Solution TD 1 :

Exo 2 :

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} v(x)\,n_i(x)\,ds.$$

$$\int_\Omega (\operatorname{div}(u(x))\,\omega(x)\,dx = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i}\right)\omega(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i}\,\omega(x)\,dx.$$

Posons $v = u_i(x)\,\omega(x)$, alors : $\int_\Omega \frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\,dx = \int_\Omega \frac{\partial(u_i\cdot\omega)}{\partial x_i}(x)\,dx$

$$\Rightarrow \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,dx = \int_\Omega \frac{\partial(u_i\cdot\omega)}{\partial x_i}(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} v(x)\,n_i(x)\,ds$$

$$= \int_{\partial\Omega} (u_i\cdot\omega)(x)\,n_i(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} u_i(x)\,\omega(x)\,n_i(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x)\,w(x)\,dx + \int_\Omega u_i(x)\,\frac{\partial \omega}{\partial x_i}(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} u_i(x)\,\omega(x)\,n_i(x)\,ds$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x)\,\omega(x)\,dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_i(x)\,\frac{\partial\omega}{\partial x_i}(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} u_i(x)\,w(x)\,n_i(x)\,ds$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \operatorname{div}(u(x))\,\omega(x)\,dx + \int_\Omega u(x)\cdot\nabla\omega(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} u(x)\cdot(w(x)\,n(x))\,ds.$$

Exo 3 :

Supposons que $u \in H^1(\Omega)$ l'unique solution de la (FV) suivante :

$$\int_\Omega (\nabla u(x)\cdot\nabla w(x) + u(x)\,\omega(x))\,dx = \int_{\partial\Omega} g(x)\,\omega(x)\,ds + \int_\Omega f(x)\,w(x)\,dx, \quad \forall \omega \in H^1(\Omega).$$

Donc pour $\omega = u$ on a :

$$\int_\Omega (|\nabla u(x)|^2 + |u(x)|^2)\,dx = \int_{\partial\Omega} g(x)\,u(x)\,ds + \int_\Omega f(x)\,u(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \overset{C.S}{\leq} \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|u\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\overset{\text{Trace}}{\leq} \overset{1^0}{C} \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \left(\int_\Omega (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2) dx \right)^{1/2}$$

$$= \left(C \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right) \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \max(C,1) \left(\|g\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right) \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

Exo 4 :

$\Omega = (]0,1[)^2$, $w \in H^1_0(\Omega)$, $\|w\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_0^1 \int_0^1 |w(x_1,x_2)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}}$,

On a : $w(x_1,x_2) = \int_0^{x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1}(t, x_2)\, dt + w(0,x_2)$

d'où

$$|w(x_1,x_2)| = \left| \int_0^{x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1}(t,x_2) dt \right|, \text{ car } w(0,x_2) = 0, \; w \in H^1_0(\Omega).$$

$$\leq \left| \int_0^1 \frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 \right|$$

$$\overset{C.S}{\leq} \left(\int_0^1 \left| \frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1,x_2) \right|^2 dx_1 \right)^{1/2}$$

par conséquent :

$$|w(x_1,x_2)|^2 \leq \int_0^1 \left| \frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1,x_2) \right|^2 dx_1 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 |w(x_1,x_2)|^2 dx_1 \leq \int_0^1 \left| \frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1,x_2) \right|^2 dx_1 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \int_0^1 |w(x_1,x_2)|^2 dx_1 dx_2 \leq \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1,x_2) \right|^2 dx_1 dx_2 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \int_0^1 |w(x_1,x_2)|^2 dx_1 dx_2 \leq \int_0^1 \int_0^1 \left(\left| \frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1,x_2) \right|^2 + \left| \frac{\partial w}{\partial x_2}(x_1,x_2) \right| \right) dx_1 dx_2$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 |\nabla w(x_1,x_2)|^2 dx_1 dx_2.$$

Alors $\|w\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} \Rightarrow \|w\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}$, $(C = 1 > 0$

Exo 5 :

① On prend $u_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}} \in L^2(\Omega)$, et $u_n'(x) = \frac{-2x}{n} e^{-\frac{x^2}{n}} \in L^2(\Omega)$, donc bien sûr $u_n \in H^1(\Omega)$. En faisant le changement de variable $x = \sqrt{n}\, y$, on a :

$$\| u_n \|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{2x^2}{n}} dx = \sqrt{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-2y^2} dy = \sqrt{n}\, I_1, \text{ et}$$

$$\| u_n' \|^2_{L^2(\Omega=\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \frac{4x^2}{n^2} e^{-\frac{2x^2}{n}} dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2y^2} (4y^2) dy = \frac{1}{\sqrt{n}} I_2 .$$

Ainsi :

$$\frac{\| u_n \|^2_{L^2(\mathbb{R})}}{\| u_n' \|_{L^2(\mathbb{R})}} = \frac{I_1}{I_2}\, n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty ,$$ il est claire qu'il n'existe pas une constante $c > 0$ telle que :

$$\| u \|_{L^2(\mathbb{R})} \leq c \| u' \|_{L^2(\mathbb{R})} , \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}) = H^1_0(\mathbb{R}) .$$

L'inégalité de Poincaré est donc fausse sur $\mathbb{R}$.

② Conclusion : L'inégalité de Poincaré ne s'applique pas lorsque l'ensemble n'est pas borné ($\mathbb{R}$ est non borné)