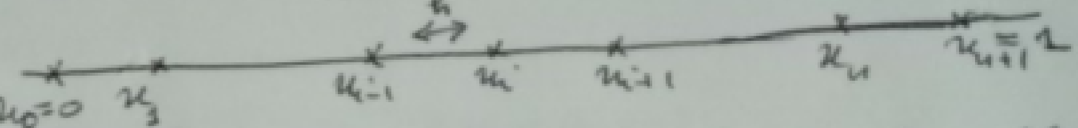
Solution TD1 :

Exercice 1: Considérons un maillage uniforme de $[0,1]$:
$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1$, $x_i = x_0 + ih = ih$, avec $0 \leq i \leq n+1$

$h = \frac{1}{n+1}$



1] ⓐ utilisons une formule de différences finis centrée on obtient le schéma suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{-U_{i-1} + 2U_i - U_{i+1}}{h^2} + e^{x_i} U_i = f_i \ , \ 1 \leq i \leq n \\ U(0) = a \ , \ U(1) = b. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{h^2}\left(-U_{i-1} + (2 + h^2 e^{x_i})U_i - U_{i+1}\right) = f_i \ , \ 1 \leq i \leq n \\ U(0) = a \ , \ U(1) = b. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{h^2}\left((2 + h^2 e^{x_1})U_1 - U_2\right) = \frac{1}{h^2}a + f_1 \\ \frac{1}{h^2}\left(-U_{i-1} + (2 + h^2 e^{x_i})U_i - U_{i+1}\right) = f_i \ , \ 2 \leq i \leq n-1 \\ \frac{1}{h^2}\left(-U_{n-1} + (2 + h^2 e^{x_n})U_n\right) = \frac{1}{h^2}b + f_n \end{cases}$$

ⓑ Ce schéma est équivalent au système linéaire suivant : $AU = f$ tel que :

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2+h^2e^{x_1} & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2+h^2e^{x_2} & -1 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & & & 0 \\ & & -1 & 2+h^2e^{x_{n-1}} & -1 & \\ 0 & & & & -1 & 2+h^2e^{x_n} \end{pmatrix}, \ U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}, \ f = \begin{pmatrix} f_1 + \frac{a}{h^2} \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n + \frac{b}{h^2} \end{pmatrix}$$

2] ⓐ

$$\begin{cases} \dfrac{-U_{i-1} + 2U_i - U_{i+1}}{h^2} = f_i \ , \ 1 \leq i \leq n \\ U(0) = 0 \ , \ U'(1) = 2 \end{cases}$$

Pour $i = n$, on a : $\dfrac{-U_{n-1} - 2U_n - U_{n+1}}{h^2} = f_n$, utilisons la formule de différences finis d'ordre 1 : $U'_i = \dfrac{U_i - U_{i-1}}{h}$, alors on a : $U'(1) = U'_{n+1} = \dfrac{U_{n+1} - U_n}{h} = 2$

$\Rightarrow U_{n+1} = U_n + 2h$

d'où : pour $i=n$, on a : $\frac{1}{h^2}(-U_{n-1}+U_n) = f_n + \frac{2}{h}$,

le schéma numérique dans ce cas est donné par :

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2}(2U_1 - U_2) = f_1 \\ \frac{1}{h^2}(-U_{i-1} + 2U_i - U_{i+1}) = f_i , \quad 2 \le n \le n-1 \\ \frac{1}{h^2}(-U_{n-1} + U_n) = f_n + \frac{2}{h} . \end{cases}$$

(b) Le système linéaire correspondant : $AU = f$ tel que :

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n + \frac{2}{h} \end{pmatrix} \text{ et } A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

(1) Posons $w = (2+\sin x)\frac{dU}{dx}$, alors le problème donné est équivalent au problème suivant :

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} w(x) = f(x) , \quad x \in]0,1[\\ w(x) = (2+\sin x)\frac{dU}{dx}(x) = (2+\sin x) U'(x) . \\ U(0) = U(1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -w'(x_i) = f(x_i) , \quad i = 1, \to n \\ w(x_i) = (2+\sin x_i) U'(x_i) \\ U(0) = U(1) = 0 . \end{cases}$$

utilisons la formule de différences finies centrée : $w'(x_i) \simeq \frac{w(x_{i+\frac{1}{2}}) - w(x_{i-\frac{1}{2}})}{h}$,

avec : $w(x_{i+\frac{1}{2}}) = (2+\sin x_{i+\frac{1}{2}}) U'(x_{i+\frac{1}{2}})$ et $w(x_{i-\frac{1}{2}}) = (2+\sin x_{i-\frac{1}{2}}) U'(x_{i-\frac{1}{2}})$,

