

Notes de cours  
Analyse numérique  
Master 1

Boudiaf Naima Département de Mathématiques

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels et compléments sur les différences finies</b>	<b>1</b>
1.1	Notions fondamentales de la méthode des différences finies . . . . .	1
1.2	Consistance, Stabilité et Convergence . . . . .	2
1.2.1	Consistance . . . . .	2
1.2.2	Stabilité . . . . .	3
1.2.3	Convergence . . . . .	3
1.3	Classification des équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre 2 . . . . .	4
1.4	Les principales formules des différences finies . . . . .	4
1.5	La méthode des différences finies en dimension 1 appliquée à un problème elliptique . . . . .	7
1.5.1	Discrétisation du problème de Dirichlet . . . . .	7
1.5.2	Principe du maximum discret . . . . .	10
1.6	Schéma à cinq points . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Introduction succincte à la méthode des éléments finis en dimension un</b>	<b>15</b>
2.1	Définitions et propriétés générales : ( outils de base) . . . . .	15
2.1.1	Inégalité de Cauchy-Schwartz . . . . .	18
2.1.2	Inégalité de Poincaré . . . . .	18
2.2	Problème elliptique aux limites . . . . .	20
2.2.1	Existence et unicité de la solution . . . . .	21
2.3	Etude numérique . . . . .	22
2.3.1	Problème elliptique modèle (Problème de Dirichlet) . . . . .	22

<b>3</b>	<b>Approximation des problèmes évolutifs en temps par les éléments finis</b>	<b>37</b>
3.1	Problèmes paraboliques (Problème modèle l'équation de la chaleur) . . .	37
3.1.1	Formulation variationnelle . . . . .	37
3.1.2	Semi-discrétisation par éléments finis en espace . . . . .	39
3.1.3	Discrétisation totale en espace-temps . . . . .	40
3.2	Problème hyperbolique (Problème modèle l'équation des ondes) . . .	41
3.2.1	Formulation variationnelle . . . . .	41
3.2.2	Semi-discrétisation par éléments finis en espace . . . . .	42
3.2.3	Discrétisation totale en espace-temps . . . . .	42



# Chapitre 1

## Rappels et compléments sur les différences finies

### 1.1 Notions fondamentales de la méthode des différences finies

**Définition 1.1.1** : Une EDP est une relation entre les variables indépendantes  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , la fonction  $u$ , et ses dérivées partielles.

Dans le cas de 2 variables :

– Une EDP d'ordre un s'écrit par la relation :

$$f(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)) = 0.$$

– Une EDP d'ordre deux s'écrit par la relation :

$$f(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y), \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y), \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y)) = 0.$$

**Définition 1.1.2** : On appelle ordre d'une EDP l'ordre le plus élevé des dérivées partielles intervenant dans l'EDP.

**Définition 1.1.3** : Une EDP est linéaire si l'équation est linéaire par rapport aux dérivées partielles de la fonction  $u$ .

**Exemples 1** :

## 1.2. CONSISTANCE, STABILITÉ ET CONVERGENCE

---

- 1) L'équation de Laplace :  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0$ , est une équation linéaire d'ordre deux.
- 2) L'équation :  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)(x, y) + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) - u \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 0$ , est une équation non linéaire d'ordre 3.

**Définition 1.1.4** (*Problème aux limites*) : On appelle problème aux limites une équation aux dérivées partielles munie de conditions aux limites sur la totalité de la frontière du domaine sur lequel elle est posée.

**Exemples 2** :

- 1) 
$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0, & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$
, c'est un problème aux limites.
- 2) 
$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x), & \text{pour } 0 < t < T \in \mathbb{R} \\ x(t=0) = x_0 & \text{(conditions initiales)} \end{cases}$$
, n'est pas un problème aux limites.

**Définition 1.1.5** (*Problème bien posé*) : On dit que le problème  $Au = f$  est bien posé si pour toute donnée  $f$  il admet une solution unique  $u$ , et si cette solution  $u$  dépend continûment de la donnée  $f$ .

## 1.2 Consistance, Stabilité et Convergence

Considérons une EDP avec ses conditions aux limites et initiales :

$$\Psi(u) = 0 \tag{*}$$

de solution  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Pour chaque point  $ih$  l'équation (\*) est discrétisée par différences finies sous la forme :  $\Psi_i(u) = 0$ .

### 1.2.1 Consistance

La consistance d'une méthode assure que la solution discrète tend vers la solution exacte lorsque le pas de la subdivision  $h$  tend vers 0.

**Définition 1.2.1** : Une approximation est consistante d'ordre  $p$  s'il existe une constante  $c > 0$  indépendante de  $h$  tel que l'erreur est majorée par  $c.h^p$  pour  $p > 0$  fixé.

## 1.2. CONSISTANCE, STABILITÉ ET CONVERGENCE

---

### 1.2.2 Stabilité

La stabilité d'un schéma est une notion visant à mesurer la propagation des erreurs engendrées par les calculs précédents dans un schéma numérique.

**Définition 1.2.2** : Si les fonctions  $\Psi_i$  sont linéaires, alors la méthode peut s'écrire comme un système linéaire  $A_h u_h = b_h$ . On dit que ce schéma numérique est stable si la matrice de discrétisation  $A_h$  satisfait :  $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}$ .

**Lemme 1.2.1** : Si les fonctions  $\Psi_i$  sont linéaires, alors on a l'estimation suivante sur les solutions du système :  $\|u_h\|_\infty \leq \frac{1}{8} \|b_h\|_\infty$ .

### 1.2.3 Convergence

**Définition 1.2.3** : La méthode converge, si l'erreur globale  $r = \max_i |r_i|$  tend vers 0 lorsque le pas de la subdivision  $h$  tend vers 0.

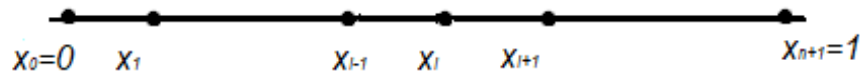
**Théorème 1.2.1** : une méthode stable et consistante est convergente.

**Définition 1.2.4** (Maillage) : Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^n$ . Un maillage de  $\Omega$  est un découpage de  $\Omega$  en polyèdres ( triangles ou rectangles pour  $n = 2$ , et tétraèdre ou hexaèdre pour  $n = 3$ ). Les sommets des polyèdres sont les noeuds du maillage.

**Exemples 3** :

1)  $\Omega = ]0, 1[$ ,  $h = \frac{1}{n+1}$  (pas de discrétisation),  $n \in \mathbb{N}$ .

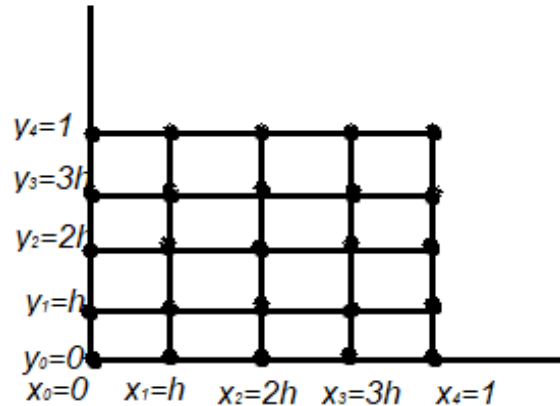
$$\Omega_h = \{x_i = ih, 0 \leq i \leq n+1\} \text{ un maillage de } \Omega.$$



2)  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ ,  $h = \frac{1}{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  (maillage régulier).

### 1.3. CLASSIFICATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE 2

$\Omega_h = \{(ih, jh), 0 \leq i, j \leq n+1\}$ , c'est l'ensemble des carrés délimités par les droites d'équations  $x = ih, y = jh, 1 \leq i, j \leq n$ .



maillage régulier pour  $n=3$

### 1.3 Classification des équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre 2

L'équation aux dérivées partielles linéaires d'ordre 2 à deux variables s'écrit sous la forme :

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = g \quad (1)$$

**Définition 1.3.1** : On dit que l'équation (1) est

- Elliptique si :  $b^2 - 4ac < 0$ .
- Parabolique si :  $b^2 - 4ac = 0$ .
- Hyperbolique si :  $b^2 - 4ac > 0$ .

### 1.4 Les principales formules des différences finies

**Théorème 1.4.1** (Développement de Taylor) : Soit  $f$  une fonction de classe  $C^{n+1}$  au voisinage d'un point  $x \in \mathbb{R}$ , alors pour tout  $h$  réel on a :

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) + o(h^{n+1}).$$



## 1.4. LES PRINCIPALES FORMULES DES DIFFÉRENCES FINIES

---

**Proposition 1.4.1** : Les formules suivantes donnent des approximations des dérivées de  $f$  au point  $x$ .

1) Formule des différences finies progressive d'ordre 1 en  $h$  :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + o(h).$$

2) Formule des différences finies rétrograde d'ordre 1 en  $h$  :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + o(h).$$

3) Formule des différences finies centrée d'ordre 1 en  $h$  :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + o(h^2).$$

4) Formule des différences finies centrée d'ordre 2 en  $h$  :

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + o(h^2).$$

**Preuve :**

3) Ecrivons la formule de Taylor d'ordre 2 aux points  $(x+h)$  et  $(x-h)$  on obtient :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + o(h^3) \quad (1)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + o(h^3) \quad (2)$$

en soustrayant la seconde équation de la première on obtient :

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + o(h^2).$$

4) Ecrivons la formule de Taylor d'ordre 3 aux points  $(x+h)$  et  $(x-h)$  on obtient :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + o(h^4) \quad (3)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + o(h^4) \quad (4)$$

## 1.4. LES PRINCIPALES FORMULES DES DIFFÉRENCES FINIES

---

(3)+(4) donne :

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + o(h^2)$$

ce qui achève la démonstration.

■

**Théorème 1.4.2** : Pour toute fonction  $f \in C^4$ , pour tout point  $x \in \mathbb{R}$ , il existe une constante  $c > 0$  tel que pour tout  $h \in ]0, 1[$  on a :

$$|r_x| = \left| f''(x) - \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \right| \leq c.h^2.$$

( $r_x$  l'erreur en point  $x$ ).

**Remarque 1.4.1** :  $c$  dépend de  $f$  et  $x$ , mais pas de  $h$ , on remarque que l'erreur est divisée par 4 chaque fois que  $h$  est divisé par 2.

**Preuve** (Théorème 1.4.2) : Le développement de Taylor d'ordre 3 aux points  $(x+h)$  et  $(x-h)$  est donné par :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\theta_1) \quad (5)$$

où  $x < \theta_1 < x+h$ ,

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\theta_2) \quad (6)$$

où  $x-h < \theta_2 < x$ .

