

Notes de cours
Analyse numérique
Master 1

Boudiaf Naima Département de Mathématiques

Table des matières

1	Rappels et compléments sur les différences finies	1
1.1	Notions fondamentales de la méthode des différences finies	1
1.2	Consistance, Stabilité et Convergence	2
1.2.1	Consistance	2
1.2.2	Stabilité	3
1.2.3	Convergence	3
1.3	Classification des équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre 2	4
1.4	Les principales formules des différences finies	4
1.5	La méthode des différences finies en dimension 1 appliquée à un problème elliptique	7
1.5.1	Discrétisation du problème de Dirichlet	7
1.5.2	Principe du maximum discret	10
1.6	Schéma à cinq points	11
2	Introduction succincte à la méthode des éléments finis en dimension un	15
2.1	Définitions et propriétés générales : (outils de base)	15
2.1.1	Inégalité de Cauchy-Schwartz	18
2.1.2	Inégalité de Poincaré	18
2.2	Problème elliptique aux limites	20
2.2.1	Existence et unicité de la solution	21
2.3	Etude numérique	22
2.3.1	Problème elliptique modèle (Problème de Dirichlet)	22

Chapitre 1

Rappels et compléments sur les différences finies

1.1 Notions fondamentales de la méthode des différences finies

Définition 1.1.1 : Une EDP est une relation entre les variables indépendantes x_1, x_2, \dots, x_n , la fonction u , et ses dérivées partielles.

Dans le cas de 2 variables :

– Une EDP d'ordre un s'écrit par la relation :

$$f(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)) = 0.$$

– Une EDP d'ordre deux s'écrit par la relation :

$$f(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y), \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y), \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y)) = 0.$$

Définition 1.1.2 : On appelle ordre d'une EDP l'ordre le plus élevé des dérivées partielles intervenant dans l'EDP.

Définition 1.1.3 : Une EDP est linéaire si l'équation est linéaire par rapport aux dérivées partielles de la fonction u .

Exemples 1 :

1.2. CONSISTANCE, STABILITÉ ET CONVERGENCE

- 1) L'équation de Laplace : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0$, est une équation linéaire d'ordre deux.
- 2) L'équation : $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)(x, y) + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) - u \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 0$, est une équation non linéaire d'ordre 3.

Définition 1.1.4 (*Problème aux limites*) : On appelle problème aux limites une équation aux dérivées partielles munie de conditions aux limites sur la totalité de la frontière du domaine sur lequel elle est posée.

Exemples 2 :

- 1)
$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0, & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$
, c'est un problème aux limites.
- 2)
$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x), & \text{pour } 0 < t < T \in \mathbb{R} \\ x(t=0) = x_0 & \text{(conditions initiales)} \end{cases}$$
, n'est pas un problème aux limites.

Définition 1.1.5 (*Problème bien posé*) : On dit que le problème $Au = f$ est bien posé si pour toute donnée f il admet une solution unique u , et si cette solution u dépend continûment de la donnée f .

1.2 Consistance, Stabilité et Convergence

Considérons une EDP avec ses conditions aux limites et initiales :

$$\Psi(u) = 0 \tag{*}$$

de solution $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Pour chaque point ih l'équation (*) est discrétisée par différences finies sous la forme : $\Psi_i(u) = 0$.

1.2.1 Consistance

La consistance d'une méthode assure que la solution discrète tend vers la solution exacte lorsque le pas de la subdivision h tend vers 0.

Définition 1.2.1 : Une approximation est consistante d'ordre p s'il existe une constante $c > 0$ indépendante de h tel que l'erreur est majorée par $c.h^p$ pour $p > 0$ fixé.

1.2. CONSISTANCE, STABILITÉ ET CONVERGENCE

1.2.2 Stabilité

La stabilité d'un schéma est une notion visant à mesurer la propagation des erreurs engendrées par les calculs précédents dans un schéma numérique.

Définition 1.2.2 : Si les fonctions Ψ_i sont linéaires, alors la méthode peut s'écrire comme un système linéaire $A_h u_h = b_h$. On dit que ce schéma numérique est stable si la matrice de discrétisation A_h satisfait : $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}$.

Lemme 1.2.1 : Si les fonctions Ψ_i sont linéaires, alors on a l'estimation suivante sur les solutions du système : $\|u_h\|_\infty \leq \frac{1}{8} \|b_h\|_\infty$.

1.2.3 Convergence

Définition 1.2.3 : La méthode converge, si l'erreur globale $r = \max_i |r_i|$ tend vers 0 lorsque le pas de la subdivision h tend vers 0.

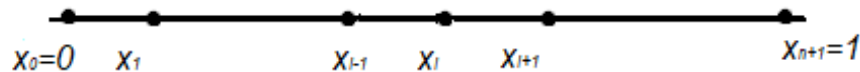
Théorème 1.2.1 : une méthode stable et consistante est convergente.

Définition 1.2.4 (Maillage) : Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n . Un maillage de Ω est un découpage de Ω en polyèdres (triangles ou rectangles pour $n = 2$, et tétraèdre ou hexaèdre pour $n = 3$). Les sommets des polyèdres sont les noeuds du maillage.

Exemples 3 :

1) $\Omega =]0, 1[$, $h = \frac{1}{n+1}$ (pas de discrétisation), $n \in \mathbb{N}$.

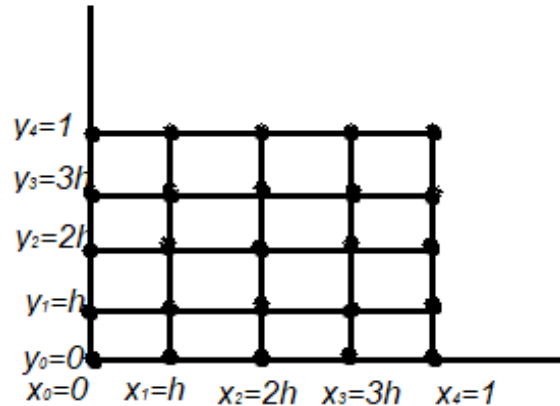
$$\Omega_h = \{x_i = ih, 0 \leq i \leq n+1\} \text{ un maillage de } \Omega.$$



2) $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$, $h = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ (maillage régulier).

1.3. CLASSIFICATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE 2

$\Omega_h = \{(ih, jh), 0 \leq i, j \leq n+1\}$, c'est l'ensemble des carrés délimités par les droites d'équations $x = ih, y = jh, 1 \leq i, j \leq n$.



maillage régulier pour $n=3$

1.3 Classification des équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre 2

L'équation aux dérivées partielles linéaires d'ordre 2 à deux variables s'écrit sous la forme :

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = g \quad (1)$$

Définition 1.3.1 : On dit que l'équation (1) est

- Elliptique si : $b^2 - 4ac < 0$.
- Parabolique si : $b^2 - 4ac = 0$.
- Hyperbolique si : $b^2 - 4ac > 0$.

