I.

II. ***Théorie de Lax-Milgram***

2.1 ***Théorème de Lax-Milgram (Cadre abstrait)***

Il s'agit d'un résultat abstrait relatif aux espaces de Hilbert. Nous le présentons dans cette partie car, dans ce cours, nous l'utiliserons seulement quand l'espace de Hilbert est un espace de Sobolev ($H^1(\Omega)$ ou l'un de ses sous-espaces).

Soit E un espace de Hilbert, notons $\langle .,. \rangle_E$ le produit scalaire sur E, et $\|.\|_E$ la norme associée.

Définition 2.1.1 *: Une forme linéaire* $L : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *sur l'espace de Hilbert* E *muni de la norme* $\|.\|_E$ *est dite bornée sur* E *s'il existe une constante* $c > 0$ *telle que :*

$$|L(w)| \leq c\,\|w\|_E \ , \ \forall w \in E.$$

Remarque 2.1.1 *: Si* $L(.)$ *est bornée sur* E *alors* $L(.)$ *est continue sur* E*.*

Définition 2.1.2 *: L'ensemble de toutes les formes linéaires continues sur un espace de Hilbert* E *est appelé espace dual de* E *et est noté* E'*.*

Définition 2.1.3 *:* $a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ *une forme bilinéaire tel que* E *est un espace de Hilbert,* $a(.,.)$ *est dite bornée sur* $E \times E$ *s'il existe une constante* $M > 0$ *telle que :*

$$|a(w,u)| \leq M\,\|w\|_E \,.\, \|u\|_E \ , \ \forall w, u \in E.$$

Remarque 2.1.2 *: Si* $a(.,.)$ *est bornée sur* $E \times E$ *alors* $a(.,.)$ *est continue sur* $E \times E$*.*

Définition 2.1.4 *: Une forme bilinéaire* $a(.,.)$ *est dite symétrique si :*

$$a(w,u) = a(u,w), \ \forall w, u \in E.$$

Définition 2.1.5 *: Une forme bilinéaire* $a(.,.)$ *est dite coercive s'il existe une constante* $\alpha > 0$*, telle que :*

$$a(w,w) \geq \alpha\,\|w\|_E^2 \ , \ \forall w \in E.$$

Théorème 2.1.1 *(Représentation de Riesz)*

Soit E un espace de Hilbert réel, et soit E' son dual. Pour toute forme linéaire continue $L(.) \in E'$ il existe un unique élément $v \in E$ tel que :

$$L(w) = \langle v, w \rangle_E \,, \quad \forall w \in E.$$

De plus, on a $\|L\|_{E'} = \|v\|_E$.

Théorème 2.1.2 *(Lax-Milgram)*

Soit E un espace de Hilbert réel, $L(.)$ une forme linéaire continue sur E, $a(.,.)$ une forme bilinéaire, continue, et coercive sur $E \times E$. Alors la formulation variationnelle :

$$(FV) \begin{cases} \text{Trouver } u \in E \text{ tel que} \\ a(u,w) = L(w), \ \forall w \in E. \end{cases}$$

admet une unique solution. De plus cette solution dépend continûment de la forme linéaire $L(.)$.

Démonstration 1

- D'aprés le théorème de Riesz, il existe un unique élément $v \in E$ tel que :

$$L(w) = \langle v, w \rangle_E \,, \quad \forall w \in E, \text{ et, } \|L\|_{E'} = \|v\|_E \,.$$

- Considérons maintenant l'application : $w \to a(u,w)$, qui est une forme linéaire continue sur E, par conséquent il existe un élément unique de E noté $Au \in E$, tel que :

$$a(u,w) = \langle Au, w \rangle_E \,, \quad \forall w \in E. \quad \text{(Riesz)}$$

- $u \to Au$ est linéaire, en effet on a : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in E$: $A(\alpha u + \beta v)$ vérifie :

$$\begin{aligned} \langle A(\alpha u + \beta v), w \rangle_E &= a(\alpha u + \beta v, w), \ \ \forall w \in E \\ &= \alpha a(u, w) + \beta a(v, w) \\ &= \alpha \langle Au, w \rangle_E + \beta \langle Av, w \rangle_E \\ &= \langle \alpha Au + \beta Av, w \rangle_E \end{aligned}$$

  d'où $A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$.

