

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE DE BATNA 2

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE  
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

**Optimisation sans contraintes, aspect  
théorique et algorithmique**

**Cours et Exercices corrigés**

**Licence de Mathématiques**

**Dr. Boudiaf Naima**

Optimisation sans contraintes, aspect  
théorique et algorithmique.  
Cours et exercices corrigés

**Dr. BOUDIAF NAIMA<sup>1</sup>**

2017

<sup>1</sup>n.boudiaf@univ-batna2.dz

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Calcul différentiel, convexité</b>	<b>3</b>
1.1	Rappels de calcul différentiel : . . . . .	3
1.1.1	Dérivée directionnelle : . . . . .	3
1.1.2	Gradient et matrice hessienne : . . . . .	6
1.1.3	Développement de Taylor : . . . . .	7
1.2	Convexité : . . . . .	8
1.2.1	Ensembles convexes : . . . . .	8
1.2.2	Enveloppe convexe : . . . . .	9
1.3	Fonctions convexes : . . . . .	11
1.3.1	convexité et différentiabilité : . . . . .	16
1.3.2	Fonctions monotones : . . . . .	18
1.3.3	Exercices : . . . . .	20
1.3.4	Corrections : . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Optimisation sans contraintes</b>	<b>23</b>
2.1	Définitions et notations : . . . . .	23
2.1.1	Classification des problèmes d'optimisation : . . . . .	24
2.2	Optimisation sans contraintes : . . . . .	24
2.2.1	Résultats d'existence et d'unicité de la solution : . . . . .	25
2.2.2	Conditions d'optimalité : . . . . .	26
2.2.3	Exercices : . . . . .	29
2.2.4	Corrections : . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Algorithmes</b>	<b>35</b>
3.1	Direction de descente : . . . . .	35
3.2	Méthodes générales de descente : . . . . .	36
3.2.1	Principe de la méthode : . . . . .	36
3.2.2	Tests de convergence (Tests d'arrêt) : . . . . .	36

3.2.3	Convergence d'un algorithme de descente : . . . . .	37
3.2.4	Convergence asymptotique ( Vitesse de convergence) : . . . . .	37
3.2.5	Algorithme général de descente : . . . . .	38
3.3	Méthode du gradient : . . . . .	38
3.3.1	Algorithme général : . . . . .	39
3.3.2	Méthodes de gradient à pas optimal : . . . . .	39
3.3.3	Cas particulier : fonctions quadratiques : . . . . .	39
3.3.4	Méthodes de gradient à pas constant : . . . . .	41
3.3.5	Méthodes de recherche linéaire économiques ( Procédure d'Armijo) : . . . . .	42
3.4	Méthode du gradient conjugué : . . . . .	43
3.4.1	Description de la méthode : . . . . .	44
3.4.2	Calcul du pas de déplacement : . . . . .	44
3.4.3	Calcul de $\lambda_k$ : . . . . .	45
3.4.4	Algorithme : . . . . .	46
3.5	Méthode de Newton : . . . . .	48
3.5.1	Convergence de la méthode : . . . . .	51
3.6	Méthode de relaxation : . . . . .	51
3.6.1	Exercices : . . . . .	52
3.6.2	Corrections : . . . . .	53



# Préface

Le présent document est le fruit de l'enseignement de cette matière à l'université de Batna 2. Il est destiné aux étudiants de 3ème année Mathématiques LMD.

Optimiser : rendre optimal, donner à quelque chose les meilleures conditions d'utilisation, de fonctionnement ou de rendement au regard de certaines circonstances. (Déf. Larousse).

Un problème d'optimisation consiste à chercher un élément  $x^* \in D$  ( s'il existe ) pour lequel  $f(x^*)$  est la plus petite ( resp la plus grande ) valeur de  $f$  sur  $D$  et on écrit :  $\min_{x \in D} f(x) = f(x^*)$ , ( resp  $\max_{x \in D} f(x) = f(x^*)$  ).

Nous commençons par des rappels de base de calcul différentiel, et la notion de convexité,

Dans le deuxième chapitre, nous donnons quelques résultats théoriques sur l'optimisation sans contraintes.

Dans le troisième chapitre nous introduisons les algorithmes classiques de l'optimisation numérique sans contraintes.

Divers exemples et exercices accompagnent le présent document afin d'assimiler les notions plus théoriques vues en cours.

Les algorithmes sont implémentés sous le logiciel de calcul scientifique Matlab.



# Chapitre 1

## Calcul différentiel, convexité

### 1.1 Rappels de calcul différentiel :

#### 1.1.1 Dérivée directionnelle :

**Définition 1.1.1** : Considérons la fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , et soit  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  un point tel que  $f(x_0)$  est finie. Alors la dérivée directionnelle de  $f$  en  $x_0$  dans la direction  $d \in \mathbb{R}^n$  est définie par :

$$f'(x_0, d) = df(x_0, d) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t}$$

si elle existe.

Cette dérivée donne le taux de variation de  $f$  en  $x_0$  dans la direction  $d$ .

**Définition 1.1.2** : ( Gâteaux différentiabilité ) : On dit qu'une fonction  $f$  est Gâteaux différentiable (  $G$ -différentiable ) en  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  si elle admet une dérivée directionnelle en  $x_0$  suivant toutes les directions  $d \in \mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.1.3** : ( Fréchet différentiabilité ) : On dit que  $f$  est Fréchet différentiable (  $F$ -différentiable ) en  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  s'il existe une application linéaire continue  $L(x_0)$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  tel que :

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + d) - f(x_0) - L(x_0).d}{\|d\|} = 0.$$

L'application  $L(x_0)$  est appelé dérivée de  $f$  en  $x_0$ .



Autrement dit :  $f$  est F-différentiable en  $x_0 \in \mathfrak{R}^n$  s'il existe une application linéaire continue  $L(x_0)$  de  $\mathfrak{R}^n$  dans  $\mathfrak{R}$  tel que :

$$f(x_0 + d) = f(x_0) + L(x_0).d + \|d\| \cdot \epsilon(d),$$

avec :  $\lim_{d \rightarrow 0} \epsilon(d) = 0$ .

**Remarque 1.1.1 :**

**1-** L'application  $f$  peut être G-différentiable en  $x_0 \in \mathfrak{R}^n$  sans être continue en ce point.

**2-** Si l'application  $f$  est F-différentiable en  $x_0 \in \mathfrak{R}^n$  alors elle est continue en ce point.

**3-** La notion de F-différentiabilité est plus forte que celle de G-différentiabilité.

**4-** Si  $f$  est F-différentiable en  $x_0 \in \mathfrak{R}^n$  avec une dérivée  $L(x_0)$ , alors  $f$  est G-différentiable en  $x_0$  et  $L(x_0) = f'(x_0)$ , La réciproque est fautive.

**5-** Si  $f$  est F-différentiable alors  $f$  est une fonction différentiable.

**6-** Une fonction différentiable en un point admet donc des dérivées partielles en ce point. La réciproque est fautive en général.

**7-** Une fonction différentiable sur un ouvert  $V \in \mathfrak{R}^n$  dont toutes les dérivées partielles sont continues sur  $V$  est dite de classe  $C^1$  sur  $V$ .

**Exemple 1 :**

**1)**  $f : \mathfrak{R}^2 \longrightarrow \mathfrak{R}$ , une fonction définie par :  $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2^2$ . Pour tout  $d \in \mathfrak{R}^2$ , on a :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + td) - f(x)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_1 + td_1, x_2 + td_2) - f(x_1, x_2)}{t} \\ &= (1, 2x_2) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = f'(x).d = \nabla f(x)^T . d \end{aligned}$$

la dérivée directionnelle existe  $\forall d \in \mathfrak{R}^2$ , d'où  $f$  est G-différentiable.

**2)**  $f : \mathfrak{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathfrak{R}$ , une fonction définie par :  $f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2^2}{x_1^4 + x_2^4}$ , remarquons que la fonction  $f$  n'est pas continue en  $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , en effet on a :  $f(1, 0) = 0$ ,

et  $\lim_{x_1 \rightarrow 1} f(x_1, x_1) = \frac{1}{2} \neq f(1, 0)$ . D'un autre côté on a :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_1 + td_1, x_2 + td_2) - f(x_1, x_2)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(1 + td_1, td_2) - f(1, 0)}{t} \\ &= (0, -2) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = -2d_2 \end{aligned}$$

existe  $\forall d \in \mathfrak{R}^2$ , d'où  $f$  est G- différentiable.

**Exemple 2** :  $f : \mathfrak{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathfrak{R}$ , une fonction définie par :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0, & (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

$f$  est une fonction continue en  $(0, 0)$ , en effet pour  $x_1 = r \cos \theta$ ,  $x_2 = r \sin \theta$ ,  $r > 0$  et  $\theta \in ]0, 2\pi[$ , on a :

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)} f(x_1, x_2) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2} = 0 = f(0, 0),$$

de plus,  $f$  admet des dérivées partielles en  $(0, 0)$  car :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) &= \lim_{d_1 \rightarrow 0} \frac{f(d_1, 0) - f(0, 0)}{d_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0) &= \lim_{d_2 \rightarrow 0} \frac{f(0, d_2) - f(0, 0)}{d_2} = 0 \end{aligned}$$

pourtant  $f$  n'est pas F- différentiable ( et alors n'est pas différentiable) en  $(0, 0)$  car :

$$\lim_{(d_1, d_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(d_1, d_2) - f(0, 0) - \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0) \right) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}}{\|(d_1, d_2)\|} = \lim_{r \rightarrow 0} (\cos^2 \theta \sin \theta)$$

n'existe pas.

### 1.1.2 Gradient et matrice hessienne :

**Définition 1.1.4 :** ( Gradient ) : Considérons la fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , le gradient de  $f$  en  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles premières. Il est orthogonal à la courbe de niveau de  $f$  passant par  $x_0$ , noté  $\nabla f(x_0)$  ou encore  $\text{grad}f(x_0)$  :

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

**Remarque 1.1.2 :** Lorsque le gradient existe, la dérivée directionnelle est le produit scalaire entre le gradient de la fonction  $f$  et la direction  $d$ , c'est à dire :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t} = \nabla f^T d.$$

**Définition 1.1.5 :** ( matrice hessienne ) : Soit la fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , la matrice hessienne de  $f$  en  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  est la matrice de taille  $n \times n$  dont les entrées sont les dérivées partielles secondes :

$$H_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

**Remarque 1.1.3 :**

- 1- Lorsque  $f$  est de classe  $C^2$ , on a :  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ .
- 2- La matrice hessienne de  $f$  est une matrice symétrique.