(5)+(6) donne :

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) = h^2 f''(x) + \frac{h^4}{24}(f^{(4)}(\theta_1) + f^{(4)}(\theta_2)),$$

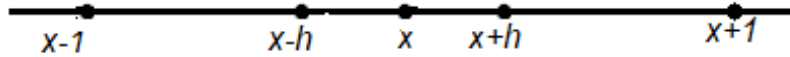
utilisons le théorème des valeurs intermédiaires on obtient :

$$\frac{1}{h^2}(f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)) = f''(x) + \frac{h^2}{12}(f^{(4)}(\beta)) \quad (7)$$

## 1.5. LA MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES EN DIMENSION 1 APPLIQUÉE À UN PROBLÈME ELLIPTIQUE

---

$$\beta \in ]\theta_2, \theta_1[$$



on a :  $x - 1 < x - h < \theta_2 < x$ ,  $x < \theta_1 < x + h < x + 1$ , il s'ensuit :  $x - 1 < \theta_2 < \beta < \theta_1 < x + 1$ , par conséquent  $|f^{(4)}(\beta)| \leq \max_{x-1 \leq t \leq x+1} |f^{(4)}(t)|$ , alors (7) implique :

$$\left| f''(x) - \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \right| \leq \frac{h^2}{12} \max_{x-1 \leq t \leq x+1} |f^{(4)}(t)|,$$

il suffit alors de prendre  $c = \frac{1}{12} \max_{x-1 \leq t \leq x+1} |f^{(4)}(t)|$ . ■

## 1.5 La méthode des différences finies en dimension 1 appliquée à un problème elliptique

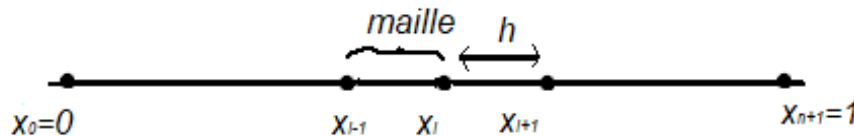
### 1.5.1 Discrétisation du problème de Dirichlet

**Exemple 1 :** (*Problème de Dirichlet homogène*) : Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & \text{pour } x \in \Omega = ]0, 1[ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

avec  $f \in C([0, 1])$ .

Notre objectif est de proposer un schéma qui permettra de calculer des valeurs  $u_i$  qui sont des approximations de  $u(x_i)$ .



Le domaine (l'intervalle)  $[0, 1]$  est subdivisé en  $(n+1)$  points, notons  $h = \frac{1}{n+1}$  le pas d'espace (destiné à être petit,  $n$  destiné à être grand). on a  $x_i = ih$ ,  $i = 0, \dots, n+1$ .

## 1.5. LA MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES EN DIMENSION 1 APPLIQUÉE À UN PROBLÈME ELLIPTIQUE

---

Pour approcher la dérivée seconde on utilise une formule de différences finies centrée :

$$-u''(x_i) + o(h^2) = \frac{-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1}))}{h^2} = f(x_i) + o(h^2),$$

remplaçons  $u(x_{i-1})$ ,  $u(x_i)$  et  $u(x_{i+1})$  par  $u_{i-1}$ ,  $u_i$ , et  $u_{i+1}$  respectivement on obtient le schéma numérique suivant :

$$\begin{cases} \frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} = f(x_i), & i = 1, \dots, n \\ u_0 = 0, u_{n+1} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{h^2}(2u_1 - u_2) = f_1; \\ \frac{1}{h^2}(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) = f_i, & i = 2, \dots, n-1; \\ \frac{1}{h^2}(-u_{n-1} + 2u_n) = f_n. \end{cases}$$

ce schéma correspond la résolution d'un système linéaire qui s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A_h u = f \quad (8)$$

$A_h$  est une matrice tridiagonale, symétrique et définie positive, donc on peut utiliser la décomposition de Cholesky,  $A_h = LL^T$  pour résoudre le système linéaire  $A_h u = f$ .

**Théorème 1.5.1** : *Supposons que  $u \in C^4([0, 1])$ , alors il existe une constante  $c > 0$  tel que pour tout  $h \in ]0, 1[$ , l'erreur au point  $x_i$  est donnée par :*

$$\max_{1 \leq i \leq n} |u_i - u(x_i)| \leq c.h^2.$$

## 1.5. LA MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES EN DIMENSION 1 APPLIQUÉE À UN PROBLÈME ELLIPTIQUE

---

**Preuve :** Le schéma numérique :

$$\frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

est équivalent au système :

$$Au = f \tag{9}$$

d'un autre côté la solution exacte  $u(x)$  satisfait l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1}))}{h^2} &= f(x) + o(h^2) \\ \iff Aw &= f + r \end{aligned} \tag{10}$$

où

$$w = \begin{pmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ u(x_n) \end{pmatrix}, \text{ et } r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}.$$

(10)-(9) donne :

$$A(w - u) = r,$$

d'après le lemme 1.2.1 on a :

$$\|w - u\|_\infty \leq \frac{1}{8} \|r\|_\infty$$

c-à-d

$$\max_{1 \leq i \leq n} |u(x_i) - u_i| \leq \frac{1}{8} \max_{1 \leq i \leq n} |r_i|,$$

d'après le théorème 1.4.2 on a :

$$|r_i| \leq \frac{1}{12} \max_{0 \leq x \leq 1} |u^{(4)}(x)| \cdot h^2, \quad i = 1, \dots, n$$

d'où :

$$\max_{1 \leq i \leq n} |u(x_i) - u_i| \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{12} \max_{0 \leq x \leq 1} |u^{(4)}(x)| \cdot h^2$$

il suffit de prendre  $c = \frac{1}{96} \max_{0 \leq x \leq 1} |u^{(4)}(x)|$ . ■

## 1.5. LA MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES EN DIMENSION 1 APPLIQUÉE À UN PROBLÈME ELLIPTIQUE

---

### 1.5.2 Principe du maximum discret

**Proposition 1.5.1** : Soit  $f \in \mathbb{R}^n$  tel que  $f_i \geq 0$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Si  $u \in \mathbb{R}^n$  vérifie  $A_h u = f$ , où  $A_h$  est donnée par (8), alors  $u_i \geq 0$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Preuve** : Soit

$$k = \min \left\{ i / u_i = \min_j (u_j) \right\}.$$

On suppose que  $u_k < 0$ . Trois cas sont possibles :  $k = 1$ ,  $1 < k < n$ , et  $k = n$ .

– Pour  $k = 1$ ,  $(A_h u)_1 = f_1 \geq 0$  entraîne :

$$\frac{1}{h^2}(2u_1 - u_2) = f_1 \geq 0 \implies u_2 \leq 2u_1$$

or

$$u_1 = \min_i u_i \leq u_2$$

donc

$$2u_1 \leq u_2 + u_1 < u_2$$

( $u_1 < 0$ ), finalement

$$u_2 < u_2$$

impossible donc  $u_1 \geq 0$ .

– Pour  $k = n$ ,  $(A_h u)_n = f_n \geq 0$  entraîne :

$$\frac{1}{h^2}(-u_{n-1} + 2u_n) = f_n \geq 0 \implies u_{n-1} \leq 2u_n$$

or

$$u_n = \min_i u_i < u_{n-1}$$

donc

$$2u_n < u_{n-1} + u_n < u_{n-1}$$

( $u_n < 0$ ), finalement

$$u_{n-1} < u_{n-1}$$

impossible donc  $u_n \geq 0$ .

– Pour  $1 < k < n$ ,  $(A_h u)_k = f_k \geq 0$  entraîne :

$$\frac{1}{h^2}(-u_{k-1} + 2u_k - u_{k+1}) = f_k \geq 0$$

d'où

$$(u_k - u_{k-1}) + (u_k - u_{k+1}) \geq 0,$$

## 1.6. SCHÉMA À CINQ POINTS

---

mais

$$\begin{aligned}u_k - u_{k-1} &< 0, \text{ et} \\u_k - u_{k+1} &\leq 0\end{aligned}$$

donc

$$(u_k - u_{k-1}) + (u_k - u_{k+1}) < 0$$

contradiction, il s'ensuit que  $k \notin \{2, \dots, n-1\}$ , finalement  $u_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ .

■

## 1.6 Schéma à cinq points

**Proposition 1.6.1** : Supposons que  $u \in C^4(\Omega \cup \partial\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  alors on a :

$$\Delta u(x, y) = \frac{u(x+h, y) + u(x-h, y) - 4u(x, y) + u(x, y-h) + u(x, y+h)}{h^2} + o(h^2).$$

**Preuve** : On a :

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)$$

En utilisant la formule de Taylor d'ordre 3 au voisinage de  $x+h$  et  $x-h$

$$u(x+h, y) = u(x, y) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{h^3}{6} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y) + o(h^4) \quad (11)$$

$$u(x-h, y) = u(x, y) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) - \frac{h^3}{6} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y) + o(h^4) \quad (12)$$

en sommant (11) et (12) on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = \frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2} + o(h^2).$$

D'une manière similaire on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \frac{u(x, y+h) - 2u(x, y) + u(x, y-h)}{h^2} + o(h^2).$$

Ce qui achève la démonstration. ■

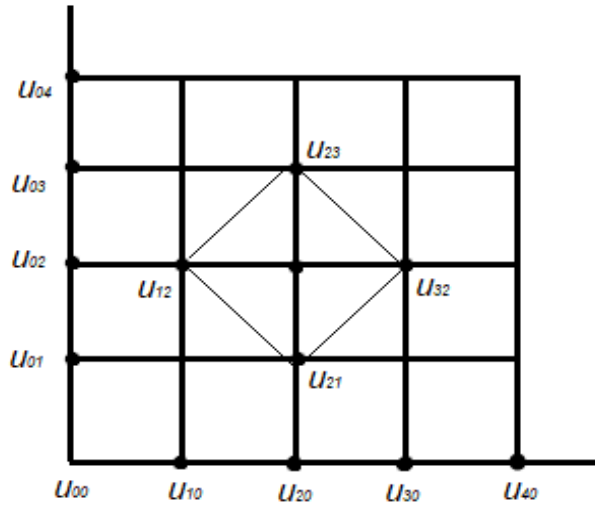
## 1.6. SCHÉMA À CINQ POINTS

**Exemple 2** : Considérons le problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

où  $\Omega = ]0, 1]^2$  et  $f \in C(\bar{\Omega})$ . Posons  $n = 3$ , alors  $h = \frac{1}{n+1} = \frac{1}{4}$ . D'après la proposition précédente on obtient le schéma numérique suivant :

$$\begin{cases} \frac{-u_{i-1,j} - u_{i+1,j} + 4u_{i,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1}}{h^2} = f_{ij}, & 1 \leq i, j \leq n \\ u_{i,0} = u_{0,j} = u_{n+1,j} = u_{i,n+1} = 0, & 0 \leq i, j \leq n+1 \end{cases}$$