- $a(.,.)$ est continue ce qui implique : $\exists M > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} \langle Au, Au \rangle_E &= \|Au\|_E^2 = a(u, Au) \le M \|u\|_E \|Au\|_E \\ &\Longrightarrow \|Au\|_E \le M \|u\|_E \\ &\Longrightarrow A \text{ est continue.} \end{aligned}$$

- Le problème (FV) est équivalent au problème :

$$(P) \begin{cases} \text{Trouver } u \in E \text{ tel que} \\ Au = v \end{cases}$$

- Montrons que l'opérateur A est bijectif de E dans E.

  - A est injectif, en effet on a :

$$\begin{aligned} \alpha \|w\|_E^2 &\le a(w, w) = \langle Aw, w \rangle_E \le \|Aw\|_E \|w\|_E \\ &\Longrightarrow \alpha \|w\|_E \le \|Aw\|_E \end{aligned}$$

    (A est linéaire et continu). De plus on a : $Aw = 0 \Longrightarrow \|Aw\|_E = 0 \Longrightarrow \|w\|_E = 0 \Longrightarrow w = 0$, d'où A est injectif.

  - A est surjectif : soit $w \in (\operatorname{Im} A)^\perp$, on a $Aw \in \operatorname{Im} A$, d'où : $\langle Aw, w \rangle_E = 0$, d'un autre côté on a :

$$\alpha \|w\|_E^2 \le \langle Aw, w \rangle_E = 0 \Longrightarrow w = 0,$$

par conséquent $(\operatorname{Im} A)^{\perp} = \{0\}$, il s'ensuit que $E = \overline{\operatorname{Im} A} \oplus \{0\} = \overline{\operatorname{Im} A}$.

– Montrons que $\operatorname{Im} A = \overline{\operatorname{Im} A}$.

Soit $(Aw_n)_n$ une suite qui converge vers b dans E, on a :

$$\alpha \|w_n - w_p\|_E \leq \|Aw_n - Aw_p\|_E \to 0, \text{ si } n, p \to +\infty$$

par conséquent $\lim\limits_{n,p\to+\infty} \alpha \|w_n - w_p\|_E \leq 0$, d'où $(w_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E (espace de Hilbert) alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = w \in E$, par continuité de A on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} Aw_n = Aw$, comme $w \in E$ alors $Aw \in \operatorname{Im} A$, ce qui entraîne que $\operatorname{Im} A$ est fermé ($\operatorname{Im} A = \overline{\operatorname{Im} A}$), il s'ensuit que $E = \operatorname{Im} A$, d'où A est surjectif.

Dans ce cas on a : $u = A^{-1}v$, solution unique du problème (P).

- A^{-1} est continu, en effet on a :

$$\begin{aligned} \alpha \|u\|_E &= \alpha \left\|A^{-1}v\right\|_E \leq \|Au\|_E = \|v\|_E \\ &\Longrightarrow \left\|A^{-1}v\right\|_E \leq \frac{1}{\alpha} \|v\|_E \end{aligned}$$

De plus on a :

$$\|u\|_E \leq c \|L\|_{E'}, \text{ où } c = \frac{1}{\alpha},$$

c'est à dire une perturbation de $L(.)$ produira une perturbation du même ordre sur u.

2.2 Formulation variationnelle du problème de Dirichlet bidimentionnel

Exemple 1

Considérons le problème de Dirichlet homogène suivant :

$$(P1) \begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y), \text{ sur } \Omega \\ u(x, y) = 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, et $f \in L^2(\Omega)$.