**Exemple 3 :**

$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par :

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2x_2 + 2x_2^2x_3 + 2x_1x_2x_3 - x_1 - x_2 - x_3$$

on a :

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 4x_1x_2 + 2x_2x_3 - 1 \\ 2x_1^2 + 4x_2x_3 + 2x_1x_3 - 1 \\ 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 4x_2 & 4x_1 + 2x_3 & 2x_2 \\ 4x_1 + 2x_3 & 4x_3 & 4x_2 + 2x_1 \\ 2x_2 & 4x_2 + 2x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

### 1.1.3 Développement de Taylor :

**Théorème 1.1.1** : (Taylor au premier ordre) : Soit  $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  une fonction continûment différentiable sur un ouvert  $V$  de  $\mathfrak{R}^n$  alors :

1- Pour tout  $d \in \mathfrak{R}^n$  tel que  $x + d \in V$ , on a :

$$f(x + d) = f(x) + d^T \nabla f(x) + o(\|d\|).$$

2- Pour tout  $d \in \mathfrak{R}^n$  tel que  $x + d \in V$ , il existe  $t \in [0, 1]$  tel que :

$$f(x + d) = f(x) + d^T \nabla f(x + td).$$

**Théorème 1.1.2** : (Taylor au second ordre) : Soit  $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  une fonction deux fois différentiable sur un ouvert  $V$  de  $\mathfrak{R}^n$  alors :

1- Pour tout  $d \in \mathfrak{R}^n$  tel que  $x + d \in V$ , on a :

$$f(x + d) = f(x) + d^T \nabla f(x) + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x) d + o(\|d\|^2).$$

2- Pour tout  $d \in \mathfrak{R}^n$  tel que  $x + d \in V$ , il existe  $t \in [0, 1]$  tel que :

$$f(x + d) = f(x) + d^T \nabla f(x) + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x + td) d.$$

**Exemple 4** :  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par :

$$f(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 - e^{x_1+x_2}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a ;

$$\begin{aligned} f(x_0 + d) &= f(x_0) + d^T \nabla f(x_0) + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x_0) d + o(\|d\|^2) \\ &= \frac{1}{2} d_1^2 - \frac{1}{2} d_2^2 - d_1 d_2 - d_1 - d_2 + o(\|d\|^2) \end{aligned}$$

## 1.2 Convexité :

### 1.2.1 Ensembles convexes :

**Définition 1.2.1** : Soient  $E$  un sous ensemble de  $\mathbb{R}^n$  et  $x, y \in E$ . on appelle segment de  $E$ , un ensemble noté et défini comme suit :

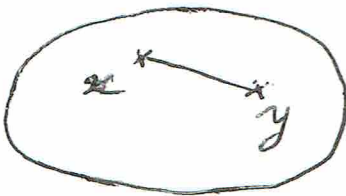
$$[x, y] = \{ty + (1-t)x / t \in [0, 1]\}.$$

**Définition 1.2.2** : un sous ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}^n$  est dit convexe si :

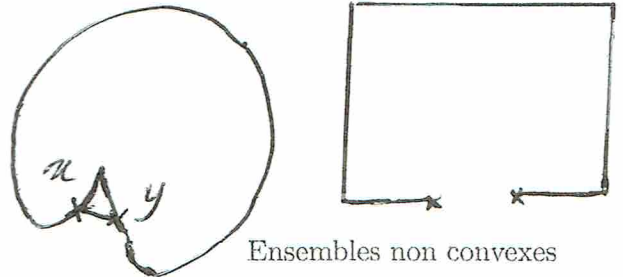
$$ty + (1-t)x \in E, \quad \forall x, y \in E \quad \text{et} \quad \forall t \in [0, 1].$$

Autrement dit si le segment de droite joignant deux points quelconques  $x, y \in E$  est entièrement inclus dans  $E$ .

Le schéma suivant illustre la notion d'ensemble convexe :



Ensemble convexe



Ensembles non convexes

**Remarque 1.2.1 :**

1. Par convention, l'ensemble vide est convexe.
2.  $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}$  est un convexe, appelé orthant positif. ( $x \geq 0$  c-à-d  $x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$ ).
3. Les demi-espaces fermés :  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid b^T x \leq \beta\}$  et  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid b^T x \geq \beta\}$ , où  $b \in \mathbb{R}^n$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ , sont des ensembles convexes non vides.
4. Les ensembles de la forme :  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ , où  $A$  est une matrice de  $\mathbb{R}^{m \times n}$  et  $b \in \mathbb{R}^m$  sont des convexes de  $\mathbb{R}^n$ , appelés polyèdres convexes.
5. L'ensemble :  $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid b^T x = \beta\}$ , où  $\beta \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}^n, b \neq 0$  est appelé hyperplan.  $H$  est un ensemble convexe.

**Proposition 1.2.1 :**

1. Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire. L'image directe  $f(A)$  ( resp l'image réciproque  $f^{-1}(A)$  ) d'un convexe  $A$  de  $E$  ( resp de  $F$  ) par  $f$  est un convexe.
2. Le translaté  $E + \alpha$ , ( $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ) d'un convexe  $E \subset \mathbb{R}^n$  est convexe.
3. La combinaison linéaire de deux convexes  $E_1$  et  $E_2$  de  $\mathbb{R}^n$  est convexe :

$$\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\}.$$

4. Soient  $E_1$  et  $E_2$  sous ensembles de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $E_1 \times E_2$  est convexe dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  si et seulement si  $E_1$  et  $E_2$  sont convexes.
5. Si  $\{A_i\}_{i \in I}$  est une famille quelconque de convexes de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\bigcap_{i \in I} A_i$  est un convexe. (Mais pas l'union).

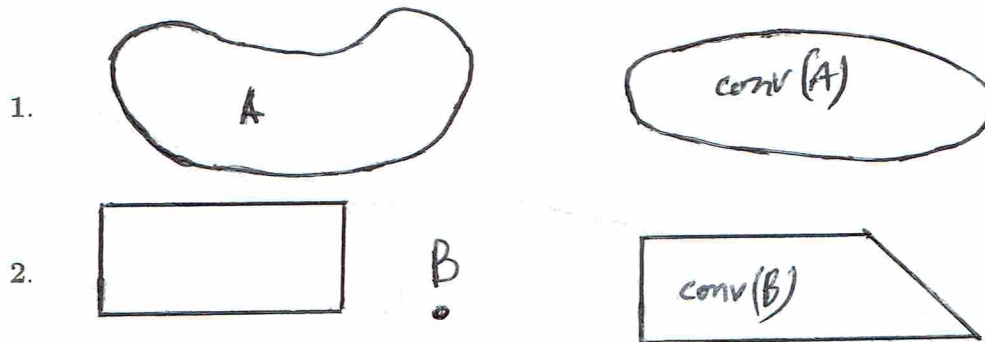
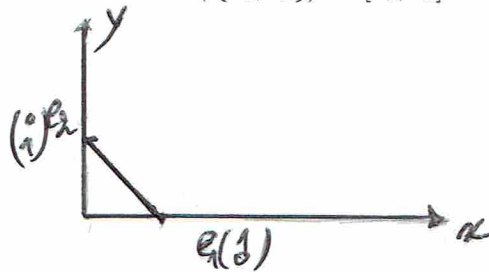
**1.2.2 Enveloppe convexe :**

**Définition 1.2.3 :** On appelle combinaison convexe de  $m$ -vecteurs :  $x_1, x_2, \dots, x_m$  de  $\mathbb{R}^n$  toute combinaison linéaire :  $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ , où  $\lambda_i \geq 0$  et  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ .

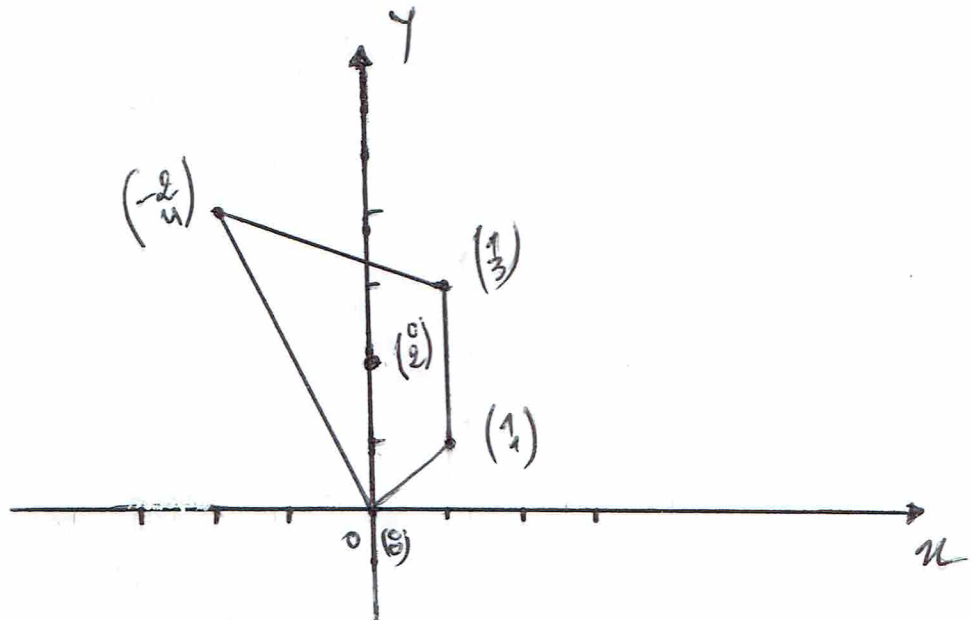
**Proposition 1.2.2 :** un sous-ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}^n$  est convexe si et seulement s'il contient toutes les combinaisons convexes de ses éléments.

**Définition 1.2.4 :** On appelle enveloppe convexe d'une partie  $E$  de  $\mathbb{R}^n$ , le plus petit convexe de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $E$ . C'est aussi l'intersection de tous les ensembles convexes de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $E$ , on la note  $\text{Conv}(E)$  ou  $\text{Co}(E)$ .

Exemple 5 :

3. Dans  $\mathbb{R}^2$  :  $\text{Conv}(\{e_1, e_2\}) = [e_1, e_2]$ .

4. Soit  $E = \text{Conv}\{(0, 0)^T, (1, 1)^T, (1, 3)^T, (-2, 4)^T, (0, 2)^T\}$ ,  
 alors on a :  $S_E = \{(0, 0)^T, (1, 1)^T, (1, 3)^T, (-2, 4)^T\}$  l'ensemble des sommets de  $E$ .  
 $E = \text{Conv}(S_E)$ .



### 1.3 Fonctions convexes :

**Définition 1.3.1** : *Considérons la fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .*

1.  *$f$  est dite convexe sur  $\mathbb{R}^n$  si :*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0, 1].$$

2.  *$f$  est dite strictement convexe sur  $\mathbb{R}^n$  si l'inégalité au dessus est stricte  $\forall x \neq y$  et  $t \in ]0, 1[$ .*
3.  *$f$  est dite fortement convexe sur  $\mathbb{R}^n$  s'il existe  $\alpha > 0$  tel que :  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in ]0, 1[$  :*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - \frac{\alpha}{2}t(1-t)\|x - y\|^2$$

**Exemple 6** :

1. *Les fonctions quadratiques convexes de  $\mathbb{R}^n$  sont celles qui sont associées à une matrice semi-définie positive.*
2. *Dans  $\mathbb{R}$  on a :*

$$f(x) = x^2, \quad f(x) = e^x, \quad f(x) = |x|$$

*sont des fonctions convexes.*

**Définition 1.3.2** :

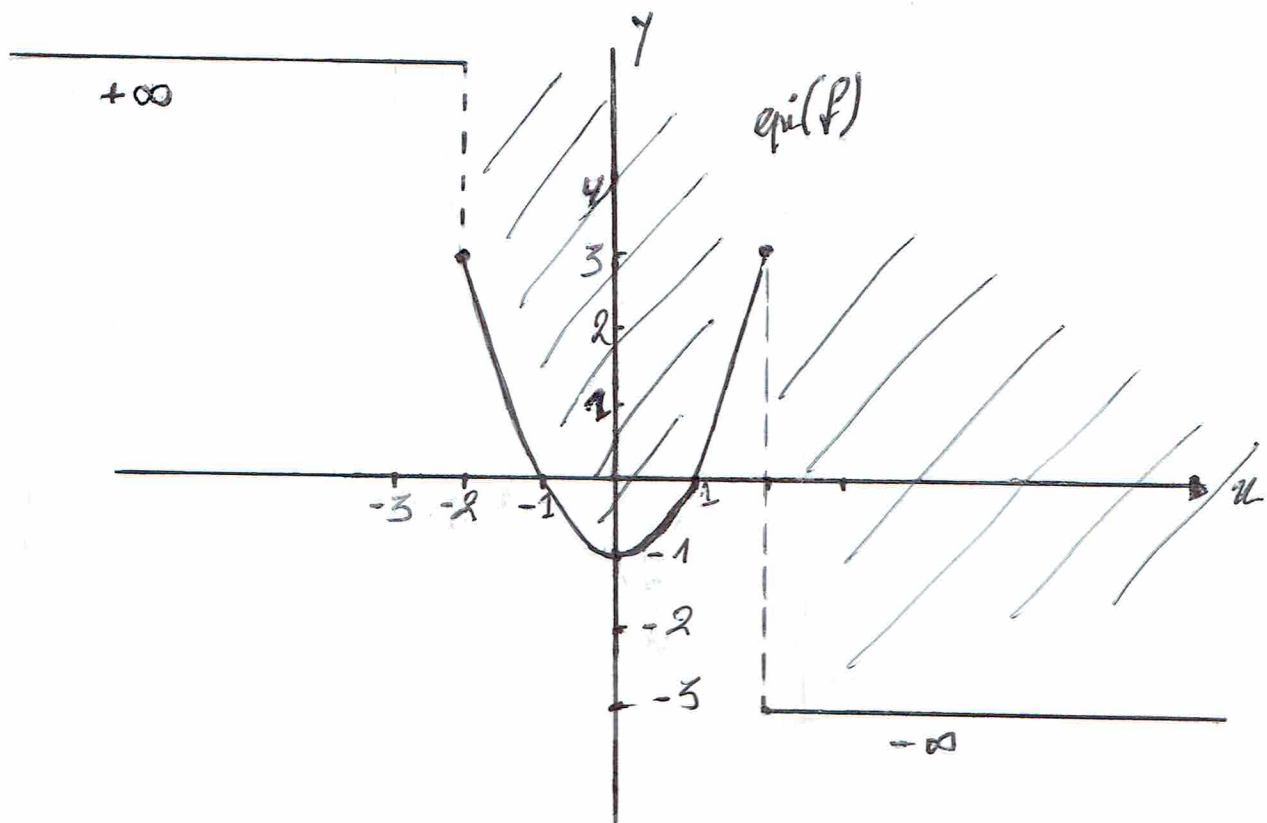
1. *L'ensemble :  $\text{epi}(f) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} / f(x) \leq t\}$  est appelé épigraphe de  $f$ .*
2. *L'ensemble :  $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) < +\infty\}$  est appelé domaine effectif de  $f$ .*

*Si  $\text{dom}(f) \neq \emptyset$  et  $f(x) > -\infty, \forall x \in \mathbb{R}^n$ , on dit que  $f$  est propre. ( en d'autres termes  $f$  est propre si  $f|_{\text{dom}(f)}$  est finie et  $\text{dom}(f) \neq \emptyset$  ). Dans le cas contraire  $f$  est dite impropre.*



Exemple 7 :

$$f(x) = \begin{cases} +\infty & , & x \leq -2 \\ x^2 - 1 & , & -2 < x < 2 \\ -\infty & , & x \geq 2 \end{cases}$$



$\text{dom}(f) = ]-2, +\infty[.$

Le domaine de définition de  $f$ ,  $D_f = ]-2, 2[.$

$f$  est impropre et non convexe.