1.4 Les principales formules des différences finies

Théorème 1.4.1 (Développement de Taylor) : Soit f une fonction de classe C^{n+1} au voisinage d'un point $x \in \mathbb{R}$, alors pour tout h réel on a :

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) + o(h^{n+1}).$$

1.4. LES PRINCIPALES FORMULES DES DIFFÉRENCES FINIES

Proposition 1.4.1 : Les formules suivantes donnent des approximations des dérivées de f au point x .

1) Formule des différences finies progressive d'ordre 1 en h :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + o(h).$$

2) Formule des différences finies rétrograde d'ordre 1 en h :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + o(h).$$

3) Formule des différences finies centrée d'ordre 1 en h :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + o(h^2).$$

4) Formule des différences finies centrée d'ordre 2 en h :

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + o(h^2).$$

Preuve :

3) Ecrivons la formule de Taylor d'ordre 2 aux points $(x+h)$ et $(x-h)$ on obtient :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + o(h^3) \quad (1)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + o(h^3) \quad (2)$$

en soustrayant la seconde équation de la première on obtient :

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + o(h^2).$$

4) Ecrivons la formule de Taylor d'ordre 3 aux points $(x+h)$ et $(x-h)$ on obtient :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + o(h^4) \quad (3)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + o(h^4) \quad (4)$$

1.4. LES PRINCIPALES FORMULES DES DIFFÉRENCES FINIES

(3)+(4) donne :

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + o(h^2)$$

ce qui achève la démonstration.

■

Théorème 1.4.2 : Pour toute fonction $f \in C^4$, pour tout point $x \in \mathbb{R}$, il existe une constante $c > 0$ tel que pour tout $h \in]0, 1[$ on a :

$$|r_x| = \left| f''(x) - \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \right| \leq c.h^2.$$

(r_x l'erreur en point x).

Remarque 1.4.1 : c dépend de f et x , mais pas de h , on remarque que l'erreur est divisée par 4 chaque fois que h est divisé par 2.

Preuve (Théorème 1.4.2) : Le développement de Taylor d'ordre 3 aux points $(x+h)$ et $(x-h)$ est donné par :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\theta_1) \quad (5)$$

où $x < \theta_1 < x+h$,

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\theta_2) \quad (6)$$

où $x-h < \theta_2 < x$.

(5)+(6) donne :

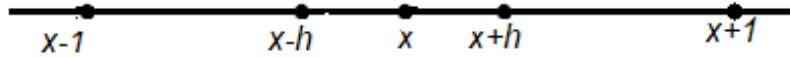
$$f(x+h) - f(x-h) - 2f(x) = h^2 f''(x) + \frac{h^4}{24}(f^{(4)}(\theta_1) + f^{(4)}(\theta_2)),$$

utilisons le théorème des valeurs intermédiaires on obtient :

$$\frac{1}{h^2}(f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)) = f''(x) + \frac{h^2}{12}(f^{(4)}(\beta)) \quad (7)$$

1.5. LA MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES EN DIMENSION 1 APPLIQUÉE À UN PROBLÈME ELLIPTIQUE

$$\beta \in]\theta_2, \theta_1[$$



on a : $x - 1 < x - h < \theta_2 < x$, $x < \theta_1 < x + h < x + 1$, il s'ensuit : $x - 1 < \theta_2 < \beta < \theta_1 < x + 1$, par conséquent $|f^{(4)}(\beta)| \leq \max_{x-1 \leq t \leq x+1} |f^{(4)}(t)|$, alors (7) implique :

$$\left| f''(x) - \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \right| \leq \frac{h^2}{12} \max_{x-1 \leq t \leq x+1} |f^{(4)}(t)|,$$

il suffit alors de prendre $c = \frac{1}{12} \max_{x-1 \leq t \leq x+1} |f^{(4)}(t)|$. ■

1.5 La méthode des différences finies en dimension 1 appliquée à un problème elliptique

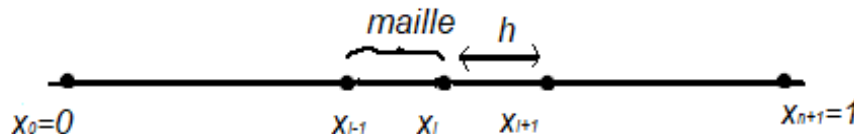
1.5.1 Discrétisation du problème de Dirichlet

Exemple 1 : (*Problème de Dirichlet homogène*) : Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & \text{pour } x \in \Omega =]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

avec $f \in C([0, 1])$.

Notre objectif est de proposer un schéma qui permettra de calculer des valeurs u_i qui sont des approximations de $u(x_i)$.



Le domaine (l'intervalle) $[0, 1]$ est subdivisé en $(n+1)$ points, notons $h = \frac{1}{n+1}$ le pas d'espace (destiné à être petit, n destiné à être grand). on a $x_i = ih$, $i = 0, \dots, n+1$.

1.5. LA MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES EN DIMENSION 1 APPLIQUÉE À UN PROBLÈME ELLIPTIQUE

Pour approcher la dérivée seconde on utilise une formule de différences finies centrée :

$$-u''(x_i) + o(h^2) = \frac{-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1}))}{h^2} = f(x) + o(h^2),$$

remplaçons $u(x_{i-1})$, $u(x_i)$ et $u(x_{i+1})$ par u_{i-1} , u_i , et u_{i+1} respectivement on obtient le schéma numérique suivant :

$$\begin{cases} \frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} = f(x_i), & i = 1, \dots, n \\ u_0 = 0, u_{n+1} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{h^2}(2u_1 - u_2) = f_1; \\ \frac{1}{h^2}(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) = f_i, & i = 2, \dots, n-1; \\ \frac{1}{h^2}(-u_{n-1} + 2u_n) = f_n. \end{cases}$$

ce schéma correspond la résolution d'un système linéaire qui s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A_h u = f \quad (8)$$

A_h est une matrice tridiagonale, symétrique et définie positive, donc on peut utiliser la décomposition de Cholesky, $A_h = LL^T$ pour résoudre le système linéaire $A_h u = f$.

Théorème 1.5.1 : *Supposons que $u \in C^4([0, 1])$, alors il existe une constante $c > 0$ tel que pour tout $h \in]0, 1[$, l'erreur au point x_i est donnée par :*

$$\max_{1 \leq i \leq n} |u_i - u(x_i)| \leq c.h^2.$$

1.5. LA MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES EN DIMENSION 1 APPLIQUÉE À UN PROBLÈME ELLIPTIQUE

Preuve : Le schéma numérique :

$$\frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

est équivalent au système :

$$Au = f \tag{9}$$

d'un autre côté la solution exacte $u(x)$ satisfait l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1}))}{h^2} &= f(x) + o(h^2) \\ \iff Aw &= f + r \end{aligned} \tag{10}$$

où

$$w = \begin{pmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ u(x_n) \end{pmatrix}, \text{ et } r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}.$$