et $U'(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{U(x_{i+1}) - U(x_i)}{h}$, $U'(x_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{U(x_i) - U(x_{i-1})}{h}$, on obtient :

$$\begin{cases} -\frac{(2+\sin x_{i+\frac{1}{2}})\frac{U(x_{i+1}) - U(x_i)}{h} - (2+\sin x_{i-\frac{1}{2}})\frac{U(x_i) - U(x_{i-1})}{h}}{h} \simeq f(x_i) , \quad i = 1, \to n \\ U(0) = U(1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-(2+\sin x_{i-\frac{1}{2}})\,u_{i-1} + (4+\sin x_{i-\frac{1}{2}}+\sin x_{i+\frac{1}{2}})\,u_i - (2+\sin x_{i+\frac{1}{2}})\,u_{i+1}}{h^2} = f_i, \quad 1\le i\le n \\ u(0)=u_0=0, \quad u(1)=u_{n+1}=0 \end{cases}$$

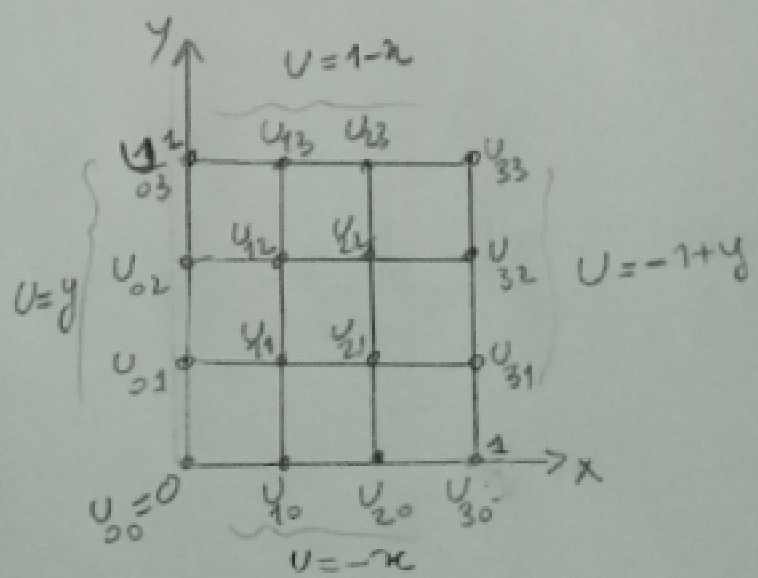
$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{(4+\sin x_{\frac{1}{2}}+\sin x_{3/2})\,u_1 - (2+\sin x_{\frac{3}{2}})\,u_2}{h^2} = f_1 \\[2ex] \dfrac{-(2+\sin x_{i-\frac{1}{2}})\,u_{i-1} + (4+\sin x_{i-\frac{1}{2}}+\sin x_{i+\frac{1}{2}})\,u_i - (2+\sin x_{i+\frac{1}{2}})\,u_{i+1}}{h^2} = f_i, \quad 2\le i\le n-1 \\[2ex] \dfrac{-(2+\sin x_{n-\frac{1}{2}})\,u_{n-1} + (4+\sin x_{n-\frac{1}{2}}+\sin x_{n+\frac{1}{2}})\,u_n}{h^2} = f_n \end{cases}$$

② Le système linéaire est donné par :

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} (4+\sin x_{\frac{1}{2}}+\sin x_{\frac{3}{2}}) & -(2+\sin x_{3/2}) & & \text{\Large 0} \\ -(2+\sin x_{\frac{3}{2}}) & (4+\sin x_{3/2}+\sin x_{\frac{5}{2}}) & -(2+\sin x_{\frac{5}{2}}) & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ \text{\Large 0} & -(2+\sin x_{n-3/2}) & (4+\sin x_{n-\frac{3}{2}}+\sin x_{n-\frac{1}{2}}) & (2+\sin x_{n-\frac{1}{2}}) \\ & & -(2+\sin x_{n-\frac{1}{2}}) & (4+\sin x_{n-\frac{1}{2}}+\sin x_{n+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

<u>Exercice 3</u>

1) On prend $n=2$, $h=\frac{1}{3}$.