**Définition 1.3.3** : Une fonction  $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  est dite convexe si son épigraphe est un sous-ensemble convexe de  $\mathfrak{R}^{n+1}$ .

**Définition 1.3.4** : Une fonction  $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  est dite concave si  $(-f)$  est une fonction convexe, c'est à dire si :

$$\forall x, y \in \mathfrak{R}^n, \forall t \in [0, 1] , f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y).$$

**Remarque 1.3.1** : Si  $f$  est une fonction affine :  $f(x) = Ax + b$ , alors  $f$  est à la fois convexe et concave.

**Proposition 1.3.1** : (Inégalité de Jensen) :  $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  est convexe alors on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^m t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^m t_i f(x_i) , \quad \forall m \in \mathbb{N} , \quad \forall t_i \geq 0 , \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^m t_i = 1 , \quad \forall x_i \in \mathfrak{R}^n.$$

**Preuve :**

Par récurrence sur  $m \geq 1$ .

– Pour  $m = 1$ , c'est évident, si  $m = 2$ ,  $t_1 + t_2 = 1 \implies t_2 = 1 - t_1$ , posons  $t_1 = t$  alors  $t_2 = 1 - t$  avec  $t \in [0, 1]$ , c'est la définition.

– Supposons que  $P(m)$  vraie. Soient  $x_1, x_2, \dots, x_{m+1} \in \mathfrak{R}^n$ , et  $t_1, t_2, \dots, t_{m+1} \in \mathfrak{R}^+$  avec  $\sum_{i=1}^{m+1} t_i = 1$ , montrons que :  $f\left(\sum_{i=1}^{m+1} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m+1} t_i f(x_i)$ .

– Si  $t_{m+1} = 1$ , alors  $t_1 = t_2 = \dots = t_m = 0$ , et la propriété est vraie.

– Si  $t_{m+1} \neq 1$ , posons  $\lambda = 1 - t_{m+1} > 0$ , et on a :

$$t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_{m+1} x_{m+1} = \lambda \sum_{i=1}^m \frac{t_i}{\lambda} x_i + (1 - \lambda) x_{m+1};$$

$$\text{posons } x = \sum_{i=1}^m \frac{t_i}{\lambda} x_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i , \quad \text{avec } \lambda_i = \frac{t_i}{\lambda};$$

on remarque que  $\lambda_i \geq 0$  et  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ ,

$$\begin{aligned} \text{d'où : } f\left(\sum_{i=1}^{m+1} t_i x_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^m t_i x_i + t_{m+1} x_{m+1}\right) \\ &= f(\lambda x + (1 - \lambda) x_{m+1}) \\ &\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(x_{m+1}) \\ &\leq \lambda \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i) + (1 - \lambda) f(x_{m+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{m+1} t_i f(x_i) , \quad \text{récurrence établie.} \end{aligned}$$

**Proposition 1.3.2** : Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions convexes sur  $\mathfrak{R}^n$  alors :

1.  $f + g$  est une fonction convexe sur  $\mathfrak{R}^n$ .
2.  $\lambda f$  est une fonction convexe, tel que  $\lambda \in \mathfrak{R}^+$ .
3. Soit  $(f_i)_{i \in I}$  une famille de fonctions convexes sur  $\mathfrak{R}^n$  telle que pour tout  $x \in \mathfrak{R}^n$ ,  $\sup_{i \in I} f_i(x) < +\infty$ . Alors la fonction  $g : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ , définie par :  $g(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$  est convexe sur  $\mathfrak{R}^n$ . (On appelle  $g$  l'enveloppe supérieure de la famille de fonctions  $(f_i)_{i \in I}$ ).

**Preuve :**

- 1) et 2) application directe de la définition.
- 3) Soient  $x, y \in \mathfrak{R}^n$ , et  $t \in [0, 1]$ , on a :

$$\begin{aligned} f_i(tx + (1-t)y) &\leq tf_i(x) + (1-t)f_i(y), \quad \forall i \in I \\ &\leq tg(x) + (1-t)g(y) \end{aligned}$$

on passe au sup sur  $I$  on obtient :

$$g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y)$$

d'où  $g$  est une fonction convexe sur  $\mathfrak{R}^n$ .

**Lemme 1.3.1** : Soit  $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ , alors  $f$  est convexe sur  $\mathfrak{R}^n$  si et seulement si,  $\forall x, d \in \mathfrak{R}^n$  la fonction d'une variable réelle  $\varphi_{x,d}(t) = f(x + td)$  est convexe sur  $\mathfrak{R}$ .

**Preuve :**

- 1) Supposons que  $f$  est convexe,  $\forall t_1, t_2 \in \mathfrak{R}$ ,  $\forall \lambda \in [0, 1]$ , on a :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) &= f(\lambda(x + t_1d) + (1-\lambda)(x + t_2d)) \\ &\leq \lambda f(x + t_1d) + (1-\lambda)f(x + t_2d) \\ &= \lambda\varphi(t_1) + (1-\lambda)\varphi(t_2) \end{aligned}$$

- 2) Réciproquement, supposons que  $\varphi_{x,d}$  est convexe, alors :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &\leq \lambda\varphi(1) + (1-\lambda)\varphi(0) \\ &= \lambda f(y) + (1-\lambda)f(x), \quad \forall x, d \in \mathfrak{R}^n, y = x + d, \forall \lambda \in [0, 1] \end{aligned}$$

**Remarque 1.3.2** : Le résultat du lemme précédent permet d'obtenir beaucoup de propriétés fondamentales des fonctions convexes à plusieurs variables, à partir de celles d'une variable.

**Proposition 1.3.3** : Soit  $\varphi : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ , alors nous avons :

1.  $\varphi$  est convexe sur un intervalle  $I \subset \mathfrak{R}$  si et seulement si pour tout  $t_0 \in I$ , la fonction  $g(t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}$  est croissante sur  $I - \{t_0\}$ .
2. Si  $\varphi$  est deux fois dérivable sur  $I$  alors,  $\varphi$  est convexe sur  $I$  si et seulement si  $\varphi''(t) \geq 0, \forall t \in I$ , et,  $\varphi$  est strictement convexe sur  $I$  si et seulement si  $\varphi''(t) > 0, \forall t \in I$ .

**Preuve :**

1. Supposons que  $\varphi$  convexe. Soient  $t_0 \in I, t_1, t_2 \in I - \{t_0\}$ , avec  $t_1 < t_2$ . Montrons l'inégalité :

$$\frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_0)}{t_1 - t_0} \leq \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_0)}{t_2 - t_0}$$

- Si  $t_0 < t_1$ , alors :  $\exists \lambda \in ]0, 1[$  tel que :  $t_1 = \lambda t_2 + (1 - \lambda)t_0$ , on a alors :

$$\begin{aligned} \varphi(t_1) &\leq \lambda \varphi(t_2) + (1 - \lambda)\varphi(t_0) \\ \implies \varphi(t_1) - \varphi(t_0) &\leq \lambda(\varphi(t_2) - \varphi(t_0)) \end{aligned}$$

d'un autre côté on a :  $t_1 - t_0 = \lambda(t_2 - t_0) > 0$

$$\text{d'où : } \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_0)}{t_1 - t_0} \leq \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_0)}{t_2 - t_0}.$$

- Le cas  $t_0 > t_2$  se traite d'une manière similaire.

- Si  $t_1 < t_0 < t_2$ , alors  $\exists \lambda \in ]0, 1[$  tel que :  $t_0 = \lambda t_2 + (1 - \lambda)t_1$ , et on a :

$$\begin{aligned} \varphi(t_0) &\leq \lambda \varphi(t_2) + (1 - \lambda)\varphi(t_1) \\ \implies (1 - \lambda)\varphi(t_0) &\leq \lambda(\varphi(t_2) - \varphi(t_0)) + (1 - \lambda)\varphi(t_1) \\ \implies -\lambda(\varphi(t_2) - \varphi(t_0)) &\leq (1 - \lambda)(\varphi(t_1) - \varphi(t_0)) \end{aligned}$$

d'un autre côté on a :  $-\lambda(t_2 - t_0) = (1 - \lambda)(t_1 - t_0) < 0$ ,

$$\text{d'où : } \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_0)}{t_1 - t_0} \leq \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_0)}{t_2 - t_0}.$$

La réciproque :

Soient  $t_1, t_2 \in I, \lambda \in ]0, 1[$ , supposons que  $t_1 < t_2$ . On note :  $t_\lambda = (1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2$ , alors d'après les hypothèses on a  $g(t_\lambda)$  croissante sur  $I - \{t_1\}$ ,

d'où :  $\frac{\varphi(t_\lambda) - \varphi(t_1)}{t_\lambda - t_1} \leq \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{t_2 - t_1} \implies \varphi(t_\lambda) \leq (1 - \lambda)\varphi(t_1) + \lambda\varphi(t_2) \implies \varphi$   
est convexe.

2. Résultat immédiat de (1).

### 1.3.1 convexité et différentiabilité :

**Proposition 1.3.4** : Soit  $f \in C^1(E)$ ,  $E$  est un convexe ouvert de  $\mathbb{R}^n$  (ou  $E = \mathbb{R}^n$ ).  
Alors :

$$(f \text{ convexe}) \iff (f(y) - f(x)) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle, \quad \forall x, y \in E$$

$f$  est strictement convexe si et seulement si l'inégalité est stricte.

**Preuve :**

1) Supposons que  $f$  est une fonction convexe,  $\forall x, y \in E$ , posons  $d = y - x$ , la dérivée directionnelle de  $f$  en  $x$  dans la direction  $d$  est :

$$\begin{aligned} d^T \nabla f(x) &= (y - x)^T \nabla f(x) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + td) - f(x)}{t} \\ &\leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t(f(y) - f(x))}{t} \\ &= f(y) - f(x). \end{aligned}$$

2) La réciproque : soient  $x, y \in E$ , considérons  $z = tx + (1 - t)y$ , ( il est clair que  $z \in E$  ), pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a :

$$\begin{aligned} f(x) - f(z) &\geq (x - z)^T \nabla f(z), \text{ et} \\ f(y) - f(z) &\geq (y - z)^T \nabla f(z) \end{aligned}$$

en sommant les deux inégalités on obtient :

$$tf(x) + (1 - t)f(y) - f(z) \geq 0$$

d'où  $f$  est convexe.

**Corollaire 1.3.1** : Soit  $f \in C^2(E)$ ,  $E$  est un convexe ouvert de  $\mathbb{R}^n$  (ou  $E = \mathbb{R}^n$ ).  
Alors :

1.  $f$  est convexe si et seulement si  $\nabla^2 f(x) = H(x)$  est une matrice semi-définie positive (S.D.P).
2.  $f$  est strictement convexe si  $\nabla^2 f(x) = H(x)$  est une matrice définie positive (D.P). La réciproque est fautive en général.