(10)-(9) donne :

$$A(w - u) = r,$$

d'après le lemme 1.2.1 on a :

$$\|w - u\|_\infty \leq \frac{1}{8} \|r\|_\infty$$

c-à-d

$$\max_{1 \leq i \leq n} |u(x_i) - u_i| \leq \frac{1}{8} \max_{1 \leq i \leq n} |r_i|,$$

d'après le théorème 1.4.2 on a :

$$|r_i| \leq \frac{1}{12} \max_{0 \leq x \leq 1} |u^{(4)}(x)| \cdot h^2, \quad i = 1, \dots, n$$

d'où :

$$\max_{1 \leq i \leq n} |u(x_i) - u_i| \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{12} \max_{0 \leq x \leq 1} |u^{(4)}(x)| \cdot h^2$$

il suffit de prendre $c = \frac{1}{96} \max_{0 \leq x \leq 1} |u^{(4)}(x)|$. ■

1.5. LA MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES EN DIMENSION 1 APPLIQUÉE À UN PROBLÈME ELLIPTIQUE

1.5.2 Principe du maximum discret

Proposition 1.5.1 : Soit $f \in \mathbb{R}^n$ tel que $f_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Si $u \in \mathbb{R}^n$ vérifie $A_h u = f$, où A_h est donnée par (8), alors $u_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Preuve : Soit

$$k = \min \left\{ i / u_i = \min_j (u_j) \right\}.$$

On suppose que $u_k < 0$. Trois cas sont possibles : $k = 1$, $1 < k < n$, et $k = n$.

– Pour $k = 1$, $(A_h u)_1 = f_1 \geq 0$ entraîne :

$$\frac{1}{h^2}(2u_1 - u_2) = f_1 \geq 0 \implies u_2 \leq 2u_1$$

or

$$u_1 = \min_i u_i \leq u_2$$

donc

$$2u_1 \leq u_2 + u_1 < u_2$$

($u_1 < 0$), finalement

$$u_2 < u_2$$

impossible donc $u_1 \geq 0$.

– Pour $k = n$, $(A_h u)_n = f_n \geq 0$ entraîne :

$$\frac{1}{h^2}(-u_{n-1} + 2u_n) = f_n \geq 0 \implies u_{n-1} \leq 2u_n$$

or

$$u_n = \min_i u_i < u_{n-1}$$

donc

$$2u_n < u_{n-1} + u_n < u_{n-1}$$

($u_n < 0$), finalement

$$u_{n-1} < u_{n-1}$$

impossible donc $u_n \geq 0$.

– Pour $1 < k < n$, $(A_h u)_k = f_k \geq 0$ entraîne :

$$\frac{1}{h^2}(-u_{k-1} + 2u_k - u_{k+1}) = f_k \geq 0$$

d'où

$$(u_k - u_{k-1}) + (u_k - u_{k+1}) \geq 0,$$

1.6. SCHÉMA À CINQ POINTS

mais

$$\begin{aligned}u_k - u_{k-1} &< 0, \text{ et} \\u_k - u_{k+1} &\leq 0\end{aligned}$$

donc

$$(u_k - u_{k-1}) + (u_k - u_{k+1}) < 0$$

contradiction, il s'ensuit que $k \notin \{2, \dots, n-1\}$, finalement $u_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

■

1.6 Schéma à cinq points

Proposition 1.6.1 : Supposons que $u \in C^4(\Omega \cup \partial\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ alors on a :

$$\Delta u(x, y) = \frac{u(x+h, y) + u(x-h, y) - 4u(x, y) + u(x, y-h) + u(x, y+h)}{h^2} + o(h^2).$$

Preuve : On a :

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)$$

En utilisant la formule de Taylor d'ordre 3 au voisinage de $x+h$ et $x-h$

$$u(x+h, y) = u(x, y) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{h^3}{6} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y) + o(h^4) \quad (11)$$

$$u(x-h, y) = u(x, y) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) - \frac{h^3}{6} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y) + o(h^4) \quad (12)$$

en sommant (11) et (12) on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = \frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2} + o(h^2).$$

D'une manière similaire on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \frac{u(x, y+h) - 2u(x, y) + u(x, y-h)}{h^2} + o(h^2).$$

Ce qui achève la démonstration. ■

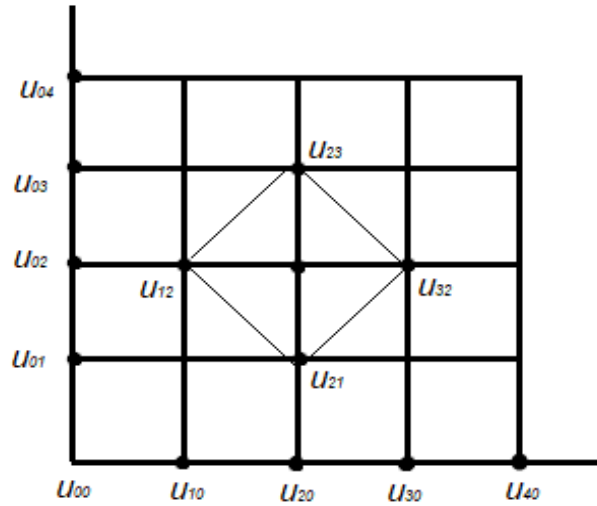
1.6. SCHÉMA À CINQ POINTS

Exemple 2 : Considérons le problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

où $\Omega =]0, 1]^2$ et $f \in C(\overline{\Omega})$. Posons $n = 3$, alors $h = \frac{1}{n+1} = \frac{1}{4}$. D'après la proposition précédente on obtient le schéma numérique suivant :

$$\begin{cases} \frac{-u_{i-1,j} - u_{i+1,j} + 4u_{i,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1}}{h^2} = f_{ij}, & 1 \leq i, j \leq n \\ u_{i,0} = u_{0,j} = u_{n+1,j} = u_{i,n+1} = 0, & 0 \leq i, j \leq n+1 \end{cases}$$



Maillage à cinq points

Pour $i = 1$:

$$\begin{cases} -u_{01} - u_{21} + 4u_{11} - u_{10} - u_{12} = h^2 f_{11}, & j = 1 \\ -u_{02} - u_{22} + 4u_{12} - u_{11} - u_{13} = h^2 f_{12}, & j = 2 \\ -u_{03} - u_{23} + 4u_{13} - u_{12} - u_{14} = h^2 f_{13}, & j = 3 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} -u_{21} + 4u_{11} - u_{12} = h^2 f_{11}, & j = 1 \\ -u_{22} + 4u_{12} - u_{11} - u_{13} = h^2 f_{12}, & j = 2 \\ -u_{23} + 4u_{13} - u_{12} = h^2 f_{13}, & j = 3 \end{cases}$$

1.6. SCHÉMA À CINQ POINTS

Pour $i = 2$

$$\begin{cases} -u_{11} - u_{31} + 4u_{21} - u_{20} - u_{22} = h^2 f_{21}, & j = 1 \\ -u_{12} - u_{32} + 4u_{22} - u_{21} - u_{23} = h^2 f_{22}, & j = 2 \\ -u_{13} - u_{33} + 4u_{23} - u_{22} - u_{24} = h^2 f_{23}, & j = 3 \end{cases}$$

par conséquent

$$\begin{cases} -u_{11} - u_{31} + 4u_{21} - u_{22} = h^2 f_{21}, & j = 1 \\ -u_{12} - u_{32} + 4u_{22} - u_{21} - u_{23} = h^2 f_{22}, & j = 2 \\ -u_{13} - u_{33} + 4u_{23} - u_{22} = h^2 f_{23}, & j = 3 \end{cases}$$