Maillage à cinq points

Pour  $i = 1$  :

$$\begin{cases} -u_{01} - u_{21} + 4u_{11} - u_{10} - u_{12} = h^2 f_{11}, & j = 1 \\ -u_{02} - u_{22} + 4u_{12} - u_{11} - u_{13} = h^2 f_{12}, & j = 2 \\ -u_{03} - u_{23} + 4u_{13} - u_{12} - u_{14} = h^2 f_{13}, & j = 3 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} -u_{21} + 4u_{11} - u_{12} = h^2 f_{11}, & j = 1 \\ -u_{22} + 4u_{12} - u_{11} - u_{13} = h^2 f_{12}, & j = 2 \\ -u_{23} + 4u_{13} - u_{12} = h^2 f_{13}, & j = 3 \end{cases}$$



## 1.6. SCHÉMA À CINQ POINTS

---

Pour  $i = 2$

$$\begin{cases} -u_{11} - u_{31} + 4u_{21} - u_{20} - u_{22} = h^2 f_{21}, & j = 1 \\ -u_{12} - u_{32} + 4u_{22} - u_{21} - u_{23} = h^2 f_{22}, & j = 2 \\ -u_{13} - u_{33} + 4u_{23} - u_{22} - u_{24} = h^2 f_{23}, & j = 3 \end{cases}$$

par conséquent

$$\begin{cases} -u_{11} - u_{31} + 4u_{21} - u_{22} = h^2 f_{21}, & j = 1 \\ -u_{12} - u_{32} + 4u_{22} - u_{21} - u_{23} = h^2 f_{22}, & j = 2 \\ -u_{13} - u_{33} + 4u_{23} - u_{22} = h^2 f_{23}, & j = 3 \end{cases}$$

Pour  $i = 3$

$$\begin{cases} -u_{21} - u_{41} + 4u_{31} - u_{30} - u_{32} = h^2 f_{31}, & j = 1 \\ -u_{22} - u_{42} + 4u_{32} - u_{31} - u_{33} = h^2 f_{32}, & j = 2 \\ -u_{23} - u_{43} + 4u_{33} - u_{32} - u_{34} = h^2 f_{33}, & j = 3 \end{cases}$$

il s'ensuit

$$\begin{cases} -u_{21} + 4u_{31} - u_{32} = h^2 f_{31}, & j = 1 \\ -u_{22} + 4u_{32} - u_{31} - u_{33} = h^2 f_{32}, & j = 2 \\ -u_{23} + 4u_{33} - u_{32} = h^2 f_{33}, & j = 3 \end{cases}$$

Ce schéma s'écrit sous forme matricielle  $Au = f$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$  avec :

$$u = (u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{21}, u_{22}, u_{23}, u_{31}, u_{32}, u_{33})^T, \quad f = h^2(f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{31}, f_{32}, f_{33})^T$$

et

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & -I & M \\ -I & B & -I \\ M & -I & B \end{pmatrix}$$

$$\text{où } B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Erreur de consistance :**

## 1.6. SCHÉMA À CINQ POINTS

---

supposons que  $u \in C^4(\bar{\Omega})$ , alors

$$u(x+h, y) = u(x, y) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y) + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_1, y),$$

$$x < \theta_1 < x + h,$$

$$u(x-h, y) = u(x, y) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y) + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_2, y),$$

$$x-h < \theta_2 < x, \text{ d'où}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = \frac{u(x-h, y) - 2u(x, y) + u(x+h, y)}{h^2} + \frac{h^2}{24} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_1, y) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_2, y) \right),$$

comme  $x-1 < \theta_2 < \theta_1 < x+1$ , par le théorème des valeurs intermédiaires  $\exists \theta \in ]\theta_2, \theta_1[$  tel que :

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta, y) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_1, y) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_2, y) \right)$$

et dans ce cas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = \frac{u(x-h, y) - 2u(x, y) + u(x+h, y)}{h^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta, y).$$

D'une manière similaire on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \frac{u(x, y-h) - 2u(x, y) + u(x, y+h)}{h^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, \theta'),$$

par conséquent

$$\begin{aligned} |r_{(x,y)}| &= \left| \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta, y) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, \theta') \right| \\ &\leq \frac{h^2}{12} \left( \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right\|_{\infty} \right) \\ &= c.h^2, \end{aligned}$$

où  $c = \frac{1}{12} \left( \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right\|_{\infty} \right)$ , on en déduit que le schéma est d'ordre 2.

# Chapitre 2

## Introduction succincte à la méthode des éléments finis en dimension un

### 2.1 Définitions et propriétés générales : ( outils de base)

$\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 2.1.1** : ( support d'une fonction ) : Le support d'une fonction  $f$  est le plus petit ensemble fermé de valeurs de  $x$  où  $f(x) \neq 0$ .

**Définition 2.1.2** : Un sous ensemble  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est dit compact s'il est fermé et borné.

**Définition 2.1.3** : On appelle  $D(\Omega)$ , ( $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ) l'espace des fonctions infiniment différentiable sur  $\Omega$  dont le support compact et inclus dans  $\Omega$ .

**Exemple 3 1)** :

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \in ]-1, 1[ \\ 0, & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

a comme support  $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$ , qui est compact, et  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ , donc  $f \in D(\mathbb{R})$ .

**2)**  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ , avec

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|_2^{1-1}}}, & \text{si } \|x\|_2 < 1 \\ 0, & \text{si } \|x\|_2 \geq 1 \end{cases}$$

## 2.1. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES : ( Outils de Base)

---

on vérifie facilement que  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ , en effet son support est la boule fermée  $\overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}$ , qui est un compact, et  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ .

**Définition 2.1.4** : On appelle fonctionnelle  $T$  toute application qui associée à une fonction  $\varphi$  un scalaire  $\langle T, \varphi \rangle$ ,  $\varphi \in E$  ensemble de fonctions appelé le domaine de définition de la fonctionnelle. ( $T : E \rightarrow \mathbb{R}$ )

$$\varphi \longrightarrow T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle.$$

**Définition 2.1.5** : Une fonctionnelle  $T$  est dite linéaire sur l'ensemble de fonction  $E$  si elle vérifie les conditions suivantes :

- $\langle T, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \langle T, \varphi_1 \rangle + \langle T, \varphi_2 \rangle, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in E;$
- $\langle T, \alpha\varphi \rangle = \alpha \langle T, \varphi \rangle, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \varphi \in E.$

**Définition 2.1.6** : Une fonction  $f$  est dite localement intégrable sur  $\Omega$  si elle est intégrable sur tout compact inclus dans  $\Omega$ , autrement dit si :

$$\int_A |f(x)| dx < \infty, \forall A \subset \Omega, A \text{ compact.}$$

L'ensemble des fonctions localement intégrables sur  $\Omega$  noté  $L^1_{loc}(\Omega)$ .

**Définition 2.1.7** : Un espace fonctionnel linéaire  $E$  est un ensemble de fonctions définies sur  $\Omega$  (ouvert) et vérifiant :

- Pour tout  $w \in E$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on a :  $\alpha w \in E$ ;
- Pour tout  $w_1, w_2 \in E$ , on a :  $w_1 + w_2 \in E$

**Définition 2.1.8** :  $L^2(\Omega)$  est un espace fonctionnel linéaire où :

$$L^2(\Omega) = \left\{ w / w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ et } \int_{\Omega} |w(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

qui est un Hilbert muni de produit scalaire :

$$\langle w, u \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} (w(x) \cdot u(x)) dx$$

**Définition 2.1.9** : ( Espace de Sobolev)

## 2.1. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES : ( OUTILS DE BASE)

---

- On note  $H^1(\Omega)$  l'espace fonctionnel linéaire défini par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ w \in L^2(\Omega) / \frac{\partial w}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i \right\}.$$

les dérivées  $\frac{\partial w}{\partial x_i}$  sont prises au sens faible (au sens de distributions ).

- L'espace :

$$H_0^1(\Omega) = \{ w \in H^1(\Omega) / w|_{\partial\Omega} = 0 \}$$

- On note :

$$H^2(\Omega) = \left\{ w \in L^2(\Omega) / \frac{\partial w}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega), \forall i \right\}$$

**Exemple 4** :  $\Omega = ]0, 1[$ ,  $f(x) = x^{-\frac{1}{4}} \in L^2(\Omega)$ , car  $\int_0^1 (x^{-\frac{1}{4}})^2 dx = 2 < \infty$ ,  $x^{-\frac{1}{2}} \notin L^2(\Omega)$ .

**Proposition 2.1.1** :

- l'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert muni du produit scalaire défini par :

$$\langle w, u \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (w \cdot u + \nabla w \cdot \nabla u) dx$$

$w, u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  ,  $\nabla w = \left( \frac{\partial w}{\partial x_1}, \frac{\partial w}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial w}{\partial x_n} \right)^T$ , et la norme associée est donnée par :

$$\|w\|_{H^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} (w^2 + |\nabla w|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

- l'espace  $H_0^1(\Omega)$  est muni de la norme :

$$\|w\|_{H_0^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} (|\nabla w|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

et le produit scalaire associé :

$$\langle w, u \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla u dx.$$

**Définition 2.1.10** : La fermeture de  $D(\Omega)$  est  $H_0^1(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$ .

## 2.1. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES : ( OUTILS DE BASE)

---

**Corollaire 2.1.1** : Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $D(\Omega)$  est dense dans  $L^p(\Omega)$ , pour  $1 \leq p < \infty$ . (En particulier  $D(\Omega)$  dense dans  $L^2(\Omega)$ ).

**Preuve** : Brezis page 71. ■

**Théorème 2.1.1** : Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ouvert et  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ , tel que :

$$\int_{\Omega} f \cdot \varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in D(\Omega),$$

alors  $f = 0$  p.p sur  $\Omega$ .

**Preuve** : Brezis page 61. ■

**Lemme 2.1.1** : Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , et  $f$  une fonction continue dans  $\Omega$  si  $\forall \varphi \in D(\Omega)$  on a  $\int_{\Omega} f \cdot \varphi dx = 0$ , alors  $f = 0$  p.p sur  $\Omega$ .

### 2.1.1 Inégalité de Cauchy-Schwartz

**Lemme 2.1.2** : Soient  $w$  et  $u$  deux fonctions de  $L^2(\Omega)$ , alors :

$$\left| \langle w, u \rangle_{L^2(\Omega)} \right| \leq \|w\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

**Preuve** : (TD). ■

### 2.1.2 Inégalité de Poincaré

**Théorème 2.1.2** : Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  borné dans une direction d'espace ( ou plus ) alors il existe une constante  $c > 0$ , ne dépend que de  $\Omega$  tel que :

$$\forall w \in H_0^1(\Omega), \quad \|w\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\Omega) \|w\|_{H_0^1(\Omega)}$$

**Exemple 5** : Posons  $\Omega = ]a, b[$ , on a :

$$H^1(\Omega) = \{w \in L^2(\Omega) / w' \in L^2(\Omega)\} \text{ et}$$

$$H_0^1(\Omega) = \{w \in L^2(\Omega) / w' \in L^2(\Omega) \text{ et } w(a) = w(b) = 0\}.$$

On a :

$$w(x) = \int_a^x w'(t) dt = \int_a^x 1 \cdot w'(t) dt \leq \int_a^b 1 \cdot w'(t) dt = \langle 1, w' \rangle_{L^2(\Omega)}$$

## 2.1. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES : ( OUTILS DE BASE)

---

inégalité de cauchy-schwartz implique :

$$\begin{aligned}
 |w(x)| &\leq \left( \int_a^b 1^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b |w'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \sqrt{b-a} \left( \int_a^b |w'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 \implies |w(x)|^2 &\leq (b-a) \left( \int_a^b |w'(x)|^2 dx \right) \\
 \implies \int_a^b |w(x)|^2 dx &\leq (b-a) \int_a^b \left( \int_a^b |w'(x)|^2 dx \right) dx \\
 &= (b-a)^2 \left( \int_a^b |w'(x)|^2 dx \right)
 \end{aligned}$$

d'où :

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq (b-a) \|w\|_{H_0^1(\Omega)}$$

il suffit de prendre  $c(\Omega) = b-a$ .