En multipliant l'équation par une fonction test $w(x,y)$ telle que $w(x,y)=0$ sur $\partial\Omega$, et en intégrant sur Ω, on obtient :

$$-\int_\Omega \Delta u(x,y)w(x,y)dxdy = \int_\Omega f(x,y)w(x,y)dxdy$$

Utilisant la formule 2 de Green on obtient :

$$\int_\Omega \nabla u(x,y)\nabla w(x,y)dxdy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x,y)w(x,y)ds = \int_\Omega f(x,y)w(x,y)dxdy$$

comme $w(x,y)=0$ sur $\partial\Omega$ on en déduit que :

$$\int_\Omega \nabla u(x,y)\nabla w(x,y)dxdy = \int_\Omega f(x,y)w(x,y)dxdy$$

Afin que cette expression ait un sens, il suffit de choisir u et w dans $H_0^1(\Omega)$. Le problème variationnel associé au problème $(P1)$ consiste donc à :

$$(FV1)\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u,w) = L(w), \ \ \forall w \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

où

$$a(u,w) = \int_\Omega \nabla u(x,y)\nabla w(x,y)dxdy$$

et

$$L(w) = \int_\Omega f(x,y)w(x,y)dxdy$$

Exemple 2

Considérons le problème de Dirichlet homogène suivant :

$$(P2)\begin{cases} -\Delta u(x) + g(x)u(x) = f(x), \text{ sur } \Omega \\ u(x) = 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^\infty(\Omega)$.

En multipliant l'équation par une fonction test $w(x)$ telle que $w(x) = 0$ sur $\partial\Omega$, et en intégrant sur Ω, on obtient :

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x)w(x)dx + \int_{\Omega} g(x)u(x)w(x)dx = \int_{\Omega} f(x)w(x)dx$$

Utilisant la formule 2 de Green on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x)\nabla w(x)dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)w(x)ds + \int_{\Omega} g(x)u(x)w(x)dx = \int_{\Omega} f(x)w(x)dx$$

comme $w(x) = 0$ sur $\partial\Omega$ on en déduit que :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x)\nabla w(x)dx + \int_{\Omega} g(x)u(x)w(x)dx = \int_{\Omega} f(x)w(x)dx$$

Afin que cette expression ait un sens, il suffit de choisir u et w dans $H_0^1(\Omega)$. Le problème variationnel associé au problème $(P2)$ consiste donc à :

$$(FV2) \begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u,w) = L(w), \ \ \forall w \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

où

$$a(u,w) = \int_{\Omega} \nabla u(x)\nabla w(x)dx + \int_{\Omega} g(x)u(x)w(x)dx$$

et

$$L(w) = \int_{\Omega} f(x)w(x)dx$$

2.3 ***Etude mathématique du problème variationnel***

Considérons le problème aux limites suivant :

$$(P1) \begin{cases} -\Delta u(x_1, x_2) = f(x_1, x_2), \text{ sur } \Omega \\ u(x_1, x_2) = 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, et $f \in L^2(\Omega)$.

La formulation variationnelle proposée pour $(P1)$ est :

$$(FV1)\left\{\begin{array}{c}\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \int\limits_\Omega \nabla u(x_1,x_2)\nabla w(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \int\limits_\Omega f(x_1,x_2)w(x_1,x_2)dx_1dx_2,\ \ \forall w \in H_0^1(\Omega).\end{array}\right.$$

Vérifions que la formulation variationnelle $(FV1)$ admet une solution unique. Pour cela nous utilisons le théorème de Lax-Milgram dont nous vérifions les hypothèses avec les notations :

$$a(u,w) = \int\limits_\Omega \nabla u(x_1,x_2)\nabla w(x_1,x_2)dx_1dx_2, \text{ et, } L(w) = \int\limits_\Omega f(x_1,x_2)w(x_1,x_2)dx_1dx_2.$$