Pour $i = 3$

$$\begin{cases} -u_{21} - u_{41} + 4u_{31} - u_{30} - u_{32} = h^2 f_{31}, & j = 1 \\ -u_{22} - u_{42} + 4u_{32} - u_{31} - u_{33} = h^2 f_{32}, & j = 2 \\ -u_{23} - u_{43} + 4u_{33} - u_{32} - u_{34} = h^2 f_{33}, & j = 3 \end{cases}$$

il s'ensuit

$$\begin{cases} -u_{21} + 4u_{31} - u_{32} = h^2 f_{31}, & j = 1 \\ -u_{22} + 4u_{32} - u_{31} - u_{33} = h^2 f_{32}, & j = 2 \\ -u_{23} + 4u_{33} - u_{32} = h^2 f_{33}, & j = 3 \end{cases}$$

Ce schéma s'écrit sous forme matricielle $Au = f$, $A \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ avec :

$$u = (u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{21}, u_{22}, u_{23}, u_{31}, u_{32}, u_{33})^T, f = h^2(f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{31}, f_{32}, f_{33})^T$$

et

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & -I & M \\ -I & B & -I \\ M & -I & B \end{pmatrix}$$

$$\text{où } B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Erreur de consistance :

1.6. SCHÉMA À CINQ POINTS

supposons que $u \in C^4(\bar{\Omega})$, alors

$$u(x+h, y) = u(x, y) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\theta_1, y) + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_1, y),$$

$$x < \theta_1 < x+h,$$

$$u(x-h, y) = u(x, y) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\theta_2, y) + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_2, y),$$

$$x-h < \theta_2 < x, \text{ d'où}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = \frac{u(x-h, y) - 2u(x, y) + u(x+h, y)}{h^2} + \frac{h^2}{24} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_1, y) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_2, y) \right),$$

comme $x-1 < \theta_2 < \theta_1 < x+1$, par le théorème des valeurs intermédiaires $\exists \theta \in]\theta_2, \theta_1[$ tel que :

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta, y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_1, y) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_2, y) \right)$$

et dans ce cas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = \frac{u(x-h, y) - 2u(x, y) + u(x+h, y)}{h^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta, y).$$

D'une manière similaire on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \frac{u(x, y-h) - 2u(x, y) + u(x, y+h)}{h^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, \theta'),$$

par conséquent

$$\begin{aligned} |r_{(x,y)}| &= \left| \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta, y) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, \theta') \right| \\ &\leq \frac{h^2}{12} \left(\left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right\|_{\infty} \right) \\ &= c.h^2, \end{aligned}$$

où $c = \frac{1}{12} \left(\left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right\|_{\infty} \right)$, on en déduit que le schéma est d'ordre 2.

Chapitre 2

Introduction succincte à la méthode des éléments finis en dimension un

2.1 Définitions et propriétés générales : (outils de base)

Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n .

Définition 2.1.1 : (support d'une fonction) : Le support d'une fonction f est le plus petit ensemble fermé de valeurs de x où $f(x) \neq 0$.

Définition 2.1.2 : Un sous ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est dit compact s'il est fermé et borné.

Définition 2.1.3 : On appelle $D(\Omega)$, (Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n) l'espace des fonctions infiniment différentiable sur Ω dont le support compact est inclus dans Ω .

Exemple 3 1) :

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \in]-1, 1[\\ 0, & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

a comme support $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$, qui est compact, et $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, donc $f \in D(\mathbb{R})$.

2) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, avec

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|_2^{1-1}}}, & \text{si } \|x\|_2 < 1 \\ 0, & \text{si } \|x\|_2 \geq 1 \end{cases}$$

2.1. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES : (Outils de Base)

on vérifie facilement que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, en effet son support est la boule fermée $\overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}$, qui est un compact, et $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Définition 2.1.4 : On appelle fonctionnelle T toute application qui associée à une fonction φ un scalaire $\langle T, \varphi \rangle$, $\varphi \in E$ ensemble de fonctions appelé le domaine de définition de la fonctionnelle. ($T : E \rightarrow \mathbb{R}$)

$$\varphi \longrightarrow T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle.$$

Définition 2.1.5 : Une fonctionnelle T est dite linéaire sur l'ensemble de fonction E si elle vérifie les conditions suivantes :

- $\langle T, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \langle T, \varphi_1 \rangle + \langle T, \varphi_2 \rangle, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in E;$
- $\langle T, \alpha\varphi \rangle = \alpha \langle T, \varphi \rangle, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \varphi \in E.$

Définition 2.1.6 : Une fonction f est dite localement intégrable sur Ω si elle est intégrable sur tout compact inclus dans Ω , autrement dit si :

$$\int_A |f(x)| dx < \infty, \forall A \subset \Omega, A \text{ compact.}$$

L'ensemble des fonctions localement intégrables sur Ω noté $L^1_{loc}(\Omega)$.

Définition 2.1.7 : Un espace fonctionnel linéaire E est un ensemble de fonctions définies sur Ω (ouvert) et vérifiant :

- Pour tout $w \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a : $\alpha w \in E$;
- Pour tout $w_1, w_2 \in E$, on a : $w_1 + w_2 \in E$

Définition 2.1.8 : $L^2(\Omega)$ est un espace fonctionnel linéaire où :

$$L^2(\Omega) = \left\{ w / w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ et } \int_{\Omega} |w(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

qui est un Hilbert muni de produit scalaire :

$$\langle w, u \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} (w(x) \cdot u(x)) dx$$

Définition 2.1.9 : (Espace de Sobolev)

2.1. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES : (OUTILS DE BASE)

- On note $H^1(\Omega)$ l'espace fonctionnel linéaire défini par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ w \in L^2(\Omega) / \frac{\partial w}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i \right\}.$$

les dérivées $\frac{\partial w}{\partial x_i}$ sont prises au sens faible (au sens de distributions).

- L'espace :

$$H_0^1(\Omega) = \{ w \in H^1(\Omega) / w|_{\partial\Omega} = 0 \}$$

- On note :

$$H^2(\Omega) = \left\{ w \in L^2(\Omega) / \frac{\partial w}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega), \forall i \right\}$$

Exemple 4 : $\Omega =]0, 1[$, $f(x) = x^{-\frac{1}{4}} \in L^2(\Omega)$, car $\int_0^1 (x^{-\frac{1}{4}})^2 dx = 2 < \infty$, $x^{-\frac{1}{4}} \notin L^2(\Omega)$.