**Remarque 2.1.1** : les deux normes  $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$  et  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  sont équivalentes dans  $H_0^1(\Omega)$ .

**Preuve** : En effet, d'après l'inégalité de Poincaré :

$$\begin{aligned}
 \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq c^2(\Omega) \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\
 \implies \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left( \int_{\Omega} |w'(x)|^2 dx \right) &\leq c^2(\Omega) \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \left( \int_{\Omega} |w'(x)|^2 dx \right) \\
 &= c^2(\Omega) \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2
 \end{aligned}$$

ce qui entraîne :

$$\|w\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (c^2(\Omega) + 1) \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \quad (13)$$

D'un autre côté on a :

$$\|w\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \geq \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad (14)$$

De (13) et (14) on en déduit :

$$\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|w\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{(c^2(\Omega) + 1)} \|w\|_{H_0^1(\Omega)}$$

par conséquent les deux normes sont équivalentes dans  $H_0^1(\Omega)$ . ■

## 2.2. PROBLÈME ELLIPTIQUE AUX LIMITES

---

**Définition 2.1.11** : Une forme linéaire  $L : E \longrightarrow \mathbb{R}$  sur l'espace de Hilbert  $E$  muni de la norme  $\|\cdot\|_E$  est dite bornée sur  $E$  s'il existe une constante  $c > 0$  telle que :

$$|L(w)| \leq c \|w\|_E, \quad \forall w \in E.$$

**Remarque 2.1.2** : Si  $L$  est bornée sur  $E$  alors  $L$  est continue sur  $E$ .

**Preuve** : Soit  $(w_n)_n$  une suite de  $E$  convergente vers  $w$  ( $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|w_n - w\|_E = 0$ ). Comme  $L(\cdot)$  est borné, alors  $\exists c > 0$ , tel que

$$|L(w_n - w)| = |L(w_n) - L(w)| \leq c \|w_n - w\|_E \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

d'où

$$L(w_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L(w)$$

■

**Définition 2.1.12** : L'ensemble de toutes les formes linéaires continues sur un espace de Hilbert  $E$  est appelé espace dual de  $E$  et est noté  $E'$ .

**Définition 2.1.13** :  $a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire tel que  $E$  est un espace de Hilbert,  $a(\cdot, \cdot)$  est dite bornée sur  $E \times E$  s'il existe une constante  $c > 0$  tel que :

$$|a(w, u)| \leq c \|w\|_E \cdot \|u\|_E, \quad \forall w, u \in E.$$

**Remarque 2.1.3** : Si  $a(\cdot, \cdot)$  est bornée sur  $E \times E$  alors  $a(\cdot, \cdot)$  est continue sur  $E \times E$ .

**Définition 2.1.14** : Une forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est dite symétrique si :

$$a(w, u) = a(u, w), \quad \forall w, u \in E.$$

**Définition 2.1.15** : Une forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est dite coercive s'il existe une constante  $M > 0$ , telle que :

$$a(w, w) \geq M \|w\|_E^2, \quad \forall w \in E.$$

## 2.2 Problème elliptique aux limites

Dans cette partie nous abordons l'étude théorique de certains problèmes aux limites. Cette étude est basée sur la formulation variationnelle de ces problèmes.



## 2.2. PROBLÈME ELLIPTIQUE AUX LIMITES

---

### 2.2.1 Existence et unicité de la solution

Soit  $E$  un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$  et de norme  $\|\cdot\|_E$ ,  $a(\cdot, \cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire.

Pour  $L \in E'$  ( $E'$  dual de  $E$ ), on considère le problème suivant :

$$(I) \begin{cases} \text{Trouver } u \in E \text{ tel que} \\ \forall w \in E, a(u, w) = \langle L, w \rangle = L(w) \end{cases}$$

**Théorème 2.2.1 :** (*Lax-Milgram*) Si  $a(\cdot, \cdot)$  est une forme bilinéaire, continue, et coercive,  $L$  est une forme linéaire et continue, alors le problème (I) admet une solution unique  $u \in E$ , de plus cette solution dépend continûment de la forme linéaire  $L$ .

**Preuve :** Allaire page 74. ■

**Corollaire 2.2.1 :** Sous les hypothèses du théorème de Lax-Milgram, et si de plus  $a(\cdot, \cdot)$  est symétrique alors :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Trouver } u \in E \text{ tel que} \\ J(u) = \min_{w \in E} J(w) \\ J(w) = \frac{1}{2}a(w, w) - L(w). \end{cases} \quad (II)$$

**Preuve**

– (I)  $\implies$  (II) : Supposons que  $u \in E$ ,  $u$  solution de (I),  $\forall w \in E$ ,  $w = w_1 - u + u = w_1 + u$ , on a

$$\begin{aligned} J(w_1 + u) &= \frac{1}{2}a(w_1 + u, w_1 + u) - L(w_1 + u) \\ &= \frac{1}{2}a(w_1, w_1) + \frac{1}{2}a(u, u) - L(u) + a(w_1, u) - L(w_1) \\ &= \frac{1}{2}a(w_1, w_1) + J(u) \\ &\geq J(u) + \frac{1}{2}M \|w_1\|_E^2 \geq J(u) \end{aligned}$$

(  $a(w_1, u) - L(w_1) = 0$ , car  $u$  est une solution de (I)), il s'ensuit que :

$$\forall w \in E, J(w) \geq J(u)$$

ce qui entraîne que  $u$  est un minimiseur de  $J$ .

## 2.3. ETUDE NUMÉRIQUE

---

- (II) $\implies$ (I) : Supposons que  $u$  est un minimiseur de  $J$ , pour tout  $w \in E$  considérons la fonction :

$$\psi(\lambda) = J(u + \lambda w), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

on a :

$$J(u) \leq J(w), \quad \forall w \in E$$

par conséquent :

$$\begin{aligned} J(u) &\leq J(u + \lambda w) \implies \\ J(u) &= \psi(0) \leq \psi(\lambda), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

d'où 0 est un minimiseur de  $\psi$ , il s'ensuit que  $\psi'(0) = 0$ , d'un autre côté on a :

$$\psi(\lambda) = \left[ \frac{1}{2}a(u, u) + 2\lambda a(u, w) + \lambda^2 a(w, w) \right] - L(u) - \lambda L(w)$$

et

$$\psi'(\lambda) = a(u, w) + \lambda a(w, w) - L(w)$$

$$\psi'(0) = 0 \implies a(u, w) - L(w) = 0 \implies a(u, w) = L(w), \quad \forall w \in E.$$

Ce qui achève la démonstration.

■

## 2.3 Etude numérique

### 2.3.1 Problème elliptique modèle (Problème de Dirichlet)

Considérons le problème au limites suivant :

$$(P) \begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in \Omega = ]0, 1[ \quad \dots(\mathbf{1}) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

$f \in L^2(\Omega)$ .

### 2.3. ETUDE NUMÉRIQUE

---

#### Formulation variationnelle :

Notre objectif est de construire la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$ , une forme linéaire  $L(\cdot)$ , et un espace de Hilbert  $E$  tel que (P) soit équivalent au problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in E \text{ tel que} \\ a(u, w) = L(w), \forall w \in E. \end{cases}$$

Multiplions l'équation (1) par une fonction test  $w \in D(\Omega)$  on obtient :

$$-u''(x)w(x) = f(x)w(x)$$

en intégrant cette dernière équation par partie sur  $\Omega$  on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 -u''(x)w(x)dx &= \int_0^1 f(x)w(x)dx \\ \implies \int_0^1 u'(x)w'(x)dx + u'(0)w(0) - u'(1)w(1) &= \int_0^1 f(x)w(x)dx \end{aligned}$$

comme  $u$  satisfait les conditions aux limites de Dirichlet, alors on choisit l'espace de Hilbert  $E$  tel que  $\forall w \in E$ ,  $w(0) = w(1) = 0$ , on obtient :

$$\int_0^1 u'(x)w'(x)dx = \int_0^1 f(x)w(x)dx$$

pour que  $\int_0^1 u'(x)w'(x)dx$  ait un sens il suffit que  $u', w' \in L^2(\Omega)$ , de même pour  $\int_0^1 f(x)w(x)dx$  il suffit que  $w \in L^2(\Omega)$ , et comme les conditions aux bords du problème (P) impliquent  $u \in H_0^1(\Omega)$ , on prend  $E = H_0^1(\Omega)$ , et on obtient la formulation variationnelle suivante :

$$(FV) \begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u, w) = L(w), \forall w \in H_0^1(\Omega) \dots (2) \end{cases}$$

où :  $a(u, w) = \int_0^1 u'(x)w'(x)dx$  et  $L(w) = \int_0^1 f(x)w(x)dx$ .

### 2.3. ETUDE NUMÉRIQUE

---

#### Existence et unicité de la solution :

1. Il est clair que  $a(u, w)$  est une forme bilinéaire et  $L(w)$  est une forme linéaire par linéarité de l'intégrale.
2. Montrons que  $L(\cdot)$  est continue, en effet pour tout  $w \in H_0^1(\Omega)$  on a :

$$\begin{aligned} |L(w)| &= \left| \int_0^1 f(x)w(x)dx \right| \\ &\stackrel{C.S}{\leq} \left( \int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 |w(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} \\ &\stackrel{Pc}{\leq} c(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &= \alpha \|w\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \alpha = c(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)} > 0 \end{aligned}$$

$L(\cdot)$  est bornée alors  $L(\cdot)$  est continue.

3. Montrons que  $a(\cdot, \cdot)$  est continue, pour tout  $u, w \in H_0^1(\Omega)$  on a :

$$\begin{aligned} |a(u, w)| &= \left| \int_0^1 u'(x)w'(x)dx \right| \\ &\leq \|u'\|_{L^2(\Omega)} \|w'\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &= c \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|w\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad c = 1 > 0 \end{aligned}$$

d'où  $a(\cdot, \cdot)$  est bornée alors  $a(\cdot, \cdot)$  est continue.