- Il est clair que $a(.,.)$ est une forme bilinéaire, et $L(.)$ est une forme linéaire (par linéarité de l'intégrale).
- $L(.)$ est continue, en effet $\forall w \in H_0^1(\Omega)$ on a :

$$\begin{array}{rcl} |L(w)| & = & \left|\int\limits_\Omega f(x_1,x_2)w(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| \\ & & \overset{C.S}{\leq} \|f\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)} \\ & & \overset{PC}{\leq} C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \end{array}$$

  comme $L(.)$ est bornée, alors $L(.)$ est continue.
- $a(.,.)$ est continue, en effet $\forall u, w \in H_0^1(\Omega)$ on a :

$$\begin{array}{rcl} |a(u,w)| & = & \left|\int\limits_\Omega \nabla u(x_1,x_2)\nabla w(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| \\ & & \overset{C.S}{\leq} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \\ & & = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \end{array}$$

  par conséquent $a(.,.)$ est bornée, ce qui entraîne que $a(.,.)$ est continue.
- $a(.,.)$ est coercive car $\forall u \in H_0^1(\Omega)$, on a :

$$\begin{array}{rcl} a(w,w) & = & \int\limits_\Omega |\nabla u(x_1,x_2)|^2 dx_1dx_2 \\ & = & \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \geq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{array}$$

Toutes les hypothèses de Lax-Milgram sont satisfaites, on peut donc conclure qu'il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de la formulation variationnelle $(FV1)$.

2.4 ***Equivalence entre le problème classique et le problème variationnel***

Il est clair que $(P1) \Longrightarrow (FV1)$, montrons que : $(FV1) \Longrightarrow (P1)$.

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de $(FV1)$, comme $(FV1)$ est vérifié pour toute fonction de $H_0^1(\Omega)$, elle est en particulier vraie pour toute fonction $w \in D(\Omega)$, ce qui permet d'interpréter $(FV1)$ au sens des distributions. Ainsi pour toute fonction $w \in D(\Omega)$ on a :

$$\int_\Omega \nabla u(x_1, x_2) \nabla w(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_\Omega f(x_1, x_2) w(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

chaque élément apparaissant dans l'équation est une distribution, on a donc :

$$\sum_{i=1}^{2} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2), \frac{\partial w}{\partial x_i}(x_1, x_2) \right\rangle = \langle f(x_1, x_2), w(x_1, x_2) \rangle$$

par définition de la dérivée au sens de distribution on obtient :

$$-\sum_{i=1}^{2} \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_1, x_2), w(x_1, x_2) \right\rangle = \langle f(x_1, x_2), w(x_1, x_2) \rangle$$

on a donc au sens de distribution :

$$-\Delta u(x_1, x_2) = f(x_1, x_2).$$

Comme $f \in L^2(\Omega)$, alors de l'équation précédente on a $\Delta u \in L^2(\Omega)$ (et $u \in H_0^1(\Omega)$) ce qui entraîne que $u \in H^2(\Omega)$, quand à la condition aux limites elle est naturellement satisfaite ($u(x_1, x_2) = 0$ sur $\partial\Omega$) puisque $u \in H_0^1(\Omega)$.

2.5 ***Lien avec les problèmes d'optimisation***

Une formulation variationnelle possède souvent une interprètation physique, en particulier si la forme bilinéaire est symétrique. En effet dans ce cas, la solution de la formulation variationnelle (FV) réalise le minimum d'une énergie (trés naturelle en physique ou en mécanique).

Théorème 2.5.1 *Sous les hypothèses du théorème de Lax-Milgram, et si de plus la forme bilinéaire $a(.,.)$ est symetrique alors le problème (FV) est équivalent au problème de minimisation suivant :*

$$\begin{cases} \textit{Trouver } u \in E \textit{ telle que} \\ J(u) = \min\limits_{w \in E} J(w) \\ J(w) = \dfrac{1}{2} a(w,w) - L(w). \end{cases}$$

La fonctionnelle J est souvent appelée fonctionnelle d'énergie.