Proposition 2.1.1 :

- l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire défini par :

$$\langle w, u \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (w \cdot u + \nabla w \cdot \nabla u) dx$$

$w, u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\nabla w = \left(\frac{\partial w}{\partial x_1}, \frac{\partial w}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial w}{\partial x_n} \right)^T$, et la norme associée est donnée par :

$$\|w\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (w^2 + |\nabla w|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

- l'espace $H_0^1(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|w\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (|\nabla w|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

et le produit scalaire associé :

$$\langle w, u \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla u dx.$$

Définition 2.1.10 : La fermeture de $D(\Omega)$ est $H_0^1(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

2.1. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES : (OUTILS DE BASE)

Corollaire 2.1.1 : Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , alors $D(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$, pour $1 \leq p < \infty$. (En particulier $D(\Omega)$ dense dans $L^2(\Omega)$).

Preuve : Brezis page 71. ■

Théorème 2.1.1 : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, tel que :

$$\int f \cdot \varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in D(\Omega),$$

alors $f = 0$ p.p sur Ω .

Preuve : Brezis page 61. ■

Lemme 2.1.1 : Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , et f une fonction continue dans Ω si $\forall \varphi \in D(\Omega)$ on a $\int f \cdot \varphi dx = 0$, alors $f = 0$ p.p sur Ω .

2.1.1 Inégalité de Cauchy-Schwartz

Lemme 2.1.2 : Soient w et u deux fonctions de $L^2(\Omega)$, alors :

$$\left| \langle w, u \rangle_{L^2(\Omega)} \right| \leq \|w\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

Preuve : (TD). ■

2.1.2 Inégalité de Poincaré

Théorème 2.1.2 : Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n borné dans une direction d'espace (ou plus) alors il existe une constante $c > 0$, ne depend que de Ω tel que :

$$\forall w \in H_0^1(\Omega), \quad \|w\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\Omega) \|w\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Exemple 5 : Posons $\Omega =]a, b[$, on a :

$$H^1(\Omega) = \{w \in L^2(\Omega) / w' \in L^2(\Omega)\} \text{ et}$$

$$H_0^1(\Omega) = \{w \in L^2(\Omega) / w' \in L^2(\Omega) \text{ et } w(a) = w(b) = 0\}.$$

On a :

$$w(x) = \int_a^x w'(t) dt = \int_a^x 1 \cdot w'(t) dt \leq \int_a^b 1 \cdot w'(t) dt = \langle 1, w' \rangle_{L^2(\Omega)}$$

2.1. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES : (OUTILS DE BASE)

inégalité de cauchy-schwartz implique :

$$\begin{aligned}
 |w(x)| &\leq \left(\int_a^b 1^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |w'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \sqrt{b-a} \left(\int_a^b |w'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 \implies |w(x)|^2 &\leq (b-a) \left(\int_a^b |w'(x)|^2 dx \right) \\
 \implies \int_a^b |w(x)|^2 dx &\leq (b-a) \int_a^b \left(\int_a^b |w'(x)|^2 dx \right) dx \\
 &= (b-a)^2 \left(\int_a^b |w'(x)|^2 dx \right)
 \end{aligned}$$

d'où :

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq (b-a) \|w\|_{H_0^1(\Omega)}$$

il suffit de prendre $c(\Omega) = b-a$.

Remarque 2.1.1 : les deux normes $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ et $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ sont équivalentes dans $H_0^1(\Omega)$.

Preuve : En effet, d'après l'inégalité de Poincaré :

$$\begin{aligned}
 \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq c^2(\Omega) \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\
 \implies \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\int_{\Omega} |w'(x)|^2 dx \right) &\leq c^2(\Omega) \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \left(\int_{\Omega} |w'(x)|^2 dx \right) \\
 &= c^2(\Omega) \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2
 \end{aligned}$$

ce qui entraîne :

$$\|w\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (c^2(\Omega) + 1) \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \quad (13)$$

D'un autre côté on a :

$$\|w\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \geq \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad (14)$$

De (13) et (14) on en déduit :

$$\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|w\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{(c^2(\Omega) + 1)} \|w\|_{H_0^1(\Omega)}$$

par conséquent les deux normes sont équivalentes dans $H_0^1(\Omega)$. ■

2.2. PROBLÈME ELLIPTIQUE AUX LIMITES

Définition 2.1.11 : Une forme linéaire $L : E \longrightarrow \mathbb{R}$ sur l'espace de Hilbert E muni de la norme $\|\cdot\|_E$ est dite bornée sur E s'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$|L(w)| \leq c \|w\|_E, \quad \forall w \in E.$$

Remarque 2.1.2 : Si L est bornée sur E alors L est continue sur E .

Preuve : Soit $(w_n)_n$ une suite de E convergente vers w ($\lim_{n \rightarrow +\infty} \|w_n - w\|_E = 0$). Comme $L(\cdot)$ est borné, alors $\exists c > 0$, tel que

$$|L(w_n - w)| = |L(w_n) - L(w)| \leq c \|w_n - w\|_E \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

d'où

$$L(w_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L(w)$$

■

Définition 2.1.12 : L'ensemble de toutes les formes linéaires continues sur un espace de Hilbert E est appelé espace dual de E et est noté E' .

Définition 2.1.13 : $a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire tel que E est un espace de Hilbert, $a(\cdot, \cdot)$ est dite bornée sur $E \times E$ s'il existe une constante $c > 0$ tel que :

$$|a(w, u)| \leq c \|w\|_E \cdot \|u\|_E, \quad \forall w, u \in E.$$

Remarque 2.1.3 : Si $a(\cdot, \cdot)$ est bornée sur $E \times E$ alors $a(\cdot, \cdot)$ est continue sur $E \times E$.

Définition 2.1.14 : Une forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est dite symétrique si :

$$a(w, u) = a(u, w), \quad \forall w, u \in E.$$

Définition 2.1.15 : Une forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est dite coercive s'il existe une constante $M > 0$, telle que :

$$a(w, w) \geq M \|w\|_E^2, \quad \forall w \in E.$$

2.2 Problème elliptique aux limites

Dans cette partie nous abordons l'étude théorique de certains problèmes aux limites. Cette étude est basée sur la formulation variationnelle de ces problèmes.

2.2. PROBLÈME ELLIPTIQUE AUX LIMITES

2.2.1 Existence et unicité de la solution

Soit E un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ et de norme $\|\cdot\|_E$, $a(\cdot, \cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire.

Pour $L \in E'$ (E' dual de E), on considère le problème suivant :

$$(I) \begin{cases} \text{Trouver } u \in E \text{ tel que} \\ \forall w \in E, a(u, w) = \langle L, w \rangle = L(w) \end{cases}$$

Théorème 2.2.1 : (*Lax-Milgram*) Si $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire, continue, et coercive, L est une forme linéaire et continue, alors le problème (I) admet une solution unique $u \in E$, de plus cette solution dépend continûment de la forme linéaire L .