ⓐ schéma numérique :

$$\begin{cases} -u_{i-1j} - u_{i+1j} + 4u_{ij} - u_{ij-1} - u_{ij+1} = 0, \quad 1\le i,j\le n \\ u_{0j}=y_j, \quad u_{i0}=-x_i, \quad u_{n+1j}=-1+y_j, \quad u_{in+1}=1-x_i, \\ \qquad 0\le i,j\le n+1 \end{cases}$$

$i=1$ $\begin{cases} -U_{01} - U_{21} + 4U_{11} - U_{10} - U_{12} = 0 \ , \ j=1 \\ -U_{02} - U_{22} + 4U_{12} - U_{11} - U_{13} = 0 \ , \ j=2 \end{cases}$

$i=2$ $\begin{cases} -U_{11} - U_{31} + 4U_{21} - U_{20} - U_{22} = 0 \ , \ j=1 \\ -U_{12} - U_{32} + 4U_{22} - U_{21} - U_{23} = 0 \ , \ j=2 \end{cases}$

il s'ensuit que :

$i=1$ $\begin{cases} -U_{21} + 4U_{11} - U_{12} = y_1 - x_1 \ , \ \underline{\underline{j=1}} \ , \ (\underset{0j}{U_{01}} = y_1 \ , \ \underset{i0}{U_{10}} = -x_1) \\ -U_{11} + 4U_{12} - U_{22} = y_2 + 1 - x_1 \ , \ \underline{\underline{j=2}} \ (\underset{0j}{U_{02}} = y_2 \ , \ \underset{i\,n+1}{U_{13}} = 1 - x_1) \end{cases}$

$i=2$ $\begin{cases} -U_{11} + 4U_{21} - U_{22} = y_1 - 1 - x_2 \ , \ \underline{\underline{j=1}} \ , \ (\underset{n+1j}{U_{31}} = -1 + y_1 \ , \ \underset{i0}{U_{20}} = -x_2) \\ -U_{12} + 4U_{22} - U_{21} = -1 + y_2 + 1 - x_2 = y_2 - x_2 \ , \ \underline{\underline{j=2}} \ . \ (U_{32} = -1 + y_2 \ , \ U_{23} = 1 - x_2 \end{cases}$

b) Le système linéaire correspondant est le suivant :

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{12} \\ U_{21} \\ U_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 + 1 - x_1 \\ y_1 - 1 - x_2 \\ y_2 - x_2 \end{pmatrix}$$

2) Posons $h_x = \dfrac{a}{n+1}$, $h_y = \dfrac{b}{k+1}$, on a :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,y) = \frac{U(x-h_x,y) + U(x+h_x,y) - 2U(x,y)}{h_x^2} + o(h_x^2)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x,y) = \frac{U(x,y-h_y) + U(x,y+h_y) - 2U(x,y)}{h_y^2} + o(h_y^2).$$

Ainsi on a le schéma numérique suivant :

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{h_x^2} U_{i-1j} - \dfrac{1}{h_x^2} U_{i+1j} + 2\left(\dfrac{1}{h_x^2} + \dfrac{1}{h_y^2}\right) U_{ij} - \dfrac{1}{h_y^2} U_{ij-1} - \dfrac{1}{h_y^2} U_{ij+1} = f_{ij} \ , \quad 1 \le i \le n, \ 1 \le j \le k \\ U_{0j} = U_{n+1j} \ , \quad 0 \le j \le k+1 \\ U_{i0} = U_{ik+1} \ , \quad 0 \le i \le n+1 \end{cases}$$

qui s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \lambda & -\frac{1}{h_y^2} & 0 & -\frac{1}{h_x^2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h_y^2} & \lambda & -\frac{1}{h_y^2} & 0 & -\frac{1}{h_x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h_y^2} & \lambda & 0 & 0 & -\frac{1}{h_x^2} \\ -\frac{1}{h_x^2} & 0 & 0 & \lambda & -\frac{1}{h_y^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h_x^2} & 0 & \frac{1}{h_y^2} & \lambda & -\frac{1}{h_y^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h_x^2} & 0 & -\frac{1}{h_y^2} & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{12} \\ U_{13} \\ U_{21} \\ U_{22} \\ U_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{21} \\ f_{22} \\ f_{23} \end{pmatrix},$$

où $\lambda = 2\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right)$

Exercice 4:

$U(0) = U_0$, $U(1) = U_{n+1}$, $h = \frac{1}{n+1}$, $x_i = ih$, $i = 0, \dots, n+1$

1] • $-u''(x_i) = \dfrac{-U(x_{i-1}) + 2U(x_i) - U(x_{i+1})}{h^2} + O(h^2)$, $i = \overline{1,n}$, $i = 1, \dots, n$.

• $u'(x_i) = \dfrac{U(x_i) - U(x_{i-1})}{h} + O(h)$, $i = 1, \dots, n$.