III. ***La méthode des éléments finis abstraite***

3.1 ***La formulation variationnelle abstraite***

Considérons la formulation variationnelle suivante :

$$(FV)\begin{cases} \text{Trouver } u \in E \text{ tel que} \\ a(u,w) = L(w), \ \ \forall w \in E. \end{cases}$$

Théorème 3.1.1 *Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire, continue et coercive définie sur un espace de Hilbert E muni d'une base hilbertienne $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$, et soit $L(.) \in E'$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in E_n = [\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n]$ unique tel que :*

$$a(u_n, w) = L(w), \forall w \in E_n.$$

De plus la suite $(u_n)_n$ converge vers l'unique solution $u \in E$ de l'équation

$$a(u, w) = L(w), \forall w \in E.$$

Remarque 3.1.1 *Comme $E_n = [\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n]$, et comme $a(u_n, .)$ est linéaire, on a : $a(u_n, w) = L(w)$, pour tout $w \in E_n$ si et seulememnt si $a(u_n, \varphi_i) = L(\varphi_i)$ pour tout $i \in \{0, .., n\}$.*

Ecrivant le vecteur u_n sous la forme $u_n = \sum\limits_{j=0}^{n} u_j \varphi_j$, avec $u_j \in \mathbb{R}$ on obtient :

$$\sum_{j=0}^{n} u_j a(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i), \ \ \forall i \in \{0, .., n\}\,.$$

3.2 ***Approximation variationnelle abstraite :***

L'idée de base de cette méthode d'approximation (appelée parfois méthode de Galerkin) est de remplacer l'espace vectoriel E sur lequel est posée la formulation variationnelle par un sous-espace E_h de dimension finie. Le problème "approché" posé sur E_h se ramène à la résolution d'un système linéaire, dont la matrice est appelée matrice de rigidité.

Dans la suite $a(.,.)$ désigne une forme bilinéaire, continue et coercive, définie sur un espace de Hilbert E. Pour tout $h > 0$ destiné à tendre vers 0, E_h est un sous-espace vectoriel de E, de dimension finie $I(h) = I \in \mathbb{N}^*$. On notera $(\varphi_i)_{1\leq i\leq I}$ une base de E_h.

D'aprés le théorème de Lax-Milgram, il existe alors $u_h \in E_h$ unique tel que :

$$(FV)_h \quad : \ a(u_h, w) = L(w), \forall w \in E_h.$$

d'où

$$a(u_h, \varphi_i) = L(\varphi_i), \quad \forall i \in \{0, .., I\},$$

ce qui équivaut à

$$\sum_{j=0}^{n} u_{hj} a(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i), \ \ \forall i \in \{0, .., I\},$$

et dans ce cas la résolution du problème (FV) revient à la résolution du problème approché suivant :

$$(*) \begin{cases} \text{Trouver } \ u_{hj}, \ \ j \in \{0, .., I\} \ \text{ tel que} \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{n} u_{hj} a(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i), \ \ \forall i \in \{0, .., I\}. \end{cases}$$

*3.3 La **formulation matricielle du problème approché***

Le problème $(*)$ peut s'écrire sous forme d'un système linéaire comme suit :

$$A_h u_h = L_h$$

où

$$u_h = (u_{h1}, u_{h2}, ..., u_{hI})^T, \ \ L_h = (L(\varphi_1), L(\varphi_2), ..., L(\varphi_I))^T,$$

et

$$A_h = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq I} = (a(\varphi_j, \varphi_i))_{1\leq i,j\leq I}$$

d'où

$$A_h = \begin{pmatrix} a(\varphi_1,\varphi_1) & a(\varphi_2,\varphi_1) & . & . & a(\varphi_I,\varphi_1) \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ a(\varphi_1,\varphi_I) & a(\varphi_2,\varphi_I) & . & . & a(\varphi_I,\varphi_I) \end{pmatrix}.$$