Preuve : Allaire page 74. ■

Corollaire 2.2.1 : Sous les hypothèses du théorème de Lax-Milgram, et si de plus $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique alors :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Trouver } u \in E \text{ tel que} \\ J(u) = \min_{w \in E} J(w) \\ J(w) = \frac{1}{2}a(w, w) - L(w). \end{cases} \quad (II)$$

Preuve

– (I) \implies (II) : Supposons que $u \in E$, u solution de (I), $\forall w \in E$, $w = w_1 - u + u = w_1 + u$, on a

$$\begin{aligned} J(w_1 + u) &= \frac{1}{2}a(w_1 + u, w_1 + u) - L(w_1 + u) \\ &= \frac{1}{2}a(w_1, w_1) + \frac{1}{2}a(u, u) - L(u) + a(w_1, u) - L(w_1) \\ &= \frac{1}{2}a(w_1, w_1) + J(u) \\ &\geq J(u) + \frac{1}{2}M \|w_1\|_E^2 \geq J(u) \end{aligned}$$

($a(w_1, u) - L(w_1) = 0$, car u est une solution de (I)), il s'ensuit que :

$$\forall w \in E, J(w) \geq J(u)$$

ce qui entraîne que u est un minimiseur de J .

2.3. ETUDE NUMÉRIQUE

- (II) \implies (I) : Supposons que u est un minimiseur de J , pour tout $w \in E$ considérons la fonction :

$$\psi(\lambda) = J(u + \lambda w), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

on a :

$$J(u) \leq J(w), \quad \forall w \in E$$

par conséquent :

$$\begin{aligned} J(u) &\leq J(u + \lambda w) \implies \\ J(u) &= \psi(0) \leq \psi(\lambda), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

d'où 0 est un minimiseur de ψ , il s'ensuit que $\psi'(0) = 0$, d'un autre côté on a :

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{2} [a(u, u) + 2\lambda a(u, w) + \lambda^2 a(w, w) - L(u) - \lambda L(w)]$$

et

$$\begin{aligned} \psi'(\lambda) &= a(u, w) + 2\lambda a(w, w) - L(w) \\ \psi'(0) = 0 &\implies a(u, w) - L(w) = 0 \implies a(u, w) = L(w), \quad \forall w \in E. \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration.

■

2.3 Etude numérique

2.3.1 Problème elliptique modèle (Problème de Dirichlet)

Considérons le problème au limites suivant :

$$(P) \begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in \Omega =]0, 1[\quad \dots(\mathbf{1}) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

$$f \in L^2(\Omega).$$

Formulation variationnelle :

Notre objectif est de construire la forme bilinéaire $a(., .)$, une forme linéaire $L(.)$, et un espace de Hilbert E tel que (P) soit équivalent au problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in E \text{ tel que} \\ a(u, w) = L(w), \quad \forall w \in E. \end{cases}$$

2.3. ETUDE NUMÉRIQUE

Multiplions l'équation (1) par une fonction test $w \in D(\Omega)$ on obtient :

$$-u''(x)w(x) = f(x)w(x)$$

en intégrant cette dernière équation par partie sur Ω on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 -u''(x)w(x)dx &= \int_0^1 f(x)w(x)dx \\ \implies \int_0^1 u'(x)w'(x)dx + u'(0)w(0) - u'(1)w(1) &= \int_0^1 f(x)w(x)dx \end{aligned}$$

comme u satisfait les conditions aux limites de Dirichlet, alors on choisit l'espace de Hilbert E tel que $\forall w \in E, w(0) = w(1) = 0$, on obtient :

$$\int_0^1 u'(x)w'(x)dx = \int_0^1 f(x)w(x)dx$$

pour que $\int_0^1 u'(x)w'(x)dx$ ait un sens il suffit que $u', w' \in L^2(\Omega)$, de même pour $\int_0^1 f(x)w(x)dx$ il suffit que $w \in L^2(\Omega)$, et comme les conditions aux bords du problème (P) impliquent $u \in H_0^1(\Omega)$, on prend $E = H_0^1(\Omega)$, et on obtient la formulation variationnelle suivante :

$$(FV) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u, w) = L(w), \forall w \in H_0^1(\Omega) \dots (2) \end{array} \right.$$

où : $a(u, w) = \int_0^1 u'(x)w'(x)dx$ et $L(w) = \int_0^1 f(x)w(x)dx$.

Existence et unicité de la solution :

1. Il est clair que $a(u, w)$ est une forme bilinéaire et $L(w)$ est une forme linéaire par linéarité de l'intégrale.

2.3. ETUDE NUMÉRIQUE

2. Montrons que $L(\cdot)$ est continue, en effet pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$ on a :

$$\begin{aligned}
 |L(w)| &= \left| \int_0^1 f(x)w(x)dx \right| \\
 &\stackrel{C.S}{\leq} \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |w(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \|f\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\stackrel{Pc}{\leq} c(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \\
 &= \alpha \|w\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \alpha = c(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)} > 0
 \end{aligned}$$

$L(\cdot)$ est bornée alors $L(\cdot)$ est continue.

3. Montrons que $a(\cdot, \cdot)$ est continue, pour tout $u, w \in H_0^1(\Omega)$ on a :

$$\begin{aligned}
 |a(u, w)| &= \left| \int_0^1 u'(x)w'(x)dx \right| \\
 &\leq \|u'\|_{L^2(\Omega)} \|w'\|_{L^2(\Omega)} \\
 &= \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \\
 &= c \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|w\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad c = 1 > 0
 \end{aligned}$$

d'où $a(\cdot, \cdot)$ est bornée alors $a(\cdot, \cdot)$ est continue.

4. $a(u, u) = \int_0^1 (u'(x))^2 dx = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \geq M \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$, ($M = 1 > 0$), $\forall u \in H_0^1(\Omega)$,
par conséquent $a(\cdot, \cdot)$ est coercive.

D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ unique solution de (FV).

5. Montrons que $(FV) \iff (P)$, dans le sens où la solution de (FV) est une solution de u .

" \Leftarrow " est vérifié.

" \Rightarrow " Supposons que u est une solution de (FV), on a :

– $u \in H_0^1(\Omega)$, il s'ensuit que les conditions aux bords sont satisfaites ($u(0) = u(1) = 0$).

– Comme $D(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, alors (2) implique

$$\int_0^1 u'(x)w'(x)dx = \int_0^1 f(x)w(x)dx, \quad \forall w \in D(\Omega)$$

2.3. ETUDE NUMÉRIQUE

par intégration par partie sur Ω on obtient :

$$\int_0^1 (u''(x) + f(x))w(x)dx = 0, \forall w \in D(\Omega)$$

d'après le théorème 2.1.1 :

$$u''(x) + f(x) = 0, \text{ p.p sur } \Omega$$

d'où : $-u''(x) = f(x)$, p.p sur Ω .

$f \in L^2(\Omega)$, d'où $u'' \in L^2(\Omega)$, comme $u, u' \in L^2(\Omega)$, on en déduit que $u \in H^2(\Omega)$ (u est régulière), l'équation (1) est donc satisfaite au sens de $L^2(\Omega)$.