• Schéma numérique:
$$\begin{cases} \left(\frac{2}{h^2} + \frac{g_1}{h}\right) U_1 - \frac{1}{h^2} U_2 = \left(\frac{1}{h^2} + \frac{g_1}{h}\right)\alpha \\ -\left(\frac{1}{h^2} + \frac{g_i}{h}\right) U_{i-1} + \left(\frac{2}{h^2} + \frac{g_i}{h}\right) U_i - \frac{1}{h^2} U_{i+1} = 0, \quad 1 < i < n \\ -\left(\frac{1}{h^2} + \frac{g_n}{h}\right) U_{n-1} + \left(\frac{2}{h^2} + \frac{g_n}{h}\right) U_n = \frac{1}{h^2}\beta. \end{cases}$$

• Système linéaire correspondant: $AU = f$ tel que:

$$A = \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{h^2} + \frac{g_1}{h}\right) & -\frac{1}{h^2} & & & 0 \\ -\left(\frac{1}{h^2} + \frac{g_2}{h}\right) & \left(\frac{2}{h^2} + \frac{g_2}{h}\right) & -\frac{1}{h^2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\left(\frac{1}{h^2} + \frac{g_{n-1}}{h}\right) & \left(\frac{2}{h^2} + \frac{g_{n-1}}{h}\right) & \frac{1}{h^2} \\ 0 & & & -\left(\frac{1}{h^2} + \frac{g_n}{h}\right) & \left(\frac{2}{h^2} + \frac{g_n}{h}\right) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n-1} \\ U_n \end{pmatrix}, \text{ et } f = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{h^2} + \frac{g}{h}\right)\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{h^2}\beta \end{pmatrix}$$

2] Supposons que $AU \geq 0$, c-à-d
$$\begin{cases} (AU)_1 = \left(\frac{2}{h^2} + \frac{g_1}{h}\right) U_1 - \frac{1}{h^2} U_2 \geq 0, \\ (AU)_i = -\left(\frac{1}{h^2} + \frac{g_i}{h}\right) U_{i-1} + \left(\frac{2}{h^2} + \frac{g_i}{h}\right) U_i - \frac{1}{h^2} U_{i+1} \geq 0, \quad \underline{\underline{1 < i < n}} \\ (AU)_n = -\left(\frac{1}{h^2} + \frac{g_n}{h}\right) U_{n-1} + \left(\frac{2}{h^2} + \frac{g_n}{h}\right) U_n \geq 0. \end{cases}$$

Soit $i_0 = \min\{ i \,/\, U_i = \min_j U_j \}$, c-à-d $U_{i_0} \leq U_i$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ et si $U_k \leq U_i$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ alors $i_0 < k$, ($U_k \leq U_i \; \forall i \Rightarrow U_{i_0} = U_k$).

Autrement dit : i_0 est le plus petit indice, et U_{i_0} est la plus petite valeur de U.

- Si $i_0 \in \{2, \dots, n-1\}$, on a :

$$(AU)_{i_0} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{h^2}(U_{i_0}-U_{i_0-1}) + \frac{1}{h^2}(U_{i_0}-U_{i_0+1}) + \frac{g_{i_0}}{h}(U_{i_0}-U_{i_0-1}) \geq 0$$

mais : $U_{i_0}-U_{i_0-1} < 0$, $U_{i_0}-U_{i_0+1} \leq 0$, d'où $(AU)_{i_0} < 0$, contradiction, donc $i_0 \notin \{2, \dots, n-1\}$, c-à-d ce cas est impossible.

- Pour $i_0 = 1$, alors $(AU)_1 \geq 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{h^2}}_{>0}\underbrace{(U_1-U_2)}_{\leq 0} + \underbrace{\left(\frac{1}{h^2}+\frac{g_1}{h}\right)}_{\geq 0} U_1 \geq 0$, d'où, $U_1 \geq 0$.

- Pour $i_0 = n$, alors $(AU)_n \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{h^2}(U_n-U_{n-1}) + \frac{g_n}{h}(U_n-U_{n-1}) + \frac{1}{h^2}U_n \geq 0$

Comme $\frac{g_n}{h} \geq 0$, $\frac{1}{h^2} > 0$, $U_n - U_{n-1} < 0$, alors $U_n \geq 0$.

D'où si $AU \geq 0 \Rightarrow U \geq 0$ (composante par composante).

3] Supposons que $AU = 0$, alors $\begin{cases} AU \geq 0 \\ \text{et} \\ -AU \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AU \geq 0 \\ \text{et} \\ A(-U) \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{question 2}} \begin{cases} U \geq 0 \\ \text{et} \\ -U \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow U = 0$, ce qui implique que $\ker(A) = \{0\}$, d'où A est une bijection (dimension finie), alors A est inversible.