Lemme 3.3.1 *La matrice A_h ainsi définie est inversible.*

Démonstration 2 *Exercice TD.*

Remarque 3.3.1 *Si $a(.,.)$ est symétrique, la matrice A_h est aussi symétrique.*

3.4 ***Convergence***

Lemme 3.4.1 *(Lemme de céa) Supposons que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées pour (FV). Soient u solution de (FV) et u_h solution de $(FV)_h$. Alors il existe $k > 0$ indépendant de h tel que :*

$$\|u - u_h\|_E \leq k \min_{w_h \in E_h} \|u - w_h\|_E \,,$$

avec $k = \dfrac{M}{\alpha}$, où M est la constante de continuité de $a(.,.)$ et α la constante de coercivité.

Si $a(.,.)$ est symétrique, alors on a :

$$\|u - u_h\|_E \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \min_{w_h \in E_h} \|u - w_h\|_E \,.$$

Démonstration 3 *Supposons que $a(.,.)$ est symétrique.*

- $a(.,.)$ est coercive et continue, d'où :

$$\alpha \|u\|_E^2 \leq a(u,u) \leq M \|u\|_E^2 \tag{1}$$

- $a(.,.)$ est symétrique, alors elle définie un produit scalaire et une norme :

  $\|u\|_a = \sqrt{a(u,u)}$, équivalente à la norme $\|u\|_E$.

- u solution de (FV) et u_h solution de $(FV)_h$, alors :

$$a(u, w_h) = L(w_h),\ \forall w_h \in E_h \subset E \tag{2}$$

et

$$a(u_h, w_h) = L(w_h),\ \forall w_h \in E_h \subset E \tag{3}$$

- $(2) - (3)$ entraîne :

$$a(u - u_h, w_h) = 0, \tag{4}$$

ainsi u_h est la projection orthogonale de u sur E_h au sens du produit scalaire $a(.,.)$, et donc :

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_a &= \min_{w_h \in E_h} \|u - w_h\|_a \qquad (5) \\ &\Longrightarrow \|u - u_h\|_a \leq \|u - w_h\|_a,\ \ \forall w_h \in E_h \subset E, \end{aligned}$$

en utilisant (1) on obtient :

$$\sqrt{\alpha}\, \|u - u_h\|_E \leq \|u - u_h\|_a \leq \sqrt{M}\, \|u - u_h\|_E\,,$$

il s'ensuit de (5) et (1)

$$\|u - u_h\|_a \leq \|u - w_h\|_a \leq \sqrt{M}\, \|u - w_h\|_E\,,\ \ \forall w_h \in E_h$$

d'où

$$\sqrt{\alpha}\, \|u - u_h\|_E \leq \sqrt{M}\, \|u - w_h\|_E\,,\ \ \forall w_h \in E_h$$

par conséquent

$$\|u - u_h\|_E \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \min_{w_h \in E_h} \|u - w_h\|_E\,.$$

Définition 3.4.1 *On dit que la famille des problèmes $(FV)_h$ associé à E_h est convergente si et seulement si :*

$$\lim_{h \to 0} \|u - u_h\|_E = 0.$$

On dit que la convergence est d'ordre p si et seulement si, il existe $k > 0$ indépendant de h tel que :

$$\|u - u_h\|_E \leq kh^p.$$

Lemme 3.4.2 *Sous les hypothèses du théorème de Lax-Milgram, on suppose qu'il existe un sou-espace $F \subset E$ dense dans E, et une application Ψ_h définie de F dans E_h (appelée opérateur d'interpolation) tel que :*

$$\lim_{h \to 0} \|w - \Psi_h(w)\|_E = 0, \ \ \forall w \in E_h.$$

Alors la famille des problèmes $(FV)_h$ associé à $(E)_h$ est convergente.