4.  $a(u, u) = \int_0^1 (u'(x))^2 dx = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \geq M \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$ , ( $M = 1 > 0$ ),  $\forall u \in H_0^1(\Omega)$ , par conséquent  $a(\cdot, \cdot)$  est coercive.

D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe  $u \in H_0^1(\Omega)$  unique solution de (FV).

5. Montrons que (FV)  $\iff$  (P), dans le sens où la solution de (FV) est une solution de  $u$ .

" $\Leftarrow$ " est vérifié.

" $\Rightarrow$ " Supposons que  $u$  est une solution de (FV), on a :

- $u \in H_0^1(\Omega)$ , il s'ensuit que les conditions aux bords sont satisfaites ( $u(0) = u(1) = 0$ ).

### 2.3. ETUDE NUMÉRIQUE

---

– Comme  $D(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ , alors (2) implique

$$\int_0^1 u'(x)w'(x)dx = \int_0^1 f(x)w(x)dx, \forall w \in D(\Omega)$$

par intégration par partie sur  $\Omega$  on obtient :

$$\int_0^1 (u''(x) + f(x))w(x)dx = 0, \forall w \in D(\Omega)$$

d'après le théorème 2.1.1 :

$$u''(x) + f(x) = 0, \text{ p.p sur } \Omega$$

d'où :  $-u''(x) = f(x)$ , p.p sur  $\Omega$ .

$f \in L^2(\Omega)$ , d'où  $u'' \in L^2(\Omega)$ , comme  $u, u' \in L^2(\Omega)$ , on en déduit que  $u \in H^2(\Omega)$  ( $u$  est régulière), l'équation (1) est donc satisfaite au sens de  $L^2(\Omega)$ .

#### Approximation variationnelle par des éléments finis :

Une méthode d'approximation consiste à rechercher une solution approchée dans un sous-espace Hilbertien  $E_h \subset E$  de dimension finie pour la formulation variationnelle (FV), dans ce cas le problème approché est défini comme suit :

$$(FV)_h \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in E_h \text{ tel que} \\ a(u_h, w_h) = L(w_h), \forall w_h \in E_h \end{array} \right.$$

•  $E_h \subset E$ , alors  $a(\cdot, \cdot)$  reste continue et coercive dans  $E_h$ , et  $L(\cdot) \in E_h'$  (linéaire et continue dans  $E_h$ ), il s'ensuit que  $(FV)_h$  admet une unique solution (Lax-Milgram).

•  $E_h$  est de dimension finie, donc il existe une famille  $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$  base de  $E_h$  ( $\dim(E_h) = n$ ), alors  $u_h = \sum_{i=1}^n u_{h,i} \varphi_i$ ,  $u_h$  est une solution de  $(FV)_h$  si  $u_h$  est une solution du système suivant :

$$a(u_h, \varphi_k) = L(\varphi_k), \quad 1 \leq k \leq n$$

$$\Leftrightarrow a\left(\sum_{i=1}^n u_{h,i} \varphi_i, \varphi_k\right) = L(\varphi_k), \quad 1 \leq k \leq n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n u_{h,i} a(\varphi_i, \varphi_k) = L(\varphi_k), \quad 1 \leq k \leq n$$

ces équations peuvent se reformuler sous la forme d'un système linéaire :  $A_h u_h = L_h$ , où  $u_h = (u_{h,i})_{1 \leq i \leq n}$ ,  $L_h = (L(\varphi_k))_{1 \leq k \leq n}$ , et  $A_h = (a(\varphi_i, \varphi_k))_{1 \leq i, k \leq n} = (a_{ki})_{1 \leq i, k \leq n}$ .

• La matrice  $A_h$  est symétrique si  $a(\cdot, \cdot)$  est symétrique.

## 2.3. ETUDE NUMÉRIQUE

---

**Lemme 2.3.1** (Céa) : Supposons que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram (L-M) sont vérifiées pour (FV). Alors il existe une solution unique  $u_h$  au problème  $(FV)_h$ , la matrice  $A_h$  est inversible et on a l'estimation d'erreur :

$$\|u - u_h\|_E \leq \frac{c}{M} \min_{w_h \in E_h} \|u - w_h\|_E$$

où  $c$  est la constante de continuité de  $a(.,.)$  et  $M$  la constante de coercivité.

Si  $a(.,.)$  est symétrique alors :

$$\|u - u_h\|_E \leq \sqrt{\frac{c}{M}} \min_{w_h \in E_h} \|u - w_h\|_E$$

**Preuve** : Allaire Grégoire page 154. (Analyse numérique et optimisation). ■

**Lemme 2.3.2** : Sous les hypothèses du théorème de (L-M) la matrice  $A_h$  est définie positive.

**Preuve** : Exercice. ■

**Définition 2.3.1** : On dit que la famille des problèmes  $(FV)_h$  associée à  $E_h$  est convergente si et seulement si :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_E = 0.$$

On dit que la convergence est d'ordre  $p$  si et seulement si il existe  $k > 0$  indépendant de  $h$  tel que :

$$\|u - u_h\|_E \leq kh^p.$$

**Lemme 2.3.3** : Sous les hypothèses du théorème de (L-M), on suppose qu'il existe un sous-espace  $F \subset E$  dense dans  $E$ , et une application  $\pi_h$  définie de  $F$  dans  $E_h$  (appelée opérateur d'interpolation) tel que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|w - \pi_h(w)\|_E = 0, \quad \forall w \in F,$$

alors la famille des problèmes  $(FV)_h$  associée à  $E_h$  est convergente.

**Lemme 2.3.4** ( Formule d'orthogonalité de Galarkin) : Soit  $u$  solution de (FV) et soit  $u_h$  solution de  $(FV)_h$ , alors :

$$a(u - u_h, w_h) = 0, \quad \forall w_h \in E_h.$$

**Preuve** : Exercice. ■

### 2.3. ETUDE NUMÉRIQUE

---

#### Approximation par éléments finis P1 :

• Considérons un maillage uniforme de  $[0, 1]$ ,  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1$ ,  $x_i = x_0 + ih = ih$ , pour  $0 \leq i \leq n + 1$ .

• Introduisons l'espace fonctionnel de dimension finie composé des fonctions continues sur  $[0, 1]$ , affines sur chaque maille (élément)  $[x_i, x_{i+1}]$  du maillage et nulles en 0 et en 1 :

$$E_h = \{w_h \in C([0, 1]), w_h|_{[x_i, x_{i+1}] = \Omega_i} \in P1, 0 \leq i \leq n, w(0) = w(1) = 0\}.$$

•  $E_h$  est un espace vectoriel de dimension  $n$ .

• Une base de  $E_h$  est donnée par les fonctions  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  continues et affines sur chaque élément  $[x_i, x_{i+1}]$ , tel que :

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

on définit les fonctions  $\varphi_i$  sur chaque élément par :

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

En utilisant ces fonctions la matrice  $A_h$  (matrice de rigidité) est tridiagonale.

**Lemme 2.3.5** : *L'espace  $E_h = \{w \in C(\bar{\Omega}) / w|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P1, i = 1, \dots, n + 1\}$  est un sous espace de  $H^1(\Omega)$  de dimension  $n + 2$  et la famille  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n+2}\}$  en est une base. Toute fonction  $w \in E_h$  est définie de manière unique par ses valeurs aux sommets  $(x_i)_{1 \leq i \leq n+2}$  :*

$$\forall x \in \Omega, w(x) = \sum_{i=1}^{n+2} w(x_i) \varphi_i(x).$$

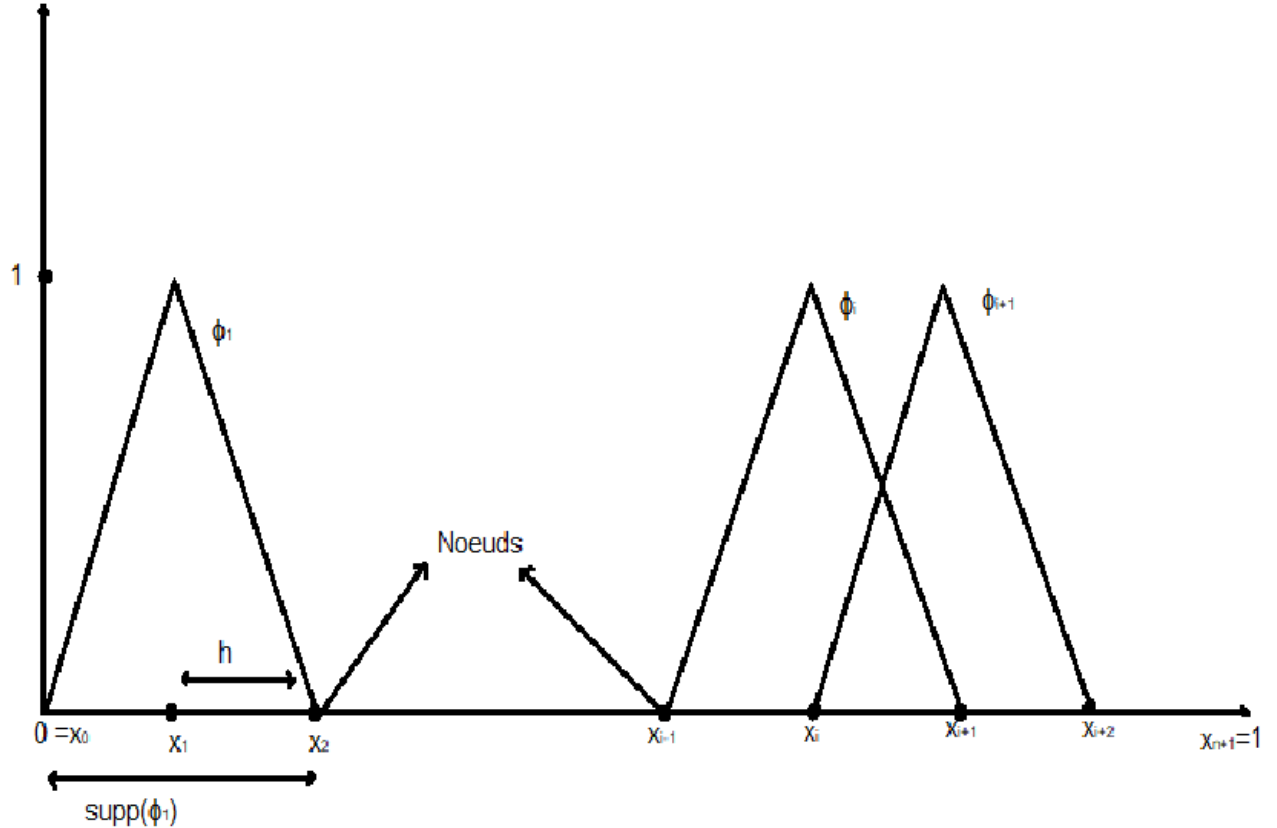
De même, l'espace vectoriel  $E_h = \{w \in C(\bar{\Omega}) / w|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P1, i = 1, \dots, n + 1 \text{ et } w(a) = w(b) = 0\}$  est un sous espace de  $H_0^1(\Omega)$  de dimension  $n$  et la famille  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  en est une base.