Approximation variationnelle par des éléments finis :

Une méthode d'approximation consiste à rechercher une solution approchée dans un sous-espace Hilbertien $E_h \subset E$ de dimension finie pour la formulation variationnelle (FV), dans ce cas le problème approché est défini comme suit :

$$(FV)_h \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in E_h \text{ tel que} \\ a(u_h, w_h) = L(w_h), \forall w_h \in E_h \end{array} \right.$$

• $E_h \subset E$, alors $a(., .)$ reste continue et coercive dans E_h , et $L(.) \in E'_h$ (linéaire et continue dans E_h), il s'ensuit que $(FV)_h$ admet une unique solution (Lax-Milgram).

• E_h est de dimension finie, donc il existe une famille $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$ base de E_h ($\dim(E_h) = n$), alors $u_h = \sum_{i=1}^n u_{h,i} \varphi_i$, u_h est une solution de $(FV)_h$ si u_h est une solution du système suivant :

$$a(u_h, \varphi_k) = L(\varphi_k), \quad 1 \leq k \leq n$$

$$\Leftrightarrow a\left(\sum_{i=1}^n u_{h,i} \varphi_i, \varphi_k\right) = L(\varphi_k), \quad 1 \leq k \leq n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n u_{h,i} a(\varphi_i, \varphi_k) = L(\varphi_k), \quad 1 \leq k \leq n$$

ces équations peuvent se reformuler sous la forme d'un système linéaire : $A_h u_h = L_h$, où $u_h = (u_{h,i})_{1 \leq i \leq n}$, $L_h = (L(\varphi_k))_{1 \leq k \leq n}$, et $A_h = (a(\varphi_i, \varphi_k))_{1 \leq i, k \leq n} = (a_{ki})_{1 \leq i, k \leq n}$.

• La matrice A_h est symétrique si $a(., .)$ est symétrique.

2.3. ETUDE NUMÉRIQUE

Lemme 2.3.1 (Céa) : Supposons que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram (L-M) sont vérifiées pour (FV). Alors il existe une solution unique u_h au problème $(FV)_h$, la matrice A_h est inversible et on a l'estimation d'erreur :

$$\|u - u_h\|_E \leq \frac{c}{M} \min_{w_h \in E_h} \|u - w_h\|_E$$

où c est la constante de continuité de $a(.,.)$ et M la constante de coercivité.

Si $a(.,.)$ est symétrique alors :

$$\|u - u_h\|_E \leq \sqrt{\frac{c}{M}} \min_{w_h \in E_h} \|u - w_h\|_E$$

Preuve : Allaire Grégoire page 154. (Analyse numérique et optimisation). ■

Lemme 2.3.2 : Sous les hypothèses du théorème de (L-M) la matrice A_h est définie positive.

Preuve : Exercice. ■

Définition 2.3.1 : On dit que la famille des problèmes $(FV)_h$ associée à E_h est convergente si et seulement si :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_E = 0.$$

On dit que la convergence est d'ordre p si et seulement si il existe $k > 0$ indépendant de h tel que :

$$\|u - u_h\|_E \leq kh^p.$$

Lemme 2.3.3 : Sous les hypothèses du théorème de (L-M), on suppose qu'il existe un sous-espace $F \subset E$ dense dans E , et une application ψ_h définie de F dans E_h (opérateur d'interpolation) tel que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|w - \psi_h(w)\|_E = 0, \quad \forall w \in F,$$

alors la famille des problèmes $(FV)_h$ associée à E_h est convergente.

Lemme 2.3.4 (Formule d'orthogonalité de Galarkin) : Soit u solution de (FV) et soit u_h solution de $(FV)_h$, alors :

$$a(u - u_h, w_h) = 0, \quad \forall w_h \in E_h.$$

Preuve : Exercice. ■

2.3. ETUDE NUMÉRIQUE

Approximation par éléments finis P1 :

- Considérons un maillage uniforme de $[0, 1]$, $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1$, $x_i = x_0 + ih = ih$, pour $0 \leq i \leq n + 1$.

- Introduisons l'espace fonctionnel de dimension finie composé des fonctions continues sur $[0, 1]$, affines sur chaque maille (élément) $[x_i, x_{i+1}]$ du maillage et nulles en 0 et en 1 :

$$E_h = \{w_h \in C([0, 1]), w_h|_{[x_i, x_{i+1}] = \Omega_i} \in P1, 0 \leq i \leq n, w(0) = w(1) = 0\}.$$

- E_h est un espace vectoriel de dimension n .
- Une base de E_h est donnée par les fonctions $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ continues et affines sur chaque élément $[x_i, x_{i+1}]$, tel que :

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

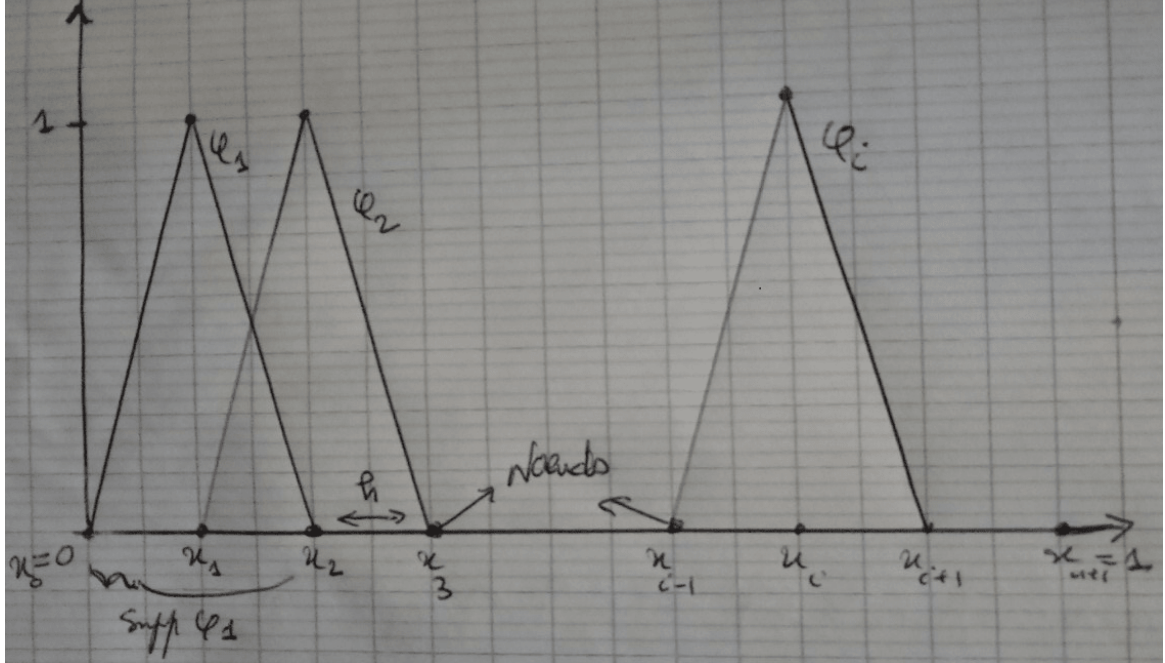
on définit les fonctions φ_i sur chaque élément par :

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

En utilisant ces fonctions la matrice A_h (matrice de rigidité) est tridiagonale.