**Preuve :**

soient  $x, y \in E$ , le développement de Taylor pour  $f(y)$  au voisinage de  $x$ , au second ordre, en posant  $d = y - x$  s'écrit par définition :

$$f(y) = f(x) + d^T \nabla f(x) + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x + td) d$$

Si  $t \in ]0, 1]$ ,  $x + td \in E$  ( $E$  convexe). Supposons que  $d^T \nabla^2 f(x + td) d \geq 0$  ( $\nabla^2 f(x)$  est S.D.P).

Ainsi nous obtenons :  $f(y) \geq f(x) + d^T \nabla f(x) = f(x) + (y - x)^T \nabla f(x)$ .

D'où  $f$  est convexe.

La réciproque :

$$f(y) = f(x) + d^T \nabla f(x) + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x + td) d,$$

avec  $d = y - x$ ,  $\forall x, y \in E$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , on a :  $x + td \in E$ ,  $\forall x \in E$ , alors on a :

$$f(y) - f(x) \geq (y - x)^T \nabla f(x) = d^T \nabla f(x)$$

alors :

$$f(y) - f(x) - (y - x)^T \nabla f(x) \geq 0$$

d'où :

$$d^T \nabla^2 f(x + td) d \geq 0, \forall d \in \mathbb{R}^n$$

alors :  $\nabla^2 f(x + td)$  est semi-définie positive.

**Exemple 8 :** on considère la fonction suivante :

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^3$ , ( $\mathbb{R}^3$  est un ouvert et convexe),

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ 2y - x \\ 2z + x \end{pmatrix}$$

$$H_f(x, y, z) = \nabla^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calculons les valeurs propres de cette matrice, on a :

$$\det(H_f - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)((2 - \lambda)^2 - 2) = 0,$$

d'où :  $\lambda_1 = 2$  ,  $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$  ,  $\lambda_3 = 2 - \sqrt{2}$  ,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$  , alors  $f$  est strictement convexe.

### 1.3.2 Fonctions monotones :

**Définition 1.3.5** : Soient  $E \subset \mathbb{R}^n$ , convexe et une fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ .

1.  $f$  est dite monotone sur  $E$  si :

$$\forall x, y \in E , \quad \langle f(x) - f(y), x - y \rangle \geq 0$$

2.  $f$  est dite strictement monotone sur  $E$  si :

$$\forall x, y \in E , x \neq y , \quad \langle f(x) - f(y), x - y \rangle > 0.$$

**Théorème 1.3.1** : Si  $f$  est différentiable sur  $E$ , on a les equivalences suivantes :

1.  $f$  est convexe sur  $E \iff \nabla f$  est monotone sur  $E$ .
2.  $f$  est strictement convexe sur  $E \iff \nabla f$  est strictement monotone sur  $E$ .

**Preuve** : Supposons que  $f$  est convexe. Soient  $x, y \in E$  , alors :

$$\begin{aligned} f(y) &\geq f(x) + (y - x)^T \nabla f(x) \\ f(x) &\geq f(y) + (x - y)^T \nabla f(y) \end{aligned}$$

on passe à la somme, on obtient :

$$\begin{aligned} (y - x)^T \nabla f(x) + (x - y)^T \nabla f(y) &\leq 0 \\ \implies (y - x)^T \nabla f(y) - (y - x)^T \nabla f(x) &\geq 0 \end{aligned}$$

d'où  $\nabla f$  est monotone.

La réciproque :

Supposons que  $\nabla f$  est monotone.

Posons  $\varphi(t) = f(x + t(y - x))$ ,  $t \in [0, 1]$ , alors  $\varphi$  est dérivable sur  $[0, 1]$ , et pour tout  $t$  on a :

$$\varphi'(t) = (y - x)^T \nabla f(x + t(y - x)) = (y - x)^T \nabla f(x_t),$$

donc

$$\varphi'(0) = (y - x)^T \nabla f(x).$$

D'un autre côté on a :

$$\begin{aligned} \varphi'(t) - \varphi'(0) &= \frac{1}{t} \langle \nabla f(x_t) - \nabla f(x), x_t - x \rangle \geq 0 \\ &\implies \varphi'(t) \geq \varphi'(0) \\ &\implies \int_0^1 \varphi'(t) dt \geq \varphi'(0) \end{aligned}$$

d'où :

$$f(y) - f(x) \geq \varphi'(0)$$

alors  $f$  est convexe.

**Définition 1.3.6** : Une fonction  $f$  de  $\mathfrak{R}^n$  dans  $\mathfrak{R}$  est dite positivement homogène (de degré 1) si :

$$\forall x : f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \forall \lambda \in [0, +\infty[$$

**Exemple 9** ;  $f(x) = \|x\|$  est une fonction convexe.

**Lemme 1.3.2** : Soit  $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  positivement homogène, alors :

$$f \text{ est convexe} \iff f(x + y) \leq f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathfrak{R}^n$$

**Preuve** : Supposons que  $f$  est convexe, alors :

$$f(x, y) = f\left(2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)\right) = 2f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leq f(x) + f(y).$$

Réciproquement : supposons que  $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ ,  $\forall x, y \in \mathfrak{R}^n$ , alors  $\forall t \in [0, 1]$ ,  $\forall x, y \in \mathfrak{R}^n$ , on a :

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(tx) + f((1-t)y) = tf(x) + (1-t)f(y)$$

d'où  $f$  est convexe.



### 1.3.3 Exercices :

**Exercice 1 :**

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  fonction définie par :

$$f(x) = x^T Q x + b^T x;$$

où  $Q$  est une matrice carrée réelle symétrique d'ordre  $n$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ . Déterminer si  $f$  est G-différentiable. Calculer le gradient de  $f$ .

**Exercice 2 :**

Vérifier si les ensembles suivants sont convexes :

1-  $E = \{x \in \mathbb{R}^n / A_1 x = b_1, \text{ et, } A_2 x \leq b_2\}$ . où  $A_1, A_2$  sont deux matrices de  $\mathbb{R}^{m \times n}$ , et  $b_1, b_2$  sont deux vecteurs de  $\mathbb{R}^m$ .

2-  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y - x^2 \geq 0\}$ .

3-  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy \geq 1 \text{ et } x > 0\}$ .

**Exercice 3 :**

Vérifier si les fonctions suivantes sont convexes ou autres sur  $\mathbb{R}^2$  :

1-  $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 - 2x + e^{x+y}$ .

2-  $f(x, y) = (x - 2)^4 + (x - 2)^2 y^2 + (y + 1)^2$ .

3-  $f(x, y) = -x^2 - 2xy - 2y^2$ .

### 1.3.4 Corrections :

**Exercice 1 :**

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + td) - f(x)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\langle Q(x + td), x + td \rangle + \langle x + td, b \rangle - \langle Qx, x \rangle - \langle x, b \rangle}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\langle Q(x + td), x + td \rangle + \langle x + td, b \rangle - \langle Qx, x \rangle - \langle x, b \rangle}{t} \\ &= \langle 2Qx + b, d \rangle, \quad \forall d \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

par conséquent est G-différentiable.

On a :  $\langle 2Qx + b, d \rangle = \langle \nabla f(x), d \rangle$ , alors  $\nabla f(x) = 2Qx + b$ .

**Exercice 2 :**

1)  $\forall x, y \in E, \forall t \in [0, 1]$ , on a :

$$\begin{aligned} A_1(tx + (1 - t)y) &= tA_1x + (1 - t)A_1y = b_1, \text{ et} \\ A_2(tx + (1 - t)y) &\leq tA_2x + (1 - t)A_2y = b_2, \end{aligned}$$

d'où  $tx + (1 - t)y \in E \implies E$  est un ensemble convexe.

2)  $\forall z_1, z_2 \in E, \forall t \in [0, 1]$ , on a :

$$tz_1 + (1-t)z_2 = (tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2)$$

comme  $y_1 - x_1^2 \geq 0$ , et,  $y_2 - x_2^2 \geq 0$ , alors  $y_1, y_2 \geq 0$ , d'un autre côté on a :

$$ty_1 + (1-t)y_2 - t^2x_1^2 - (1-t)^2x_2^2 - 2t(1-t)x_1x_2 \geq t(1-t)(x_1 - x_2)^2 \geq 0.$$

Par conséquent  $E$  est un ensemble convexe.

3)  $\forall z_1, z_2 \in E, \forall t \in [0, 1]$ , on a :

$$tz_1 + (1-t)z_2 = (tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2)$$

comme  $x_1, x_2 > 0$ , alors  $tx_1 + (1-t)x_2 > 0$ , d'un autre côté on a :

$$\begin{aligned} (tx_1 + (1-t)x_2)(ty_1 + (1-t)y_2) &= t^2x_1y_1 + t(1-t)x_1y_2 + t(1-t)x_2y_1 + (1-t)^2x_2y_2 \\ &> t^2 + (1-t)^2 + t(1-t)\left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) \geq 1 \end{aligned}$$

d'où  $tz_1 + (1-t)z_2 \in E$ , par conséquent  $E$  est un ensemble convexe.

**Exercice 3 :**

$$1- \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - y + e^{x+y} - 2 \\ -x + xy + e^{x+y} \end{pmatrix}, \text{ et, } \nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} + 2 & e^{x+y} - 1 \\ -1 + e^{x+y} & 4 + e^{x+y} \end{pmatrix},$$

$\Delta_1 = e^{x+y} + 2 > 0$ ,  $\Delta_2 = 8e^{x+y} + 7 > 0$ , ce qui implique que  $f$  est strictement convexe.

$$2- \nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 12(x-2)^2 + 2y^2 & 4y(x-2) \\ 4y(x-2) & 2(x-2)^2 + 2 \end{pmatrix}, \text{ on a :}$$

$$\Delta_1 = 12(x-2)^2 + 2y^2 \geq 0, \text{ et, } \Delta_2 = 24(x-2)^4 + (x-2)^2(24 - 12y^2) + 4y^2,$$

pour  $x = 0$  et  $y = 5$ ,  $\Delta_2 < 0$ ,

pour  $x = y = 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ , d'où  $f$  ni convexe ni concave.

$$3- \nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \text{ d'où } f \text{ est strictement concave.}$$



# Chapitre 2

## Optimisation sans contraintes

### 2.1 Définitions et notations :

**Définition 2.1.1** : ( Définition d'un problème d'optimisation ) : Soit  $D \subset \mathbb{R}^n$  et  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Un problème d'optimisation consiste à chercher un élément  $x^* \in D$  ( s'il existe ) pour lequel  $f(x^*)$  est la plus petite ( resp la plus grande ) valeur de  $f$  sur  $D$  et on écrit :  $\min_{x \in D} f(x) = f(x^*)$ , ( resp  $\max_{x \in D} f(x) = f(x^*)$  ).

$D$  est appelé ensemble des contraintes ( ou des solutions admissibles, ou réalisables ), dit aussi domaine de faisabilité.

La fonction  $f$  est appelée fonction coût, objectif ou économique.

Considérons le problème d'optimisation suivant :

$$(P) : \begin{cases} \min f(x) \\ x \in D \end{cases}$$

**Remarque 2.1.1** :

1. Si  $D = \mathbb{R}^n$ , on dit que  $(P)$  est un problème sans contraintes.
2. Un problème de maximisation se ramène à un problème de minimisation par la relation :  $\max f(x) = -\min(-f(x))$
3. L'ensemble  $D$  est donné souvent comme suit :

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n / f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, \text{ et, } g_j(x) = 0, j = 1, \dots, p\}$$

$(P)$  est appelé dans ce cas un programme mathématique.

**Notation 1 :**

1. Le problème  $(P)$  est dit réalisable si :  $D \neq \emptyset$ , un point  $x \in D$  est appelé solution réalisable de  $(P)$ .
2. Une solution réalisable qui minimise ( resp maximise )  $f$  sur  $D$  est appelée solution optimale.
3. La valeur de l'objectif au point  $x^*$  est appelée valeur optimale, c'est la valeur minimale ou la borne inférieure ( resp la valeur maximale ou la borne supérieure ) de  $f$  sur  $D$ .