En particulier, pour toute  $w \in E_h$  on a :

$$\forall x \in \Omega, w(x) = \sum_{i=1}^n w(x_i) \varphi_i(x).$$

### 2.3. ETUDE NUMÉRIQUE

**Remarque 2.3.1 :** Chaque fonction de base  $\varphi_i$  a un support très réduit.



- $h = \frac{1}{n+1}$ , la longueur de  $\Omega_i = [x_i, x_{i+1}]$ .
- $x_i = ih$ ,  $0 \leq i \leq n+1$ .
- Les éléments sont  $\Omega_i = [x_i, x_{i+1}]$ ,  $0 \leq i \leq n$ .
- On a deux noeuds par élément, les noeuds de  $\Omega_i$  sont  $x_i$  et  $x_{i+1}$ .
- $E_h \subset H_0^1(\Omega)$ , donc les fonctions de  $E_h$  soient nulles en  $x_0 = 0$  et en  $x_{n+1} = 1$ , et dans ce cas on appelle  $x_1, x_2, \dots, x_n$  les noeuds libres et  $x_0, x_{n+1}$  les noeuds liés.

$$\bullet (FV)_h \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_{h,1}, u_{h,2}, \dots, u_{h,n} \text{ tel que} \\ \sum_{i=1}^n a(\varphi_i, \varphi_k) u_{h,i} = L(\varphi_k), \quad 1 \leq k \leq n \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_{h,1}, u_{h,2}, \dots, u_{h,n} \text{ tel que} \\ \sum_{i=1}^n \left[ \int_0^1 \varphi_i'(x) \varphi_k'(x) dx \right] u_{h,i} = \int_0^1 f(x) \varphi_k(x) dx, \quad 1 \leq k \leq n \end{array} \right.$$

• La résolution de  $(FV)_h$  revient à la résolution du système linéaire  $A_h u_h = L_h$ , où  $u_h = (u_{h,i})_{1 \leq i \leq n}$ ,  $L_h = (L(\varphi_k))_{1 \leq k \leq n}$ , et  $A_h = (a(\varphi_i, \varphi_k))_{1 \leq i, k \leq n} = (a_{ki})_{1 \leq i, k \leq n}$ .



### 2.3. ETUDE NUMÉRIQUE

$$\bullet \varphi'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_{i-1}} = \frac{1}{h} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{1}{x_i - x_{i+1}} = -\frac{1}{h} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases} .$$

•  $\text{supp}(\varphi_i) = [x_{i-1}, x_{i+1}]$ ,  $\text{supp}(\varphi'_i) \subset \text{supp}(\varphi_i)$ .

• La matrice  $A_h$  est tridiagonale, donc les composantes de  $A_h$  sont sous la forme :

$$\star a_{ii} = a(\varphi_i, \varphi_i) = \int_0^1 (\varphi'_i(x))^2 dx, \quad 1 \leq i \leq n.$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{x_{i-1}} (\varphi'_i(x))^2 dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\varphi'_i(x))^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\varphi'_i(x))^2 dx + \int_{x_{i+1}}^1 (\varphi'_i(x))^2 dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\varphi'_i(x))^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\varphi'_i(x))^2 dx \\ &= \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx + \frac{1}{(x_i - x_{i+1})^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \\ &= \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_{i+1} - x_i} = \frac{2}{h}, \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

$$\star a_{ii-1} = a(\varphi_i, \varphi_{i-1}) = \int_0^1 \varphi'_i(x) \varphi'_{i-1}(x) dx, \quad 2 \leq i \leq n.$$

$$\begin{aligned} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_i(x) \varphi'_{i-1}(x) dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( \frac{1}{x_{i-1} - x_i} \right) \left( \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \right) dx \\ &= -\frac{1}{x_i - x_{i-1}} = -\frac{1}{h}. \quad 2 \leq i \leq n. \quad ( \text{supp}(\varphi_i) \cap \text{supp}(\varphi_{i-1}) = [x_{i-1}, x_i] ). \end{aligned}$$

$$\star a_{ii+1} = a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) = \int_0^1 \varphi'_i(x) \varphi'_{i+1}(x) dx, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

$$\begin{aligned} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi'_i(x) \varphi'_{i+1}(x) dx \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \right) \left( \frac{1}{x_i - x_{i+1}} \right) dx \\ &= -\frac{1}{x_{i+1} - x_i} = -\frac{1}{h}. \quad 1 \leq i \leq n-1. \quad ( \text{supp}(\varphi_i) \cap \text{supp}(\varphi_{i+1}) = [x_i, x_{i+1}] \end{aligned}$$

).

•  $a_{ij} = 0$ , si  $|i - j| \geq 2$ .

• Calculons les composantes de  $L_h$  en utilisant la méthode des trapèzes, l'aire du

### 2.3. ETUDE NUMÉRIQUE

---

trapèze de hauteur  $[x_i, x_{i+1}]$  est :

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)dx &= \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)(g(x_{i+1}) + g(x_i)) \\ &= \frac{h}{2}(g(x_{i+1}) + g(x_i)). \end{aligned}$$

$$\star L_{h,i} = L(\varphi_i) = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx, \quad 1 \leq i \leq n.$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{x_{i-1}} f(x)\varphi_i(x)dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\varphi_i(x)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)dx + \int_{x_{i+1}}^1 f(x)\varphi_i(x)dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\varphi_i(x)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)dx \\ &= \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})(f(x_i)\varphi_i(x_i) + f(x_{i-1})\varphi_i(x_{i-1})) + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)(f(x_i)\varphi_i(x_i) + \\ &f(x_{i+1})\varphi_i(x_{i+1})) \\ &= \frac{1}{2}f(x_i)(x_i - x_{i-1} + x_{i+1} - x_i) \\ &= \frac{1}{2}f(x_i)(x_{i+1} - x_{i-1}), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (\varphi_i(x_i) = 1, \text{ et } \varphi_i(x_{i-1}) = \varphi_i(x_{i+1}) = \\ &0). \end{aligned}$$

On obtient le schéma numérique :

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_{i-1})f_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (*)$$

Si le maillage est uniforme ( $x_i - x_{i-1} = h, \forall i$ ) on a :

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - \frac{u_{i+1} - u_i}{h} = \frac{1}{2}(2h)f_i, \quad 1 \leq i \leq n \\ &\Leftrightarrow \frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h} = hf_i, \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

**Convergence et estimation d'erreur :**

**Définition 2.3.2 :** L'opérateur d'interpolation P1 est l'application linéaire  $\pi_h$  définie de  $H^1(\Omega)$  dans  $E_h$  par :

$$\forall w \in H^1(\Omega), \quad (\pi_h w)(x) = \sum_{i=1}^{n+2} w(x_i)\varphi_i(x).$$

### 2.3. ETUDE NUMÉRIQUE

---

En particulier, sur  $H_0^1(\Omega)$  l'opérateur  $\pi_h$  vérifie :

$$\forall w \in H_0^1(\Omega), (\pi_h w)(x) = \sum_{i=1}^n w(x_i) \varphi_i(x).$$

**Remarque 2.3.2 :**

1. La définition 2.3.2, a un sens car  $H^1(\Omega)$  est un sous-espace de  $C(\Omega)$  et donc toute fonction de  $H^1(\Omega)$  est définie en tout point de  $\Omega \subset \mathbb{R}$ .
2. D'après le lemme 2.3.5, il est clair que  $\pi_h w \in E_h$ , et si  $w \in E_h$  alors  $\pi_h w = w$ .

**Lemme 2.3.6 :** (lemme d'interpolation P1)

1. Pour toute  $w \in H^2(\Omega)$ , il existe une constante  $k > 0$  indépendante de  $h$  tel que :

$$\|w - \pi_h w\|_{H^1(\Omega)} \leq kh \|w''\|_{L^2(\Omega)}.$$

2. Pour toute  $w \in H^1(\Omega)$ , on a :  $\lim_{h \rightarrow 0} \|w - \pi_h w\|_{H^1(\Omega)} = 0$ .

**Preuve**

1. On montre cette inégalité pour  $C^2(\overline{\Omega})$ , par densité on en déduit le résultat. Soit  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ , comme  $\pi_h w \in E_h$  on a :  $\pi_h w(x) = \alpha x + \beta$ , de plus,  $\pi_h w(x_i) = w(x_i)$  et  $\pi_h w(x_{i+1}) = w(x_{i+1})$ , donc :

$$\pi_h w(x) = w(x_i) + \frac{w(x_{i+1}) - w(x_i)}{h} (x - x_i)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} w(x) - \pi_h w(x) &= w(x) - w(x_i) - \frac{w(x_{i+1}) - w(x_i)}{h} (x - x_i) \\ &= \int_{x_i}^x w'(t) dt - \frac{x - x_i}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} w'(t) dt. \end{aligned}$$

D'après le théorème des accroissements finis,  $\exists y \in ]x_i, x[$  et  $z \in ]x_i, x_{i+1}[$  tels que :

$$\begin{aligned} w(x) - \pi_h w(x) &= (x - x_i)w'(y) - (x - x_i)w'(z) \\ &= (x - x_i) \int_z^y w''(t) dt. \end{aligned}$$

### 2.3. ETUDE NUMÉRIQUE

---

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned}
 |w(x) - \pi_h w(x)| &\leq |x_{i+1} - x_i| \left| \int_z^y w''(t) dt \right| \\
 &\leq h \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} 1^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} |w''(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= h\sqrt{h} \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} |w''(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

alors :

$$|w(x) - \pi_h w(x)|^2 \leq h^3 \int_{x_i}^{x_{i+1}} |w''(t)|^2 dt,$$

on intègre  $x$  sur  $[x_i, x_{i+1}]$  on obtient :

$$\begin{aligned}
 \int_{x_i}^{x_{i+1}} |w(x) - \pi_h w(x)|^2 dx &\leq h^3 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} |w''(t)|^2 dt \right) dx \\
 &= h^4 \int_{x_i}^{x_{i+1}} |w''(t)|^2 dt
 \end{aligned}$$

en sommant sur  $i = 0, \dots, n$  on obtient :

$$\sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} |w(x) - \pi_h w(x)|^2 dx \leq h^4 \sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} |w''(t)|^2 dt$$

d'où

$$\int_{x_0=0}^{x_{n+1}=1} |w(x) - \pi_h w(x)|^2 dx \leq h^4 \int_{x_0=0}^{x_{n+1}=1} |w''(t)|^2 dt$$

$$\implies \|w - \pi_h w\|_{L^2(0,1)}^2 \leq h^4 \|w''\|_{L^2(0,1)}^2 \quad (\mathbf{I})$$