2.3. ETUDE NUMÉRIQUE

Remarque 2.3.1 : Chaque fonction de base φ_i a un support très réduit.



- $h = \frac{1}{n+1}$, la longueur de $\Omega_i = [x_i, x_{i+1}]$.
- $x_i = ih$, $0 \leq i \leq n+1$.
- Les éléments sont $\Omega_i = [x_i, x_{i+1}]$, $0 \leq i \leq n$.
- On a deux noeuds par élément, les noeuds de Ω_i sont x_i et x_{i+1} .
- $E_h \subset H_0^1(\Omega)$, donc les fonctions de E_h soient nulles en $x_0 = 0$ et en $x_{n+1} = 1$, et dans ce cas on appelle x_1, x_2, \dots, x_n les noeuds libres et x_0, x_{n+1} les noeuds liés.

$$\bullet (FV)_h \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_{h,1}, u_{h,2}, \dots, u_{h,n} \text{ tel que} \\ \sum_{i=1}^n a(\varphi_i, \varphi_k) u_{h,i} = L(\varphi_k), \quad 1 \leq k \leq n \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_{h,1}, u_{h,2}, \dots, u_{h,n} \text{ tel que} \\ \sum_{i=1}^n \left[\int_0^1 \varphi_i'(x) \varphi_k'(x) dx \right] u_{h,i} = \int_0^1 f(x) \varphi_k(x) dx, \quad 1 \leq k \leq n \end{array} \right.$$

- La résolution de $(FV)_h$ revient à la résolution du système linéaire $A_h u_h = L_h$, où $u_h = (u_{h,i})_{1 \leq i \leq n}$, $L_h = (L(\varphi_k))_{1 \leq k \leq n}$, et $A_h = (a(\varphi_i, \varphi_k))_{1 \leq i, k \leq n} = (a_{ki})_{1 \leq i, k \leq n}$.

$$\bullet \varphi_i'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_{i-1}} = \frac{1}{h} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{1}{x_i - x_{i+1}} = -\frac{1}{h} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

2.3. ETUDE NUMÉRIQUE

- $\text{supp}(\varphi_i) = [x_{i-1}, x_{i+1}]$, $\text{supp}(\varphi'_i) \subset \text{supp}(\varphi_i)$.
- La matrice A_h est tridiagonale, donc les composantes de A_h sont sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \star a_{ii} &= a(\varphi_i, \varphi_i) = \int_0^1 (\varphi'_i(x))^2 dx, \quad 1 \leq i \leq n. \\
 &= \int_0^{x_{i-1}} (\varphi'_i(x))^2 dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\varphi'_i(x))^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\varphi'_i(x))^2 dx + \int_{x_{i+1}}^1 (\varphi'_i(x))^2 dx \\
 &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\varphi'_i(x))^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\varphi'_i(x))^2 dx \\
 &= \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx + \frac{1}{(x_i - x_{i+1})^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \\
 &= \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_{i+1} - x_i} = \frac{2}{h}, \quad 1 \leq i \leq n.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \star a_{ii-1} &= a(\varphi_i, \varphi_{i-1}) = \int_0^1 \varphi'_i(x) \varphi'_{i-1}(x) dx, \quad 2 \leq i \leq n. \\
 &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_i(x) \varphi'_{i-1}(x) dx \\
 &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{1}{x_{i-1} - x_i} \right) \left(\frac{1}{x_i - x_{i-1}} \right) dx \\
 &= -\frac{1}{x_i - x_{i-1}} = -\frac{1}{h}. \quad 2 \leq i \leq n. \quad (\text{supp}(\varphi_i) \cap \text{supp}(\varphi_{i-1}) = [x_{i-1}, x_i]).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \star a_{ii+1} &= a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) = \int_0^1 \varphi'_i(x) \varphi'_{i+1}(x) dx, \quad 1 \leq i \leq n-1. \\
 &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi'_i(x) \varphi'_{i+1}(x) dx \\
 &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{1}{x_{i+1} - x_i} \right) \left(\frac{1}{x_i - x_{i+1}} \right) dx \\
 &= -\frac{1}{x_{i+1} - x_i} = -\frac{1}{h}. \quad 1 \leq i \leq n-1. \quad (\text{supp}(\varphi_i) \cap \text{supp}(\varphi_{i+1}) = [x_i, x_{i+1}]).
 \end{aligned}$$

).

- Calculons les composantes de L_h en utilisant la méthode des trapèzes, l'aire du trapèze de hauteur $[x_i, x_{i+1}]$ est :

$$\begin{aligned}
 \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x) dx &= \frac{1}{2} (x_{i+1} - x_i) (g(x_{i+1}) + g(x_i)) \\
 &= \frac{h}{2} (g(x_{i+1}) + g(x_i)).
 \end{aligned}$$

2.3. ETUDE NUMÉRIQUE

$$\begin{aligned}
 \star L_{h,i} &= L(\varphi_i) = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx, \quad 1 \leq i \leq n. \\
 &= \int_0^{x_{i-1}} f(x)\varphi_i(x)dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\varphi_i(x)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)dx + \int_{x_{i+1}}^1 f(x)\varphi_i(x)dx \\
 &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\varphi_i(x)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)dx \\
 &= \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})(f(x_i)\varphi_i(x_i) + f(x_{i-1})\varphi_i(x_{i-1})) + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)(f(x_i)\varphi_i(x_i) + \\
 &f(x_{i+1})\varphi_i(x_{i+1})) \\
 &= \frac{1}{2}f(x_i)(x_i - x_{i-1} + x_{i+1} - x_i) \\
 &= \frac{1}{2}f(x_i)(x_{i+1} - x_{i-1}), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (\varphi_i(x_i) = 1, \text{ et } \varphi_i(x_{i-1}) = \varphi_i(x_{i+1}) = 0).
 \end{aligned}$$

On obtient le schéma numérique :

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_{i-1})f_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (*)$$

Si le maillage est uniforme ($x_i - x_{i-1} = h, \forall i$) on a :

$$\begin{aligned}
 (*) &\Leftrightarrow \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - \frac{u_{i+1} - u_i}{h} = \frac{1}{2}(2h)f_i, \quad 1 \leq i \leq n \\
 &\Leftrightarrow \frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h} = hf_i, \quad 1 \leq i \leq n.
 \end{aligned}$$

Exercice 1 : Soient $u : \Omega = [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, et $E = \{w \in H^1(\Omega) / w(0) = 0\}$,

$$(P) \begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in \Omega =]0, 1[\\ u(0) = 0, & u'(1) + u(1) = 1 \end{cases}$$

où $f \in L^2(\Omega)$.

1. Donner une formulation variationnelle du problème (P) sur E.
2. Etudier l'existence et l'unicité de la solution pour la formulation variationnelle.
3. Ecrire la formulation variationnelle discrétisée associée dans le cadre d'une résolution par la méthode d'éléments finis P1.
4. En déduire qu'elle est équivalente à la résolution d'un système linéaire dont on précisera la dimension et que l'on explicitera.