**2.1.1 Classification des problèmes d'optimisation :**

Les problèmes d'optimisation sont classifiés selon les caractéristiques des fonctions  $f$ ,  $f_i$ , et  $g_j$ .

1. Si  $f$  et  $f_i$  sont convexes et  $g_j$  sont affines, on dit qu'il s'agit d'un programme convexe ( dans ce cas l'ensemble  $D$  est convexe ).
2. Si les fonctions  $f$ ,  $f_i$  et  $g_j$  sont toutes différentiables, on parle de programmation mathématique différentiable.

**Définition 2.1.2 :** (Minimum local/Maximum global)

1. Un point  $x^* \in D$  est un minimum local ( resp maximum local ) de  $f$  s'il existe une boule ouverte  $B$  centrée en  $x^*$  telle que :

$$\forall x \in B \cap D, f(x^*) \leq f(x), \quad (\text{ resp } f(x^*) \geq f(x) ).$$

2. Un point  $x^* \in D$  est un minimum global ( resp maximum global ) de  $f$  si :

$$\forall x \in D, f(x^*) \leq f(x), \quad (\text{ resp } f(x^*) \geq f(x) ).$$

**2.2 Optimisation sans contraintes :**

Avant d'étudier la solution (ou les solutions) d'un problème d'optimisation avec ou sans contrainte, il faut s'assurer de leur existence.

Considérons le problème d'optimisation sans contraintes suivant :

$$(P) : \begin{cases} \min f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

### 2.2.1 Résultats d'existence et d'unicité de la solution :

**Définition 2.2.1** : Une fonction  $f : \mathfrak{R}^n \longrightarrow \mathfrak{R}$  est dite coercive si et seulement si :

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

( c-à -d :  $\forall A \in \mathfrak{R}_+^* \exists N > 0 / \forall x \in \mathfrak{R}^n , \|x\| \geq N \implies f(x) \geq A$ ).

Pour montrer que  $f$  est coercive on utilise souvent la proposition suivante :

**Proposition 2.2.1** : Soit  $f : \mathfrak{R}^n \longrightarrow \mathfrak{R}$  une fonction et  $g : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$  vérifiant :

$$f(x) \geq g(\|x\|) \text{ avec } \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = +\infty.$$

Alors  $f$  est coercive.

**Théorème 2.2.1** : (Existence) Soit  $f : \mathfrak{R}^n \longrightarrow \mathfrak{R}$  une fonction propre, continue, et, coercive, alors il existe un point  $x^* \in \mathfrak{R}^n$  qui réalise le minimum de  $f$  sur  $\mathfrak{R}^n$ .

Autrement dit  $\exists x^* \in \mathfrak{R}^n$  tel que :

$$f(x^*) \leq f(x) , \forall x \in \mathfrak{R}^n$$

**Preuve :**

Soit :  $m = \inf_{x \in \mathfrak{R}^n} (f(x)) < +\infty$  , soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite minimisante, c -à- d

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = m < +\infty. \quad (1)$$

Supposons que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas bornée, donc il existe une sous suite  $(x_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_{\psi(n)}\| = +\infty$ .

Par coercivité de  $f$  , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\psi(n)}) = +\infty$  , contradiction avec (1). Alors la suite  $(x_n)_n$  est bornée, et dans ce cas il existe une suite extraite de  $(x_n)_n$  , soit  $(x_{\varphi(n)})_n$  qui converge vers  $x^* \in \mathfrak{R}^n$ . En utilisant la continuité de  $f$  on a :  $f(x^*) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = m$ . On en déduit alors que  $x^*$  solution de (P) et  $m > -\infty$ .

**Théorème 2.2.2** : (Unicité) Soit  $f : \mathfrak{R}^n \longrightarrow \mathfrak{R}$  une fonction strictement convexe, alors il existe au plus  $x^* \in \mathfrak{R}^n$  tel que :  $f(x^*) = \min_{x \in \mathfrak{R}^n} f(x)$ .

**Preuve :**

Soit  $f$  strictement convexe, supposons qu'il existe  $x_1^*, x_2^* \in \mathbb{R}^n$  tels que  $f(x_1^*) = f(x_2^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ . Supposons que  $x_1^* \neq x_2^*$ , et comme  $f$  est strictement convexe, on a :

$$f\left(\frac{1}{2}x_1^* + \frac{1}{2}x_2^*\right) < \frac{1}{2}f(x_1^*) + \frac{1}{2}f(x_2^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

ce qui est impossible, donc  $x_1^* = x_2^*$ .

**Théorème 2.2.3 :** (Existence et unicité) Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , vérifiant :

1.  $f$  continue ;
2.  $f$  coercive ;
3.  $f$  est strictement convexe.

Alors il existe un unique  $x^* \in \mathbb{R}^n$ , tel que  $f(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ .

**Théorème 2.2.4 :** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction de classe  $C^1$ . Supposons qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2$$

Alors  $f$  est strictement convexe et coercive, en particulier le problème (P) admet une solution unique.

## 2.2.2 Conditions d'optimalité :

**Conditions nécessaires :**

**Théorème 2.2.5 :** Soit  $x^*$  un minimum local de  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$ , tel que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable, alors on a :

1.  $\nabla f(x^*) = 0$ . (Condition nécessaire d'optimalité du premier ordre).
2.  $\nabla^2 f(x^*)$  est une matrice semi-définie positive. (Condition nécessaire d'optimalité du second ordre).

**Preuve :**

1.  $\forall t \in \mathbb{R}^*$  et  $\forall d \in \mathbb{R}^n$  on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x^* + td) - f(x^*)}{t} = d^T \nabla f(x^*) \geq 0,$$

et

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x^* + td) - f(x^*)}{t} = d^T \nabla f(x^*) \leq 0,$$

d'où :  $d^T \nabla f(x^*) = 0$ ,  $\forall d \in \mathbb{R}^n$ , alors  $\nabla f(x^*) = 0$ .

2. Soit  $d$  une direction arbitraire et  $t > 0$ , le développement de Taylor du second ordre au voisinage de  $x^*$  est donné par :

$$\begin{aligned} f(x^* + td) &= f(x^*) + td^T \nabla f(x^*) + \frac{1}{2} t^2 d^T \nabla^2 f(x^*) d + o(\|td\|^2) \\ \implies f(x^* + td) - f(x^*) &= \frac{1}{2} t^2 d^T \nabla^2 f(x^*) d + o(\|td\|^2) \geq 0, \end{aligned}$$

en divisant par  $t^2$  on obtient :

$$\frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x^*) d + \frac{o(\|td\|^2)}{t^2} \geq 0$$

d'après la notation de Landeau :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(\|td\|^2)}{t^2} = 0$$

alors :  $d^T \nabla^2 f(x^*) d \geq 0$ .

**Remarque 2.2.1** : Un minimum local d'une fonction différentiable est un point stationnaire. La réciproque est fausse.

**Conditions suffisantes :**

**Théorème 2.2.6** : Soient  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ , et  $x^* \in \mathbb{R}^n$  tels que :

1.  $\nabla f(x^*) = 0$ ;
2.  $\nabla^2 f(x^*)$  est définie positive;

alors  $x^*$  est un minimum local de  $f$ .

**Preuve :**

Soit  $d$  une direction arbitraire, on a :

$$\begin{aligned} f(x^* + td) &= f(x^*) + td^T \nabla f(x^*) + \frac{1}{2} t^2 d^T \nabla^2 f(x^*) d + o(\|td\|^2) \\ \implies f(x^* + td) - f(x^*) &= t^2 \left( \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x^*) d + o\left(\frac{\|td\|^2}{t^2}\right) \right), \end{aligned}$$

pour  $t$  suffisamment petit on aura :

$$f(x^* + td) \geq f(x^*) \implies x^* \text{ est un minimum local de } f.$$



**Conditions nécessaires et suffisantes :**

**Théorème 2.2.7** :  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction convexe et différentiable, alors une condition nécessaire et suffisante pour que  $x^* \in \mathbb{R}^n$  soit un minimum global de  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$  est que :

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

**Preuve :**

$f$  est convexe alors on a :

$$\begin{cases} f(x) \geq f(x^*) + (x - x^*)^T \nabla f(x^*) \\ \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

–  $x^*$  est un minimum global de  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$ , d'où :

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x^*), \forall x \in \mathbb{R}^n, \\ \implies (x - x^*)^T \nabla f(x^*) &= 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \\ \implies \nabla f(x^*) &= 0. \end{aligned}$$

–  $\nabla f(x^*) = 0 \implies f(x) \geq f(x^*), \forall x \in \mathbb{R}^n$ , alors  $x^*$  est un minimum global de  $f$ .

**Exemple 10** : Trouver analytiquement les extrema de la fonction :

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$$

et déterminer s'il s'agit de minimum ou autres.

**Solution :**

On a :

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \begin{pmatrix} 3x^2 + 3y \\ 3y^2 + 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \implies &\begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{ou} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{pmatrix}$$

alors

$$\nabla^2 f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\left\langle \nabla^2 f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = 6xy$$

donc  $\nabla^2 f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  n'est pas définie  $\implies \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  n'est pas extrémal.

$$\nabla^2 f \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix},$$

ses valeurs propres sont les racines de :

$$\lambda^2 + 12\lambda + 27 = 0 \implies \lambda_1 = -9, \text{ et } \lambda_2 = -3,$$

$\lambda_1, \lambda_2 < 0 \implies \nabla^2 f \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  est définie négative, dans ce cas le point  $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  est un maximum local pour  $f$  et on a  $f \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1$ .

### 2.2.3 Exercices :

#### Exercice 1 :

Pour chacune des fonctions suivantes :

1-  $f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1 - 10x_3 - 2x_1x_3$  .

2-  $f_2(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 - 12x_2 + 20$  .

3-  $f_3(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - 2(x_1 - x_2)^2$  .

a) Etudier l'existence de points extrémaux.

b) En utilisant une condition d'optimalité du premier ordre déterminer les points critiques.

c) Préciser à chaque fois leur nature (minimum ou maximum ? local ou global ?).

#### Exercice 2 :

$f$  est une fonction définie sur  $\mathfrak{R}^2$  par :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

1- Montrer qu'il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}^2$  et les déterminer tels que :

$$f(x, y) \geq \alpha \|(x, y)\|_2^2 + \beta, \quad \forall (x, y) \in \mathfrak{R}^2.$$

En déduire que le problème :

$$\min_{(x, y) \in \mathfrak{R}^2} f(x, y)$$

admet au moins une solution.

2- La fonction  $f$  est-elle convexe sur  $\mathfrak{R}^2$  ?

3- Déterminer les points critiques de  $f$ , et préciser leur nature.

**Exercice 3 :**

Soit  $Q$ , une matrice de  $M_n(\mathfrak{R})$  symétrique et définie positive. Soit  $b$ , un vecteur de  $\mathfrak{R}^n$ .

1) Démontrer qu'il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout vecteur  $x$  de  $\mathfrak{R}^n$ ,  $\langle Qx, x \rangle \geq \delta \|x\|^2$ .

2) Soit  $f$ , la fonction définie sur  $\mathfrak{R}^n$  par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Qx, x \rangle - \langle b, x \rangle;$$

pour  $x \in \mathfrak{R}^n$ .

(a) Démontrer que  $f$  est coercive.

(b) Démontrer que le problème :

$$(P) \begin{cases} \min f(x) \\ x \in \mathfrak{R}^n \end{cases}$$

possède une solution unique que l'on déterminera complètement.

## 2.2.4 Corrections :

**Exercice 1 :**

1- a)

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3) &= 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1 - 10x_3 - 2x_1x_3 \\ &\geq 2\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(x_3 - \frac{5}{2}\right)^2 + 3x_2^2 - 13 \end{aligned}$$

il est clair que  $\lim_{\|(x_1, x_2, x_3)\| \rightarrow +\infty} f_1(x_1, x_2, x_3) = +\infty$ , d'où  $f$  est une fonction coercive, par conséquent  $f$  admet au moins un minimum global.

$$\mathbf{b)} \nabla f_1(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 6x_1 - 2x_3 - 2 \\ 6x_2 \\ 6x_3 - 2x_1 - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ on obtient le point critique :}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{c)} \nabla^2 f_1(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \text{ est une matrice définie positive ses valeurs}$$

propres sont  $\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda_2 = 6$ ,  $\lambda_3 = 8 > 0$ , le point critique est un minimum global.