### 2.3. ETUDE NUMÉRIQUE

---

Il reste à obtenir une estimation sur les dérivées. Pour  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ , on a :

$$\begin{aligned}
 w'(x) - (\pi_h w)'(x) &= w'(x) - \frac{w(x_{i+1}) - w(x_i)}{h} \\
 &= w'(x) - \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} w'(t) dt \\
 &= \frac{1}{h} (hw'(x) - \int_{x_i}^{x_{i+1}} w'(t) dt) \\
 &= \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (w'(x) - w'(t)) dt \\
 &= \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( \int_t^x w''(s) ds \right) dt.
 \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned}
 |w'(x) - (\pi_h w)'(x)| &= \frac{1}{h} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( \int_t^x w''(s) ds \right) dt \right| \\
 &\leq \frac{1}{h} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} w''(s) ds \right) dt \right| \\
 &= \left| \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} w''(s) ds \right) \right| \\
 &\leq \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} 1^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} |w''(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \sqrt{h} \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} |w''(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

il s'ensuit que :

$$|w'(x) - (\pi_h w)'(x)|^2 \leq h \int_{x_i}^{x_{i+1}} |w''(s)|^2 ds$$

par intégration on a :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |w'(x) - (\pi_h w)'(x)|^2 dx \leq h \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} |w''(s)|^2 ds \right) dx$$

### 2.3. ETUDE NUMÉRIQUE

---

en sommant sur  $i = 0, \dots, n$  on obtient :

$$\sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} |w'(x) - (\pi_h w)'(x)|^2 dx \leq h^2 \sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} |w''(s)|^2 ds$$

ce qui entraîne :

$$\|w' - (\pi_h w)'\|_{L^2(]0,1])}^2 \leq h^2 \|w''\|_{L^2(]0,1])}^2 \quad (\text{II})$$

de (I) et (II) on a :

$$\begin{aligned} \|w - \pi_h w\|_{H^1(]0,1])}^2 &= \|w - \pi_h w\|_{L^2(]0,1])}^2 + \|w' - (\pi_h w)'\|_{L^2(]0,1])}^2 \\ &\leq h^4 \|w''\|_{L^2(]0,1])}^2 + h^2 \|w''\|_{L^2(]0,1])}^2 \\ &\leq 2h^2 \|w''\|_{L^2(]0,1])}^2, \quad (\text{pour } h < 1) \end{aligned}$$

2.  $\forall w \in H^1(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} |w(x) - \pi_h w(x)| &= \left| \int_{x_i}^x w'(t) dt - \frac{x - x_i}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} w'(t) dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} w'(t) dt \right| + \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} w'(t) dt \right| \\ &= 2 \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} w'(t) dt \right| \\ &\leq 2\sqrt{h} \|w'\|_{L^2(]x_i, x_{i+1}])} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} |w(x) - \pi_h w(x)|^2 &\leq 4h \|w'\|_{L^2(]x_i, x_{i+1}])}^2 \\ \implies \int_{x_i}^{x_{i+1}} |w(x) - \pi_h w(x)|^2 dx &\leq 4h^2 \|w'\|_{L^2(]x_i, x_{i+1}])}^2 \end{aligned}$$

donc

$$\|w - \pi_h w\|_{L^2(]0,1])} \leq 2h \|w'\|_{L^2(]0,1])} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Il reste de montrer que  $\|w' - (\pi_h w)'\|_{L^2(]0,1])} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ . Soit  $\epsilon > 0$ , comme  $C^2([0, 1])$  est dense dans  $C^1([0, 1])$ , pour tout  $w \in C^1([0, 1])$ , il existe  $v \in C^2([0, 1])$

### 2.3. ETUDE NUMÉRIQUE

---

tel que  $\|w' - v'\|_{L^2(]0,1])} \leq \epsilon$ . Pour  $w \in C^1([0, 1])$ ,  $\exists x \in ]x_i, x_{i+1}[$  tel que :

$$w'(x) = \frac{w(x_{i+1}) - w(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{w(x_{i+1}) - w(x_i)}{h} = (\pi_h w)'(x), \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |(\pi_h w)'(x)|^2 dx &= \frac{1}{h} (w(x_{i+1}) - w(x_i))^2 \\ &= \frac{1}{h} \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} w'(t) dt \right)^2 \\ &\leq h \int_{x_i}^{x_{i+1}} |w'(t)|^2 dt, \text{ (C.S)} \\ &\leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} |w'(t)|^2 dt \end{aligned}$$

donc :  $\|(\pi_h w)'\|_{L^2(]0,1])} \leq \|w'\|_{L^2(]0,1])}$ . Alors on en déduit :

$$\begin{aligned} \|(\pi_h w)' - (\pi_h v)'\|_{L^2(]0,1])} &= \|(\pi_h(w - v))'\|_{L^2(]0,1])} \\ &\leq \|w' - v'\|_{L^2(]0,1])} \leq \epsilon \end{aligned}$$

en appliquant (II) :

$$\|v' - (\pi_h v)'\|_{L^2(]0,1])} \leq ch \|v''\|_{L^2(]0,1])} \leq \epsilon$$

pour  $h$  suffisamment petit, d'où :

$$\begin{aligned} \|w' - (\pi_h w)'\|_{L^2(]0,1])} &\leq \|w' - v'\|_{L^2(]0,1])} + \|v' - (\pi_h v)'\|_{L^2(]0,1])} + \|(\pi_h v)' - (\pi_h w)'\|_{L^2(]0,1])} \\ &\leq 3\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration.

■

**Théorème 2.3.1** : (Convergence de la méthode P1) Soient  $u \in H_0^1(\Omega)$  la solution du problème (FV) et  $u_h \in E_h$  la solution de  $(FV)_h$ . Alors la méthode des éléments finis P1 converge, c'est à dire que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

De plus, si  $u \in H^2(\Omega)$ , alors il existe une constante  $k > 0$  telle que :

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq kh \|u''\|_{L^2(\Omega)} \leq kh \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

### 2.3. ETUDE NUMÉRIQUE

---

**Preuve :** Exercice. ■

**Lemme 2.3.7 :** Soient  $w \in H^2(\Omega), \Omega = ]0, 1[$ , et  $\pi_h w \in E_h$  la fonction d'interpolation définie par (définition 2.3.2). Alors il existe une constante  $k > 0$  indépendante de  $h$  tel que :

$$\|w - \pi_h w\|_{L^2(\Omega)} \leq kh^2 \|w''\|_{L^2(\Omega)}.$$

$$\|w' - (\pi_h w)'\|_{L^2(\Omega)} \leq kh \|w''\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Exercice 1 :** Soient  $u : \Omega = ]0, 1[ \longrightarrow \mathbb{R}$ , et  $E = \{w \in H^1(\Omega) / w(0) = 0\}$ ,

$$(P) \begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in \Omega = ]0, 1[ \\ u(0) = 0, & u'(1) + u(1) = 1 \end{cases}$$

où  $f \in L^2(\Omega)$ .

1. Donner une formulation variationnelle du problème (P) sur  $E$ .
2. Etudier l'existence et l'unicité de la solution pour la formulation variationnelle.
3. Ecrire la formulation variationnelle discrétisée associée dans le cadre d'une résolution par la méthode d'éléments finis P1.
4. En déduire qu'elle est équivalente à la résolution d'un système linéaire dont on précisera la dimension et que l'on explicitera.



# Chapitre 3

## Approximation des problèmes évolutifs en temps par les éléments finis

### 3.1 Problèmes paraboliques (Problème modèle l'équation de la chaleur)

Considérons un modèle du premier ordre en temps et d'ordre deux en espace :

$$(P_{Ch}) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t), & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x, t) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{pour } x \in \Omega \end{cases}$$

#### 3.1.1 Formulation variationnelle

On suppose que  $f(x, t) \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+)$  et  $u_0(x) \in C(\bar{\Omega})$ , on utilise des fonctions test  $w(x)$  qui ne dépendent pas du temps  $t$  et on intègre par rapport à la variable d'espace.

**Théorème 3.1.1** : (*Formule de Green*)

Soit  $\Omega$  un ouvert régulier de classe  $C^1$ , soit  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  et  $w \in C^1(\bar{\Omega})$ , toutes deux à support borné dans  $\Omega$ , alors on a :

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) w(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla w(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial n(x)} w(x) dx$$

### 3.1. PROBLÈMES PARABOLIQUES (PROBLÈME MODÈLE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR)

---

où  $\frac{\partial u(x)}{\partial n(x)} = \nabla u(x) \cdot n(x)$ ,  $n$  est la normal extérieure unité de  $\Omega$ .

**Proposition 3.1.1** Soit  $u(x, t)$  une fonction de classe  $C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+)$ , soit  $E$  l'espace vectoriel défini par :

$$E = \{w \in C^1(\bar{\Omega}), \text{ tel que } w = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Alors  $u$  est une solution de l'équation de la chaleur ( $P_{Ch}$ ) si et seulement si pour tout temps  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $u(\cdot, t)$  appartient à  $E$  et vérifie :

$$(FV^{Ch}) \begin{cases} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)w(x)dx + \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \cdot \nabla w(x)dx = \int_{\Omega} f(x, t)w(x)dx, \quad \forall w \in E \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad (u(t=0) = u_0) \end{cases}$$

( Formulation variationnelle de ( $P_{Ch}$ ), pour  $t \in [0, T]$  ).

**Preuve** : Soit  $u$  solution du problème ( $P_{Ch}$ ). Multiplions l'équation par  $w \in E$  et intégrons sur  $\Omega$  on obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)w(x)dx - \int_{\Omega} \Delta u(x, t)w(x)dx = \int_{\Omega} f(x, t)w(x)dx \quad (*)$$

utilisons la formule de Green d'intégration par partie à  $t$  fixé :

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x, t)w(x)dx = \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \cdot \nabla w(x)dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x, t)w(x)dx$$

comme  $w = 0$  sur  $\partial\Omega$  ( $w \in E$ ), (\*) est équivalente à l'équation suivante :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)w(x)dx + \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \cdot \nabla w(x)dx = \int_{\Omega} f(x, t)w(x)dx, \quad \forall w \in E$$

Ce qui achève la première partie de démonstration. Supposons maintenant que  $u$  vérifie ( $FV^{Ch}$ ), en utilisant la formule d'intégration de Green (à l'envers) on obtient :

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) - f(x, t) \right) w(x)dx = 0, \quad \forall w \in E,$$

comme  $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - f$  est une fonction continue en  $x$  pour tout  $t$  alors :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) - f(x, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, x \in \Omega,$$

ainsi que  $u(\cdot, t) \in E$ , il s'ensuit que la condition aux limites :

$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ pour tout } t$$

est satisfaite, tandis que la condition initiale  $u(\cdot, 0) = u_0$  fait partie de la formulation variationnelle. Par conséquent  $u$  est une solution de ( $P_{Ch}$ ). ■

### 3.1.2 Semi-discrétisation par éléments finis en espace

Il s'agit de discrétiser la formulation variationnelle  $(FV)^{Ch}$  en espace seulement. Soit  $E_h$  un sous-espace de  $E$ , de dimension finie, alors on a pour  $t \in [0, T]$  le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h(t) \text{ tel que } (u_h : [0, T] \longrightarrow E_h) \\ \int_{\Omega} \frac{d}{dt} u_h(t) w_h dx + \int_{\Omega} \nabla u_h(t) \cdot \nabla w_h dx = \int_{\Omega} f(t) w_h dx, \quad \forall w_h \in E_h, \quad 0 < t < T \\ u_h(t=0) = u_{0h} \end{array} \right.$$

qui est équivalent au :

$$(FV)_h^{Ch} \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h(t) \text{ tel que} \\ \frac{d}{dt} \langle u_h(t), w_h \rangle_{L^2(\Omega)} + a(u_h(t), w_h) = \langle f(t), w_h \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \forall w_h \in E_h, \quad 0 < t < T \\ u_h(t=0) = u_{0h} \end{array} \right.$$

où  $u_{0h} \in E_h$  est une approximation de la donnée initiale  $u_0$ ,  $(FV)_h^{Ch}$  est une approximation variationnelle de  $(FV)^{Ch}$ .