4] U solution de $AU = f$,

- U satisfait le système :

$$(*) \begin{cases} \frac{1}{h^2}(U_1-U_2) + \left(\frac{1}{h^2}+\frac{g_1}{h}\right)(U_1-\alpha) = 0 \\ \frac{1}{h^2}(U_i-U_{i-1}) + \frac{1}{h^2}(U_i-U_{i+1}) + \frac{g_i}{h}(U_i-U_{i-1}) = 0, \quad 2 \leq i \leq n-1 \\ \frac{1}{h^2}(U_n-U_{n-1}) + \frac{g_n}{h}(U_n-U_{n-1}) + \frac{1}{h^2}(U_n-\beta) = 0 \end{cases}$$

- Posons $\tilde{U} = (U_0, U_1, \dots, U_n, U_{n+1})$, $U_0 = \alpha$, $U_{n+1} = \beta$.
- Soit $i_0 = \min\{i, U_i = \min_j U_j\}$, et $i_1 = \min\{i, U_i = \max_j U_j\}$
- Supposons que $i_1, i_0 \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$(U_{i_0}-U_{i_0-1}) < 0$, et $(U_{i_0}-U_{i_0+1}) \leq 0$ donc $(*)$ est impossible, par conséquent $i_0 = 0$ ou $i_0 = n+1$, et

$U_{i_1}-U_{i_1-1} > 0$, et $(U_{i_1}-U_{i_1+1}) \geq 0$, donc $(*)$ est impossible, alors $i_1 = 0$ ou $i_1 = n+1$,

d'où $\min(\alpha,\beta) \leq U_i \leq \max(\alpha,\beta)$, $\forall i = \overline{1,n}$

Exercice 5.

1] Voir le cours (Exemple 1)

2] Voir le cours (Proposition 1.5.1)

3] Voir Exercice 4 (Q3)

4] Supposons que U_1, U_2 deux solutions du système $AU=f$ tel que $U_1 \neq U_2$, alors $U_3 = U_1 - U_2$ est une solution du système $AU_3 = 0$, $(AU_3 = A(U_1 - U_2) = f - f = 0)$,

de (Q2) on a : $AU_3 = 0 \Rightarrow U_3 = 0$ ce qui entraine que $U_1 = U_2$ (solution unique).

5] Remarque : Si U vérifie $U^{(4)} = 0$, alors $r_i = 0$ (l'erreur au point x_i), $i = \overline{1,n}$

et donc $U_i = U(x_i)$, pour tout $i = \overline{1,n}$.

Posons $A^{-1} = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, $e = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$, on a :

$\|A^{-1}e\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |(A^{-1}e)_i| = \max_{1 \leq i \leq n} \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}\right|$, $\quad \|A^{-1}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

- $\forall z \in \mathbb{R}^n$ tq $z \geq 0$ $(z_i \geq 0,\ i = \overline{1,n})$, $\exists y! \in \mathbb{R}^n$ tq $z = Ay$ (A bijective),
  $Ay \geq 0 \Rightarrow y \geq 0$, d'où $A^{-1}z \geq 0$ (A inversible) $\Rightarrow (A^{-1}z)_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$.
- Pour $z = e_j$, on obtient $(A^{-1}z)_i = (A^{-1}e_j)_i \geq 0 \Rightarrow a_{ij} \geq 0$, $\forall i,j = \overline{1,n}$.
  (e_j est le j-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$).
- D'où $\|A^{-1}e\|_\infty = \|A^{-1}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$. $(|a_{ij}| = a_{ij})$.
- Posons $A^{-1}e = L \Rightarrow AL = e$, donc L est une solution du schéma numérique associé à l'équation avec $f = 1$ à savoir : $\begin{cases} -U''(x) = 1, & x \in]0,1[\\ U(0) = U(1) = 0 \end{cases}$

Or $U''(x) = -1$ entraine $U(x) = \frac{-x^2}{2} + \alpha x - \beta$ et $U(0) = U(1) = 0$ donne $\beta = 0$ et $\alpha = \frac{1}{2}$,

donc $U(x) = \frac{x}{2}(1-x)$. En particulier on a $U^{(4)}(x) = 0$, d'après la remarque précédente on en déduit que $U(x_i) = L_i$, d'où $L_i = \frac{x_i}{2}(1 - x_i)$, alors on obtient :

$\|A^{-1}\|_\infty = \|A^{-1}e\|_\infty = \|L\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |L_i| = \frac{1}{2} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i(1-x_i)| \leq \max_{x \in [0,1]} |x(1-x)| = \frac{1}{8}$, $(x = \frac{1}{2})$

alors le schéma numérique est stable pour la norme $\|\cdot\|_\infty$