**2- a)**  $f_2(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1 - 12x_2 + 20$ , on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x, 0) = +\infty, \quad \text{et,} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x, 0) = -\infty$$

d'où  $f$  n'est pas coercive. ( s'il existe un minimum, il ne sera pas global ).

$$\mathbf{b)} \nabla f_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - 3 \\ 3x_2^2 - 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ on obtient les points critiques suivants :}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{c)} \nabla^2 f_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 6x_1 & 0 \\ 0 & 6x_2 \end{pmatrix}, \text{ alors :}$$

$\nabla^2 f_2(1, 2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$  est une matrice définie positive, donc le point  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  est un minimiseur de  $f$ .

$\nabla^2 f_2(1, -2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$  est une matrice indéfinie, le point  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  est un point selle.

$\nabla^2 f_2(-1, 2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$  est une matrice indéfinie, le point  $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  est un

point selle.

$\nabla^2 f_2(-1, -2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$  est une matrice définie négative, donc le point  $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$  est un maximiseur de  $f$ .

**3- a)**  $f_3(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - 2(x_1 - x_2)^2$ , en utilisant l'égalité :  $2(x^2 + y^2) - (x + y)^2 = (x - y)^2$  on obtient :

$$x_1^4 + x_2^4 \geq \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)^2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$-(x_1 - x_2)^2 \geq -2(x_1^2 + x_2^2) \quad \dots\dots\dots (2)$$

De (1) et (2) on a :

$$x_1^4 + x_2^4 - 2(x_1 - x_2)^2 \geq \frac{1}{2} \left[ (x_1^2 + x_2^2 - 4)^2 - 16 \right] \xrightarrow{\|(x_1, x_2)\| \rightarrow +\infty} +\infty$$

d'où  $f$  est une fonction coercive, par conséquent  $f$  admet au moins un minimiseur global.

b) Les points critiques sont :  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ , et,  $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ .

c)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  est un point selle, mais les points  $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$  sont des minima

globaux, et on a :  $f \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = -8$

**Exercice 2 :**

1)

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy \\ &\geq x^4 + y^4 - 4x^2 - 4y^2 \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon \in \mathfrak{R}$ , on a :  $(x^2 - \varepsilon^2)^2 \geq 0 \implies x^4 + \varepsilon^4 \geq 2x^2\varepsilon^2$ , d'où :

$$\begin{aligned} f(x, y) &\geq (2\varepsilon^2 - 4)(x^2 + y^2) - 2\varepsilon^4 \\ &= \alpha \|(x, y)\| + \beta, \end{aligned}$$

avec  $\alpha = 2\varepsilon^2 - 4$ , et,  $\beta = -2\varepsilon^4$ , et on a :  $\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} (2\varepsilon^2 - 4)(x^2 + y^2) - 2\varepsilon^4 = +\infty$ , par conséquent  $f$  est coercive, en déduire que le problème de minimisation admet au moins une solution.

2) On a :  $\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$ , calculons les valeurs propres de la matrice hessienne, on obtient :  $\lambda_1 = 0$ , et  $\lambda_2 = -2 < 0$ , d'où  $f$  n'est pas convexe.

3) Calculons le gradient de  $f$ , alors :  $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4(x - y) \\ 4y^3 + 4(x - y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , on obtient les points critiques suivants :  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ . En testant

chaque point on trouve :  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  est un point selle, et les points  $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$  sont des points minimiseurs de  $f$ .

**Exercice 3 :**

a) On a  $Q$  symétrique et définie positive, alors  $\forall \lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , valeur propre de  $Q$ ,  $\lambda_i \in \mathfrak{R}_+^*$ , on a :

$$\langle Qx, x \rangle \geq \lambda_{\min} \langle x, x \rangle = \lambda_{\min} \|x\|^2, \forall x \in \mathfrak{R}^n$$

On a :

$$\langle b, x \rangle \leq \|b\| \|x\|$$

d'où :  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b)  $f$  coercive donc le problème  $(P)$  admet une solution.

$f$  est différentiable,  $\nabla f(x) = Qx - b$ .

$\nabla^2 f(x) = Q$ , définie positive, d'où  $f$  est strictement convexe, ce qui assure l'unicité de la solution.

Résolution du problème :  $x = Q^{-1}b$ .



# Chapitre 3

## Algorithmes

Nous nous intéressons aux algorithmes de calcul de minimum et plus particulièrement aux algorithmes de descente. Les méthodes de descente sont des méthodes itératives, partant d'un point  $x_0$  arbitrairement choisi, on construit itérativement une suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que :

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k), \quad \forall k$$

qui sous certaines hypothèses converge vers le minimum  $x^*$  de  $(P)$ .

Commençons par définir plus précisément la notion de descente.

### 3.1 Direction de descente :

**Définition 3.1.1** : Soient  $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  et  $x \in \mathfrak{R}^n$ . Le vecteur  $d \in \mathfrak{R}^n$  est une direction de descente pour  $f$  en  $x$  s'il existe  $\eta > 0$  tel que  $\forall \alpha \in ]0, \eta]$ ,  $f(x + \alpha d) < f(x)$ .

- $d$  : est la direction de descente.
- $\alpha$  : est le pas de déplacement. Il est, soit fixé, éventuellement le même pour toutes les étapes, soit calculé à chaque étape de façon à minimiser  $f$  dans la direction  $d$ .

**Définition 3.1.2** : Tout vecteur  $d_k \in \mathfrak{R}^n$  satisfait la condition  $d_k^T \nabla f(x_k) < 0$  est appelé direction de descente.

**Remarque 3.1.1** : S'il n'est pas possible de trouver un vecteur  $d_k$  tel que  $d_k^T \nabla f(x_k) < 0$ , c'est que  $d_k^T \nabla f(x_k) = 0, \forall d \in \mathfrak{R}^n$ , et alors  $x_k$  sera en général la solution cherchée.



## 3.2 Méthodes générales de descente :

### 3.2.1 Principe de la méthode :

Le passage de  $x_k$  à  $x_{k+1}$  s'effectue en deux étapes :

1- Au point  $x_k$ , on choisit une direction de déplacement  $d_k$ .

2- On détermine  $\alpha_k > 0$ , tel que :  $f(x_k + \alpha_k d_k) < f(x_k)$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$

Alors le principe d'une méthode de descente consiste à faire les itérations suivantes :

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$$

### 3.2.2 Tests de convergence (Tests d'arrêt) :

Soit  $x^*$  un minimum local de l'objectif  $f$  à optimiser. En pratique, un test d'arrêt devra être choisi pour garantir que l'algorithme s'arrête toujours après un nombre fini d'itérations, et que le dernier point calculé soit suffisamment proche de  $x^*$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ , la précision demandée. Plusieurs critères sont à notre disposition : tout d'abord (et c'est le plus naturel), un critère d'optimalité basé sur les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre, on teste si :

$$\|\nabla f(x_k)\| < \varepsilon,$$

auquel cas l'algorithme s'arrête et fournit l'itéré courant  $x_k$  comme solution.

En pratique, le test d'optimalité n'est pas toujours satisfait et on devra faire appel à d'autres critères (fondés sur l'expérience du numérique) :

1- Stagnation de la solution :

$$\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon.$$

2- Stagnation de la valeur courante :

$$\|f(x_{k+1}) - f(x_k)\| < \varepsilon.$$

3- Nombre d'itérations dépassant un seuil fixé à l'avance :

$$k < iterMax.$$

### 3.2.3 Convergence d'un algorithme de descente :

Etudier la convergence d'un algorithme, c'est étudier la convergence de la suite des itérés générés par l'algorithme. Un algorithme est dit globalement convergent si la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , qu'il génère converge vers un point satisfaisant une condition nécessaire d'optimalité, et cela quelque soit le point de départ  $x_0$  choisi.

#### Remarque 3.2.1 :

1. La condition de descente  $f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$  n'est pas suffisante pour assurer la convergence de la suite  $(x_k)_k$  vers l'optimum de  $f(x)$ .
2. Si  $f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$  et  $f(x)$  bornée inférieurement alors la suite  $(f(x_k))_k$  converge. Cependant, il n'est y a aucune garantie pour que :  $\lim_k f(x_k) = f(x^*)$ .

**Exemple 11** :  $f(x) = x^2$ ,  $x \in \mathfrak{R}$ , avec  $x_k = (-1)^k(\frac{1}{2} + 2^{-k})$ .

### 3.2.4 Convergence asymptotique ( Vitesse de convergence) :

On suppose que la suite  $(x_k)_k$  converge vers  $x^*$ . L'objet de cette partie concerne l'étude du comportement de la suite  $(x_k)_k$  au voisinage de  $x^*$ , afin de pouvoir attribuer à chaque algorithme un indice d'efficacité appelé **vitesse de convergence**.

La technique la plus utilisée dans ce contexte consiste à comparer  $\|x_{k+1} - x^*\|$  à  $\|x_k - x^*\|$ .

**Définition 3.2.1** : L'ordre de convergence d'une suite  $(x_k)_k$  vers sa limite  $x^*$  est le plus grand réel positif ( $r > 0$ ) tel que :

$$0 \leq \delta = \lim_k \frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|^r} < +\infty \quad , \quad \delta = cst$$

1. Si  $r = 1$ , on dit que la convergence est linéaire, la méthode correspondante est dite d'ordre 1, ( ou du premier ordre ).
2. Si  $r = 1$ , et,  $\delta = 0$ , la convergence est dite superlinéaire.
3. Si  $r = 1$ , et,  $\delta = 1$ , la convergence est dite sous-linéaire. (C'est le cas le plus mauvais en pratique ).
4. Si  $r = 2$ , la convergence est quadratique, la méthode est du second ordre.

**Exemple 12** : Soit :  $x_k = c^{2^k}$ ,  $0 \leq c < 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

### 3.2.5 Algorithme général de descente :

Soit  $x_k$  l'approximation de  $x^*$  à l'itération  $k$ .

**Pas 1 :** (Test d'optimalité) ;

Si les conditions d'optimalité sont satisfaites, l'algorithme s'arrête avec  $x_k$  comme solution ;

**Pas 2 :** ( Calcul d'une direction de descente ) ;

On détermine un vecteurs  $d_k \neq 0$ , tel que :  $d_k^T \nabla f(x_k) < 0$  ;

**pas 3 :** ( Calcul du pas de déplacement ) ;

On cherche un réel ,  $\alpha_k > 0$ , tel que :  $f(x_k + \alpha_k d_k) < f(x_k)$  ;

**Pas 4 :** ( Ajustement de l'approximation ) ;

$x_{k+1} \leftarrow x_k + \alpha_k d_k$  ;

$k = k + 1$  ; Retour au pas 1 ;

**Fin.**

## 3.3 Méthode du gradient :

L'idée de cette méthode, qui remonte à Cauchy (1847), est très naturelle, mais pas toujours efficace. elle consiste à remarquer qu'en tout point de  $\mathfrak{R}^n$ , c'est la direction opposée à celle du gradient qui correspond localement à la décroissance la plus forte de  $f$ .

### 3.3.1 Algorithme général :

**Données :**  $f$  une fonction différentiable ;  
 choisir un point initial  $x^0$  ;  
 $\varepsilon$  paramètre de précision ;  
 $k = 0$  ;  
**Tant que :**  $\|\nabla f(x_k)\| > \varepsilon$  ;  
**Calculer :**  $d_k = -\nabla f(x_k)$  ;  
**Recherche linéaire :** trouver un pas  $\alpha_k$  tel que :  
 $f(x_k + \alpha_k d_k) < f(x_k)$  ;  
**Mise à jour :**  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$  ;  
 $k = k + 1$  ;  
**Fin.**

Il y a plusieurs méthodes de gradient suivant le choix que nous faisons pour  $\alpha_k$ .

### 3.3.2 Méthodes de gradient à pas optimal :

L'étape 2 (Recherche linéaire) de l'algorithme précédent est alors remplacée par :  
 Calculer un pas optimal  $\alpha_k$  solution de :  $\min_{\alpha > 0} f(x_k + \alpha d_k)$ .

**Théorème 3.3.1 :** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction elliptique c-à-d :  $f \in C^1$  et  $\exists \delta > 0$  tel que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \delta \|x - y\|^2.$$

Alors la méthode de gradient à pas optimal est bien définie et converge.