**Lemme 3.1.1** : Soient  $E_h$  un sous espace de dimension finie de l'espace vectoriel normé  $E$ ,  $a(\cdot, \cdot)$  une forme bilinéaire, coercive sur  $E$ . Alors l'approximation variationnelle  $(FV)_h^{Ch}$ , admet une solution unique.

**Preuve** : Comme  $E_h$  est de dimension finie, on introduit une base  $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $E_h$ , dans cette base  $u_h$  s'écrit sous la forme :

$$u_h(t) = \sum_{i=1}^n u_{h,i}(t) \varphi_i$$

$u_{h,i}$  sont les coordonnées de  $u_h$ ,  $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$  ne dépendent pas du  $t$  (temps), donc seulement les  $u_{h,i}$  sont des fonctions de temps  $t$ , de même  $u_{0h} = \sum_{i=1}^n u_{0h,i} \varphi_i$ , dans ce cas  $(FV)_h^{Ch}$  devient :

$$(FV)_h^{Ch} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_{L^2(\Omega)} \frac{du_{h,i}(t)}{dt} + \sum_{i=1}^n a(\varphi_i, \varphi_j) u_{h,i}(t) = \langle f(t), \varphi_j \rangle_{L^2(\Omega)} \\ u_{h,j}(t=0) = u_{0h,j} \end{array} \right.$$

pour tout  $1 \leq j \leq n$ . Posons

$$(M_h)_{ij} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (\text{matrice de masse})$$

### 3.1. PROBLÈMES PARABOLIQUES (PROBLÈME MODÈLE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR)

---

$$(A_h)_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j), \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (\text{matrice de rigidité})$$

$$(L_h)_j = \langle f(t), \varphi_j \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

on obtient le système linéaire d'équations différentielles ordinaires à coefficients constants :

$$(*) \begin{cases} M_h \frac{du_h}{dt}(t) + A_h u_h(t) = L_h(t), & 0 < t < T \\ u_h(t=0) = u_{0h} \end{cases}$$

La matrice  $A_h$  et la matrice  $M_h$  sont définies positives donc inversibles d'où l'existence et l'unicité de la solution est assurée. (Par une simple diagonalisation simultanée de  $M_h$  et  $A_h$  on obtient la solution du système précédent). ■

#### 3.1.3 Discrétisation totale en espace-temps

On termine la discrétisation du problème  $(P_{Ch})$  en utilisant un schéma de différences finies en temps.

Ecrivons (\*) sous la forme :

$$(**) \begin{cases} M \frac{du}{dt}(t) + Au(t) = L(t), & 0 < t < T \\ u(t=0) = u_0 \end{cases}$$

Subdivisons l'intervalle  $[0, T]$  en  $p$  intervalles où le pas de temps  $\Delta t = \frac{T}{p}$ , posons  $t_i = i\Delta t$ ,  $0 \leq i \leq p$ ,  $u_i$  l'approximation de  $u(t_i)$ .

Pour calculer numériquement des solutions approchées de (\*\*) le schéma le plus simple et le plus utilisé est le  $\theta$ -schéma :

$$(***) \begin{cases} M \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t} + A(\theta u_{i+1} + (1 - \theta)u_i) = \theta L_{i+1} + (1 - \theta)L_i \end{cases}$$

(  $L_i = L(t_i)$ ,  $u_i = u(t_i)$ ,  $0 < \theta < 1$ ), si  $\theta = 0$ , on appelle (\*\*\*) schéma explicite, et si  $\theta = 1$  on dit que (\*\*\*) est un schéma implicite.

$$(***) \iff$$

$$Mu_{i+1} - Mu_i + \Delta t \theta Au_{i+1} + \Delta t A(1 - \theta)u_i = \Delta t(\theta L_{i+1} + (1 - \theta)L_i)$$

$$\iff (M + \Delta t \theta A)u_{i+1} = (M - \Delta t(1 - \theta)A)u_i + \Delta t(\theta L_{i+1} + (1 - \theta)L_i)$$

c'est un système linéaire à résoudre pour calculer  $u_{i+1}$  en fonction de  $u_i$ .

## 3.2. PROBLÈME HYPERBOLIQUE (PROBLÈME MODÈLE L'ÉQUATION DES ONDES)

---

**Lemme 3.1.2** : Si  $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ , le  $\theta$ -schéma  $(***)$  est inconditionnellement stable, tandis que, si  $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$  il est stable sous la condition :

$$\max_i \lambda_i \Delta t \leq \frac{2}{1 - 2\theta},$$

où  $(\lambda_i)_i$  sont les solutions de  $Au = \lambda Mu$ .

## 3.2 Problème hyperbolique (Problème modèle l'équation des ondes)

Considérons un problème modèle du second ordre en temps et d'ordre deux en espace :

$$(P_{Ond}) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t), & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x, t) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{pour } x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & \text{pour } x \in \Omega \end{cases}$$

### 3.2.1 Formulation variationnelle

Supposons que  $f(x, t) \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+)$ ,  $u_0(x) \in C(\bar{\Omega})$ , et  $u_1(x) \in C(\bar{\Omega})$ , on utilise des fonctions tests  $w(x)$  qui ne dépendent pas de temps  $t$  et on n'intègre que par rapport à la variable d'espace.

**Proposition 3.2.1** : Soit  $u(x, t)$  une fonction de classe  $C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+)$ , soit  $E$  l'espace vectoriel défini par :

$$E = \{w \in C^1(\bar{\Omega}), \text{ tel que } w = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Alors  $u$  est une solution de l'équation des ondes  $(P_{Ond})$  si et seulement si pour tout temps  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $u(\cdot, t)$  appartient à  $E$  et vérifie :

$$(FV^{Ond}) \begin{cases} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) w(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \cdot \nabla w(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t) w(x) dx, \quad \forall w \in E \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad (u(t=0) = u_0) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \end{cases}$$

( Formulation variationnelle de  $(P_{Ond})$ , pour  $t \in [0, T]$  ).

## 3.2. PROBLÈME HYPERBOLIQUE (PROBLÈME MODÈLE L'ÉQUATION DES ONDES)

---

### 3.2.2 Semi-discrétisation par éléments finis en espace

Soit  $E_h$  un sous-espace de  $E$ , de dimension finie, alors pour  $t \in [0, T]$ , le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h(t) \text{ tel que } (u_h : [0, T] \rightarrow E_h) \\ \int_{\Omega} \frac{d^2}{dt^2} u_h(t) w_h dx + \int_{\Omega} \nabla u_h(t) \cdot \nabla w_h dx = \int_{\Omega} f(t) w_h dx, \quad \forall w_h \in E_h, \quad 0 < t < T \\ u(t=0) = u_0, \quad \frac{du}{dt}(t=0) = u_1 \end{array} \right.$$

qui est équivalent au :

$$(FV_h^{Ond}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h(t) \text{ tel que} \\ \frac{d^2}{dt^2} \langle u_h(t), w_h \rangle_{L^2(\Omega)} + a(u_h(t), w_h) = \langle f(t), w_h \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \forall w_h \in E_h, \quad 0 < t < T \\ u_h(t=0) = u_{0h}, \quad \frac{du_h}{dt}(t=0) = u_{1h} \end{array} \right.$$

où  $u_{0h}, u_{1h} \in E_h$  sont des approximations des données initiales  $u_0$  et  $u_1$  respectivement.

Admet une solution unique.

**Remarque 3.2.1 :** *Le problème  $(FV_h^{Ond})$  est équivalent au système linéaire d'équations différentielles ordinaires d'ordre deux à coefficients constants :*

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} M_h \frac{d^2 u_h(t)}{dt^2} + A_h u_h(t) = L_h(t), \quad 0 < t < T \\ u_h(t=0) = u_{0h}, \quad \frac{du_h}{dt}(t=0) = u_{1h} \end{array} \right.$$

### 3.2.3 Discrétisation totale en espace-temps

Ecrivons (I) sous la forme :

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} M \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + Au(t) = L(t), \quad 0 < t < T \\ u(t=0) = u_0, \quad \frac{du}{dt}(t=0) = u_1 \end{array} \right.$$

subdivisons l'intervalle  $[0, T]$  en  $p$  intervalles où le pas de temps  $\Delta t = \frac{T}{p}$ , posons  $t_i = i\Delta t, 0 \leq i \leq p, u_i$  l'approximation de  $u(t_i)$ .

### 3.2. PROBLÈME HYPERBOLIQUE (PROBLÈME MODÈLE L'ÉQUATION DES ONDES)

---

Pour calculer numériquement des solutions approchées de (II) le schéma le plus utilisé est le  $\theta$ -schéma pour  $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$  :

$$(III) \left\{ M \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta t)^2} + A(\theta u_{i+1} + (1 - 2\theta)u_i + \theta u_{i-1}) = \theta L_{i+1} + (1 - 2\theta)L_i + \theta L_{i-1} \right.$$

(  $L_i = L(t_i)$ ,  $u_i = u(t_i)$ ).

- Lorsque  $\theta = 0$ , on appelle (III) schéma explicite (si  $M$  diagonale).
- Pour démarrer le schéma il faut connaître  $u^0$  et  $u^1$ , ce qu'on obtient grâce aux conditions initiales :

$$u^0 = u_0 \text{ et } \frac{u^1 - u^0}{\Delta t} = u_1$$

**Lemme 3.2.1** : La condition nécessaire de stabilité de Von Neumann pour le  $\theta$ -schéma (III) est toujours vérifiée si :  $\frac{1}{2} \leq 2\theta \leq 1$ , tandis que si  $0 \leq 2\theta < \frac{1}{2}$ , alors le schéma est stable si :

$$\max_i \lambda_i (\Delta t)^2 < \frac{4}{1 - 4\theta},$$

où  $(\lambda_i)_i$  sont les solutions de  $Au = \lambda Mu$ .