1.6 Schéma à cinq points

Proposition 1.6.1 *: Supposons que $u \in C^4(\Omega \cup \partial\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ alors on a :*

$$\Delta u(x,y) = \frac{u(x+h,y) + u(x-h,y) - 4u(x,y) + u(x,y-h) + u(x,y+h)}{h^2} + o(h^2).$$

Preuve : On a :

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)$$

En utilisant la formule de Taylor d'ordre 3 au voisinage de $x+h$ et $x-h$

$$u(x+h,y) = u(x,y) + h\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{h^2}{2}.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{h^3}{6}.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x,y) + o(h^4) \quad \textbf{(11)}$$

$$u(x-h,y) = u(x,y) - h\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{h^2}{2}.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - \frac{h^3}{6}.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x,y) + o(h^4) \quad \textbf{(12)}$$

en sommant (11) et (12) on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \frac{u(x+h,y) - 2u(x,y) + u(x-h,y)}{h^2} + o(h^2).$$

D'une manière similaire on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \frac{u(x,y+h) - 2u(x,y) + u(x,y-h)}{h^2} + o(h^2).$$

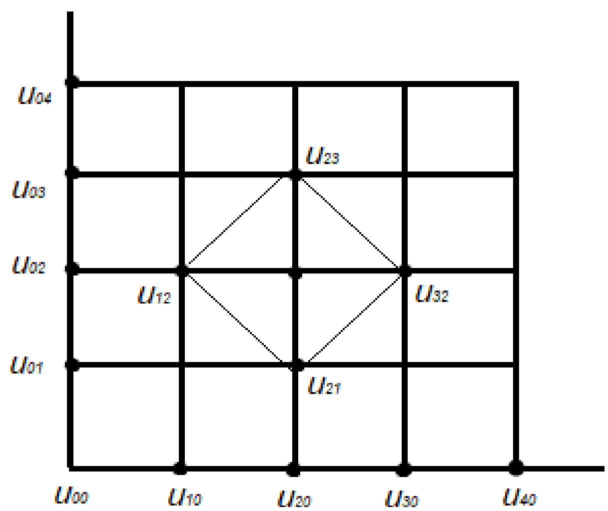
Ce qui achève la démonstration. ■

Exemple 2 *: Considérons le problème elliptique suivant :*

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = f(x,y), & (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u(x,y) = 0, & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

où $\Omega = (]0,1[)^2$ *et* $f \in C(\overline{\Omega})$. *Posons* $n = 3$, *alors* $h = \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{4}$. *D'aprés la proposition précédente on obtient le schéma numérique suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{-u_{i-1\,j} - u_{i+1\,j} + 4u_{i\,j} - u_{i\,j-1} - u_{i\,j+1}}{h^2} = f_{ij}, \quad 1 \le i,j \le n \\ u_{i\,0} = u_{0\,j} = u_{n+1\,j} = u_{i\,n+1} = 0, \qquad 0 \le i,j \le n+1 \end{cases}$$



Maillage à cinq points

Pour $i = 1$ *:*

$$\begin{cases} -u_{01} - u_{21} + 4u_{11} - u_{10} - u_{12} = h^2 f_{11}, & j = 1 \\ -u_{02} - u_{22} + 4u_{12} - u_{11} - u_{13} = h^2 f_{12}, & j = 2 \\ -u_{03} - u_{23} + 4u_{13} - u_{12} - u_{14} = h^2 f_{13}, & j = 3 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} -u_{21} + 4u_{11} - u_{12} = h^2 f_{11}, & j = 1 \\ -u_{22} + 4u_{12} - u_{11} - u_{13} = h^2 f_{12}, & j = 2 \\ -u_{23} + 4u_{13} - u_{12} = h^2 f_{13}, & j = 3 \end{cases}$$

Pour $i = 2$

$$\begin{cases} -u_{11} - u_{31} + 4u_{21} - u_{20} - u_{22} = h^2 f_{21}, & j = 1 \\ -u_{12} - u_{32} + 4u_{22} - u_{21} - u_{23} = h^2 f_{22}, & j = 2 \\ -u_{13} - u_{33} + 4u_{23} - u_{22} - u_{24} = h^2 f_{23}, & j = 3 \end{cases}$$

par conséquent

$$\begin{cases} -u_{11} - u_{31} + 4u_{21} - u_{22} = h^2 f_{21}, & j = 1 \\ -u_{12} - u_{32} + 4u_{22} - u_{21} - u_{23} = h^2 f_{22}, & j = 2 \\ -u_{13} - u_{33} + 4u_{23} - u_{22} = h^2 f_{23}, & j = 3 \end{cases}$$

Pour $i = 3$

$$\begin{cases} -u_{21} - u_{41} + 4u_{31} - u_{30} - u_{32} = h^2 f_{31}, & j = 1 \\ -u_{22} - u_{42} + 4u_{32} - u_{31} - u_{33} = h^2 f_{32}, & j = 2 \\ -u_{23} - u_{43} + 4u_{33} - u_{32} - u_{34} = h^2 f_{33}, & j = 3 \end{cases}$$

il s'ensuit

$$\begin{cases} -u_{21} + 4u_{31} - u_{32} = h^2 f_{31}, & j = 1 \\ -u_{22} + 4u_{32} - u_{31} - u_{33} = h^2 f_{32}, & j = 2 \\ -u_{23} + 4u_{33} - u_{32} = h^2 f_{33}, & j = 3 \end{cases}$$

Ce schéma s'écrit sous forme matricielle $Au = f$, $A \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ *avec :*

$u = (u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{21}, u_{22}, u_{23}, u_{31}, u_{32}, u_{33})^T$, $f = (f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{31}, f_{32}, f_{33})^T$

et

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & -I & M \\ -I & B & -I \\ M & -I & B \end{pmatrix}$$

où $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Erreur de consistance :

supposons que $u \in C^4(\overline{\Omega})$, alors

$$u(x+h,y) = u(x,y) + h\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\theta_1,y) + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_1,y),$$

$x < \theta_1 < x+h$,

$$u(x-h,y) = u(x,y) - h\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\theta_2,y) + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_2,y),$$

$x-h < \theta_2 < x$, d'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \frac{u(x-h,y) - 2u(x,y) + u(x+h,y)}{h^2} + \frac{h^2}{24}(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_1,y) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_2,y)),$$

comme $x-1 < \theta_2 < \theta_1 < x+1$, par le théorème des valeurs intermidiaires $\exists\theta \in]\theta_2,\theta_1[$ tel que :

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta,y) = \frac{1}{2}(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_1,y) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_2,y))$$

et dans ce cas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \frac{u(x-h,y) - 2u(x,y) + u(x+h,y)}{h^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta,y).$$

D'une manière similaire on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \frac{u(x,y-h) - 2u(x,y) + u(x,y+h)}{h^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,\theta'),$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \left|r_{(x,y)}\right| &= \left|\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta,y) + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,\theta')\right| \\ &\leq \frac{h^2}{12}\left(\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right\|_\infty + \left\|\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right\|_\infty\right) \\ &= c.h^2, \end{aligned}$$

où $c = \frac{1}{12}\left(\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right\|_\infty + \left\|\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right\|_\infty\right)$, on en déduit que le schéma est d'ordre 2.