### 3.3.3 Cas particulier : fonctions quadratiques :

Appliquons l'algorithme en question sur la fonction quadratique :

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x - x^T b$$

où  $Q$  est une matrice réelle carrée  $n \times n$  symétrique définie positive, et  $b \in \mathbb{R}^n$  un vecteur constant.

Notons par :  $g_k = \nabla f(x_k) = Qx_k - b$ , et,  $\varphi(\alpha) = f(x_k + \alpha d_k)$ , alors :  $\forall \alpha \geq 0$ , on a :

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha_k) &= f(x_k + \alpha_k d_k) = f(x_k - \alpha_k g_k) \\ &= \frac{1}{2}(x_k - \alpha_k g_k)^T Q(x_k - \alpha_k g_k) - (x_k - \alpha_k g_k)^T b \\ &= f(x_k) - \alpha_k g_k^T g_k + \frac{\alpha_k^2}{2} g_k^T Q g_k\end{aligned}$$

$\varphi$  admet un minimum unique pour :

$$\alpha_k = \frac{g_k^T g_k}{g_k^T Q g_k}$$

d'où :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\|g_k\|^2}{g_k^T Q g_k} g_k$$

Remarquons que  $g_k^T Q g_k > 0$ , ( $Q$  est D.P, et  $g_k \neq 0$ ).

**On obtient l'algorithme :**

$k = 0, d_0 = -g_0$  ;

**Tant que** :  $\|g_k\| > \varepsilon$  , faire :

$d_k = -g_k$  ;

$\alpha_k = \frac{g_k^T g_k}{g_k^T Q g_k}$  ;

$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$  ;

$g_{k+1} = g_k + \alpha_k Q d_k$  ;

$k = k + 1$  ;

**End .**

**Mise en oeuvre de la méthode du gradient à pas optimal :**

```

clc
clear all
n=2; eps=1.e-5;
Q=[1 -1; -1 2];
b=[-1; 1]; xk=[1; 2];
k=0; rnorm=1.;
while(rnorm>eps)
k=k+1;
dk=-(Q*xk-b);
alpha= (dk'*dk) / (dk'*(Q*dk));
xk1=xk+alpha*dk;
%rnorm=norm(xk1-xk);
rnorm=norm(dk);
xk=xk1;
end
nombre_iteration=k
xk

```

**Remarque 3.3.1 :**

1. Les directions de descente successives sont orthogonales, c-à-d :  $\langle g_{k+1}, g_k \rangle = 0$ .
2. Si  $Q$  est symétrique définie positive, la méthode de gradient à pas optimal est convergente.

**3.3.4 Méthodes de gradient à pas constant :**

Si au lieu du pas optimal, on prend un pas  $\alpha$  fixe, l'algorithme, appelé gradient à pas constant (ou fixe), n'est autre que l'algorithme appliqué à la recherche d'un point fixe pour la fonction  $\psi(x) = x - \alpha \nabla f(x)$ ,

$$x_{k+1} = \psi(x_k) = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$$

**Remarque 3.3.2** : Si  $Q$  est symétrique définie positive, la méthode de gradient à pas fixe est convergente sous réserve que :

$$0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_{\max}(Q)}$$

**Mise en oeuvre de la méthode du gradient à pas constant :**

```

clc
clear all
n=2; eps=1.e-5;
Q=[1 -1; -1 2];
b=[-1; 1]; xk=[1; 2];
k=0; rnorm=1.;
while(rnorm>eps)
k=k+1;
dk=-(Q*xk-b);
alpha= 0.67;
xk1=xk+alpha*dk;
%rnorm=norm(xk1-xk);
rnorm=norm(dk);
xk=xk1;
end
nombre_iteration=k
xk

```

### 3.3.5 Méthodes de recherche linéaire économiques ( Procédure d'Armijo) :

La règle d'Armijo est la suivante :

$$f(x_k + \alpha_k d_k) \leq f(x_k) + m\alpha_k \nabla f(x_k)^T d_k$$

avec  $0 < m < 1$ .

**Exemple 13** : Trouver le minimum de la fonction :

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2 + 2$$

en appliquant la méthode de (p.p.d) à partir de  $x^{(0)} = (0, 0)^T$ .

**Solution 2** :  $\nabla f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -d_0, \|\nabla f(x^{(0)})\| = 2 > \varepsilon.$

Calcul du pas optimal : posons  $\varphi(\alpha) = f(x^{(0)} + \alpha d_0) = 4\alpha^2 - 4\alpha + 2$ ,  $\varphi'(\alpha) = 8\alpha - 4$ , d'où  $\alpha_0 = \frac{1}{2}$ , et dans ce cas  $x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha_0 d_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ , par conséquent  $\|\nabla f(x^{(0)})\| = 2 > \varepsilon$ . D'une manière similaire on calcule l'itéré suivant, on obtient :  $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , et on a :  $\nabla f(x^{(2)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , d'où  $x^{(2)}$  est un minimiseur de  $f$ , donc après  $k = 2$  itération l'algorithme converge vers la solution exacte du problème.

### 3.4 Méthode du gradient conjugué :

La méthode du gradient conjugué est une méthode de descente à pas optimal permettant de minimiser une fonction quadratique de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathfrak{R}$  en au plus  $n$  itérations.

Considérons le problème quadratique sans contraintes suivant :

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + b^T x + c \\ x \in \mathfrak{R}^n \end{cases}$$

où  $Q \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  est symétrique définie positive,  $b \in \mathfrak{R}^n$ ,  $c \in \mathfrak{R}$ .

**Définition 3.4.1** : Soient  $Q \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , symétrique définie positive, et l'ensemble  $\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$  de directions non-nulles. Ces directions sont dites  $Q$  conjuguées si :

$$d_i^T Q d_j = 0, \forall i, j \text{ tels que } i \neq j$$



Noter que si  $Q$  est la matrice identité, les directions conjuguées sont orthogonales.

**Propriétés 3.4.1 :**

1. Si  $d_1, d_2, \dots, d_k$  sont  $Q$  conjuguées, alors elles sont linéairement indépendantes.
2. L'espace vectoriel engendré par un ensemble de  $n$  directions conjuguées est de dimension  $n$ .
3. Une conséquence importante de la propriété (1) est que le nombre maximal de direction  $Q$  conjuguées dans  $\mathbb{R}^n$  est égal à  $n$ .

### 3.4.1 Description de la méthode :

La méthode consiste à minimiser  $f$  à partir d'un point  $x_0$ , suivant  $n$  directions :  $d_0, d_1, \dots, d_{n-1}$ , mutuellement conjuguées par rapport à  $Q$ .

1. La première idée fondamentale de l'algorithme du gradient conjugué, consiste à choisir chaque direction de descente conjuguée à la direction de descente précédente par rapport à  $Q$ .
2. La seconde idée fondamentale consiste à chercher  $d_k$  sous forme d'une combinaison linéaire de  $d_{k-1}$  et du gradient au point  $x_k$ , soit :

$$d_k = -\nabla f(x_k) + \lambda_{k-1}d_{k-1}$$

où  $\lambda_{k-1}$  étant choisie de telle sorte que les directions successives soient conjuguées par rapport à  $Q$ .

3. On construit la suite :

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$$

avec

$$\alpha_k \in \arg \min_{\alpha > 0} f(x_k + \alpha d_k)$$

### 3.4.2 Calcul du pas de déplacement :

Comme  $\alpha_k$  minimise  $f$  dans la direction  $d_k$  on a :

$$\forall k, \quad d_k^T \nabla f(x_{k+1}) = 0$$

$$\implies d_k^T (Q(x_k + \alpha_k d_k) + b) = 0$$

$$\implies \alpha_k = \frac{-d_k^T (Qx_k + b)}{d_k^T Q d_k} = \frac{-d_k^T \nabla f(x_k)}{d_k^T Q d_k}$$

( $Q$  est définie positive,  $d_k$  sont mutuellement conjuguées, alors :  $\forall k, \quad d_k^T Q d_k \neq 0$ ).

3.4.3 Calcul de  $\lambda_k$  :

Pour :

$$\begin{aligned} d_{k+1} &= -\nabla f(x_{k+1}) + \lambda_k d_k \\ \implies d_{k+1}^T Q d_k &= 0 \\ \implies -\nabla f(x_{k+1})^T Q d_k + \lambda_k d_k^T Q d_k &= 0 \end{aligned}$$

ceci est toujours possible, ( $d_k \neq 0$ ) et on obtient :

$$\lambda_k = \frac{\nabla f(x_{k+1})^T Q d_k}{d_k^T Q d_k}$$

**Lemme 3.4.1** :  $\forall i < k$ , on a :  $d_i^T \nabla f(x_k) = 0$ .

**Preuve :**

$$\begin{aligned} d_i^T \nabla f(x_k) &= d_i^T (Q x_k + b) \\ &= d_i^T (Q(x_i + \sum_{j=i}^{k-1} \alpha_j d_j) + b) \\ &= d_i^T (Q x_i + b) + \alpha_i d_i^T Q d_i \\ &= d_i^T (Q x_i + b) - \frac{d_i^T (Q x_i + b)}{d_i^T Q d_i} d_i^T Q d_i = 0 \end{aligned}$$

**Lemme 3.4.2** : Le réel  $\lambda_k$  se calcul par la formule suivante (Fletcher - Reeves) :

$$\lambda_k = \frac{\|\nabla f(x_{k+1})\|^2}{\|\nabla f(x_k)\|^2}$$

**Preuve :**

On a :

$$\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) = \alpha_k Q d_k,$$

d'où :

$$(\nabla f(x_{k+1}))^T Q d_k = \frac{1}{\alpha_k} (\nabla f(x_{k+1}))^T (\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)),$$

comme :

$$\nabla f(x_k) = -d_k + \lambda_{k-1} d_{k-1},$$

alors d'après le lemme 3.4.1 on a :

$$(\nabla f(x_{k+1}))^T (\nabla f(x_k)) = 0,$$

par conséquent :

$$\lambda_k = \frac{(\nabla f(x_{k+1}))^T Q d_k}{d_k^T Q d_k} = \frac{1}{\alpha_k} \cdot \frac{(\nabla f(x_{k+1}))^T \nabla f(x_{k+1})}{d_k^T Q d_k},$$

en substituant  $\alpha_k$  on obtient :

$$\lambda_k = -\frac{\|\nabla f(x_{k+1})\|^2}{d_k^T \nabla f(x_k)},$$

mais :

$$(\nabla f(x_k))^T d_k = (\nabla f(x_k))^T (-\nabla f(x_k) + \lambda_{k-1} d_{k-1})$$

on déduit :

$$\lambda_k = \frac{\|\nabla f(x_{k+1})\|^2}{\|\nabla f(x_k)\|^2}.$$

### 3.4.4 Algorithme :

**Choisir**  $x^0$  et poser  $k = 0$ ,  $d_0 = -\nabla f(x_0)$

**Tant que** :  $\|\nabla f(x_k)\| > \varepsilon$  faire ;

$$\alpha_k = \frac{-d_k^T \nabla f(x_k)}{d_k^T Q d_k};$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k;$$

$$\lambda_k = \frac{\|\nabla f(x_{k+1})\|^2}{\|\nabla f(x_k)\|^2};$$

$$d_{k+1} = -\nabla f(x_{k+1}) + \lambda_k d_k;$$

$$k = k + 1;$$

**Fin.**

---

**Mise en oeuvre de la méthode du gradient conjugué :**

```

clc
clear all
n=2; eps=1.e-5;
Q=[1 -1; -1 2];
b=[-1; 1]; xk=[1; 2];
k=0; dk=-(Q*xk-b); rnorm=1.;
while(rnorm>eps)
k=k+1;
gk=(Q*xk-b);
alphak=(-dk'*gk)/(dk'*(Q*dk));
xk1=xk+alphak*dk;
gk1=(Q*xk1-b);
Lamdak=(norm(gk1))^2/(norm(gk))^2;
dk1=-gk1+Lamdak*dk;
xk=xk1; dk=dk1; gk=gk1;
rnorm=norm(gk);
end
nombre_iteration=k
xk
fmin=(1/2)*xk'*(Q*xk)-b'*xk

```

**Remarque 3.4.1 :**

1. *La méthode du gradient conjugué nécessite le stockage de très peu d'informations.*
2. *Sa vitesse de convergence est très supérieure à celle des algorithmes de gradients classiques.*

Si  $f$  n'est pas quadratique, il peut être difficile de trouver  $\alpha_k$  le pas de déplacement. Quand on ne peut pas calculer  $\alpha_k$  de manière exacte, il faut utiliser à chaque itération  $k$  une méthode numérique (recherche linéaire) pour approcher  $\alpha_k$ . Le résultat suivant nous donne un intervalle tel que si tous les  $\alpha_k$  se trouvent dans cet intervalle, alors la méthode du gradient converge :

**Théorème 3.4.1** : Soit  $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  et on a :

1.  $f$  une fonction elliptique (c-à-d :  $f \in C^1$  et  $\exists \delta > 0$  tel que :

$$\forall x, y \in \mathfrak{R}^n, \quad \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \delta \|x - y\|^2$$

2.  $\nabla f$  soit lipschitzien (c-à-d :  $\exists M > 0$  tel que

$$\forall x, y \in \mathfrak{R}^n, \quad \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq M \|x - y\|$$

3. Supposons que la suite  $(\alpha_k)_k$  satisfait la propriété suivante :

$$\exists a, b \in \mathfrak{R}, \text{ avec } 0 < a < b < \frac{2\delta}{M^2} \text{ tels que : } a < \alpha_k < b, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Alors la méthode générale de gradient converge et la convergence est au moins géométrique, (c-à-d :  $\exists \beta \in [0; 1[$ , tel que :

$$\|x_k - x^*\| \leq \beta^k \|x_0 - x^*\|, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

où  $x^*$  est l'unique point de minimum de  $f$  sur  $\mathfrak{R}^n$ .

### 3.5 Méthode de Newton :

Supposons que  $f$  est de classe  $C^2$ , remplaçons la fonction  $f$  à l'itération  $k$  par son approximation quadratique au voisinage de  $x_k$  :

$$f(x_k + d) = f(x_k) + d^T \nabla f(x_k) + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x_k) d = F(d)$$

or,  $F(d)$  est minimale par rapport à  $d$  si :

$$\nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k) d = 0$$

ainsi la direction de déplacement est solution du système linéaire :

$$\nabla^2 f(x_k) d_k = -\nabla f(x_k) \tag{3.1}$$

**Définition 3.5.1** : *On appelle méthode Newtonienne tout algorithme de descente dans lequel, la direction de  $d_k$  est définie à chaque itération par le système (3.1).  $d_k$  ainsi définie est appelée direction de Newton.*

Si  $\nabla^2 f(x_k)$  est définie positive (  $F(d)$  strictement convexe ) le système ( 3.1) admet une solution unique :

$$d_k = -H_k^{-1} \nabla f(x_k)$$

où  $H_k = \nabla^2 f(x_k)$ , il est clair que  $d_k$  est bien une direction de descente :

$$d_k^T \nabla f(x_k) = -\nabla f(x_k)^T H_k^{-1} \nabla f(x_k) < 0$$

alors :

$$x_{k+1} = x_k + d_k$$

autrement dit  $\alpha_k = 1, \forall k$ .

**Mise en oeuvre de la méthode de Newton :**

```
clc
clear all
f=@(x,y) 4*x.^2+4*y.^2-12*y+4*x.*y;
syms x y xv
xv=[x y]; n=2;
temps=cputime;
for i=1 :n
df(i)=diff(f,xv(i));
for j=1 :n
ddf(i,j)=diff(df(i),xv(j));
end
end
inv_ddf=inv(ddf);
df1=@(x,y) subs(eval(df));
fun_inv=@(x,y) subs(eval(inv_ddf));
alpha=0.5; rnorm=1; xk=[1; 0];k=0;
while(rnorm>1.e-3)
k=k+1;
inv_h=fun_inv(xk(1),xk(2));
d=-inv_h*df1(xk(1),xk(2))';
xk1=xk+d;
rnorm=norm(xk1-xk);
xk=xk1;
end
nombre_iteration=k
xk
fmin=f(xk(1),xk(2))
temps=cputime-temps
```

### 3.5.1 Convergence de la méthode :

La méthode de Newton converge quadratiquement pourvue que  $x^0$  ( point initial ) soit suffisamment proche de  $x^*$  et  $H(x^*)$  définie positive. ( si la fonction  $f$  est quadratique, et, strictement convexe la méthode de Newton converge en une seule itération (  $\forall x^0$ )).

1. La méthode de Newton nécessite le calcul des dérivées premières et secondes à chaque itération, et l'inversion du hessien ce qui peut être très couteux en pratique.
2. La convergence globale n'est pas garantie.

## 3.6 Méthode de relaxation :

C'est une méthode de descente, alors partant d'un point de départ  $x^0$ , l'itéré  $x^{k+1} = (x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_n^{k+1})$  est construit à partir de  $x^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$ , en calculant successivement ses composantes par la résolution des problèmes de minimisation monodimensionnels suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x_1^{k+1}, x_2^k, \dots, x_n^k) = \min_{t \in \mathfrak{R}} f(t, x_2^k, \dots, x_n^k) \\ f(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, x_3^k, \dots, x_n^k) = \min_{t \in \mathfrak{R}} f(x_1^{k+1}, t, x_3^k, \dots, x_n^k) \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ f(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_n^{k+1}) = \min_{t \in \mathfrak{R}} f(x_1^{k+1}, \dots, x_{n-1}^{k+1}, t) \end{array} \right.$$

**Théorème 3.6.1** : Soit  $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  une fonction elliptique. Alors la méthode de relaxation est convergente vers le minimum global unique de  $f$  sur  $\mathfrak{R}^n$ .

**Remarque 3.6.1** :

1. La convergence de la méthode est globale.
2. Cette méthode est efficace pour les problèmes de grande taille, et surtout pour les fonctions dont les variables séparés (  $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$  ), dans ce cas la méthode converge en une seule itération (en résolvant  $n$  problèmes monodimensionnels ).
3. La méthode est lente généralement.



### 3.6.1 Exercices :

**Exercice 1 :**

Soit la fonction :

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1 + 4x_2$$

1- Montrer que  $f(x)$  est strictement convexe.

2- Pour trouver le minimiseur global de  $f(x)$ , on applique la méthode de plus profonde descente à partir de  $x^{(0)} = (0, 0)^T$ . Montrer que la suite  $\{x_k\}$  des itérés vérifie la relation :

$$x^{(k)} = \left( \frac{2}{3^k} - 2, \left( \frac{-1}{3} \right)^k - 1 \right)^T.$$

En déduire le minimiseur de  $f(x)$ .

3- Vérifier analytiquement le résultat .

**Exercice 2 :**

Considérons le programme mathématique suivant :

$$(P) \begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - b^T x \\ x \in \mathbb{R}^2; \end{cases}$$

où  $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ , et  $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

1- Résoudre le (P) en utilisant l'algorithme du gradient conjugué avec une précision  $\epsilon = 10^{-6}$ , et point de départ  $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

2- En déduire le nombre des itérations.

**Exercice 3 :**

1- Ecrire la méthode de Newton pour le problème :

$$\begin{cases} \min f(x) = x^4 + x^2 - 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2- Résoudre le problème précédent par la méthode de Newton, avec une précision  $\epsilon = 10^{-2}$ , point de départ  $x_0 = \frac{1}{2}$ , et pas de déplacement  $\alpha = 1$ .

## 3.6.2 Corrections :

**Exercice 1 :**

1)  $\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  est une matrice définie positive ce qui implique que  $f$  est strictement convexe.

2) Pour  $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , on a :  $\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ , et  $\|\nabla f(0,0)\| > \varepsilon$ ,  $d_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ , le nouveau itéré est donné par la suite :  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d_k$ , où  $\alpha_k$  et  $d_k$  sont respectivement le pas de déplacement et la direction de descente à l'itération  $k$ .

Calcul du pas de déplacement : ( pas optimale ) posons  $\varphi(\alpha) = f(x^{(0)} + \alpha d_0) = 48\alpha^2 - 32\alpha$ , alors  $\varphi'(\alpha) = 96\alpha - 32$ , le pas optimale est  $\alpha_0 = \frac{1}{3}$ .

$$x^{(1)} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} - 2 \\ -\frac{1}{3} - 1 \end{pmatrix}, k = 1.$$

De la même manière on calcule  $x^{(2)}$  et on obtient :  $x^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3^2} - 2 \\ (-\frac{1}{3})^2 - 1 \end{pmatrix}$ .

En utilisant la recurrence on obtient :  $x^{(k)} = \left( \frac{2}{3^k} - 2, \left( \frac{-1}{3} \right)^k - 1 \right)^T$ , et on a :  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)} = (-2, -1)^T$ .

3) Analytiquement on a :  $\nabla f = \begin{pmatrix} 2x_1 + 4 \\ 4x_2 + 4 \end{pmatrix}$  qui s'annule au point :  $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ , et comme  $f$  convexe alors le point critique est un minimiseur global de  $f$ .

**Exercice 2 :**

1-  $d_0 = -\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\|\nabla f(x_0)\| = 2 > \varepsilon$ , calculons le pas de déplacement :  $\alpha_0 = -\frac{d_0^T \nabla f(x_0)}{d_0^T Q d_0} = \frac{1}{2}$ , alors :  $x_1 = x_0 + \alpha_0 d_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , et

$$\lambda_0 = \frac{\|\nabla f(x_1)\|^2}{\|\nabla f(x_0)\|^2} = \frac{1}{4}, \text{ donc } d_1 = -\nabla f(x_1) + \frac{1}{4} d_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$\|\nabla f(x_1)\| = 1 > \epsilon$ ,  $\alpha_1 = 2$ ,  $x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1 = 0$ ,  $d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , donc :  $\|\nabla f(x_2)\| = 0 < \epsilon$ , d'où la solution du problème (P) est  $x^* = x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

2- Le nombre des itérations est :  $k = 2$ .

**Exercice 3 :**

1-

**Initialisation :**  $x_0$  point de départ,  $\epsilon = 10^{-2}$  paramètre de précision, pas de déplacement  $\alpha = 1$  ;

**Tant que :**  $\|f'(x_k)\| > \epsilon$  faire

$$d_k = -\frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} = -\frac{4x_k^3 + 2x_k}{12x_k^2 + 2};$$

$$x_{k+1} = x_k + d_k;$$

$$k = k + 1;$$

**Fin.**

2-  $f'(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$ ,  $\left\|f'(\frac{1}{2})\right\| = \frac{3}{2} > \epsilon$ ,  $d_0 = -\frac{3}{10}$ , par conséquent  $x_1 = \frac{1}{5}$ .

$f'(\frac{1}{5}) = \frac{54}{125}$ ,  $\left\|f'(\frac{1}{5})\right\| = 0.432 > \epsilon$ ,  $d_1 = -\frac{27}{155}$ , par conséquent  $x_2 = \frac{4}{155}$ .

$f'(\frac{4}{155}) = 0,00652$ ,  $\left\|f'(\frac{4}{155})\right\| = 0,00652 < \epsilon$ , alors la solution est  $x^* = x_2 = \frac{4}{155}$ , avec  $k = 2$  le nombre des itérations.

# Bibliographie

- [1] J.M. Borwein et A.S. Lewis. Convex analysis and nonlinear optimization. Springer-Verlag, New-York, 2000.
- [2] F. Bonans. Optimisation continue. Dunod, paris, 2006.
- [3] M.S. Bazaraa.H.D. Sherali.C.M.Shetty. Nonlinear prggramming.Second edition. John Wiley and Sons, Inc 1993.
- [4] M. Bierlaire. Introduction à l'optimisation différentiable. Presses polytechniques et universitaires Romandes, 2006.
- [5] G. Cohen. Convexité et optimisation. Ecole nationale des ponts et chaussées, 2000.
- [6] A. Keraghel. Analyse convexe. Les presses de Dar El-Houda Ain M'lila, Algérie, 2001.
- [7] V. Karmanov. Programmation mathématique. Editions Mir. Moscou 1977.
- [8] D.G. Luenberger. Introduction to linear and nonlinear programming. Stanford University, 2008.
- [9] M. Mnoux.Programmation mathématique. Dunod. Paris. 1983.
- [10] J. Nocedal et S.J wright. Numerical optimization. Second edition. Springer,2006.
- [11] A.Xavier, P.Dreyfuss et Y.Privat. Introduction à l'optimisation : aspects théoriques, numériques et algorithmes. [http ://math.unice.fr/~dreyfuss/D4](http://math.unice.fr/~dreyfuss/D4). (2006-2007).