Solution TD2

Exo 1 :

$$a(v,w) = \int_\Omega \nabla v(x) \nabla w(x) dx + \int_\Omega g(x) v(x) \cdot w(x) dx, \quad L(w) = \int_\Omega f(x) w(x) dx,$$

où $f \in L^2(\Omega)$, et g est une fonction donnée vérifiant $0 < g_0 \leq g(x) \leq g_1$, $\forall x \in \Omega$, $g_0, g_1 \in \mathbb{R}$.

- Il est clair que $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire et $L(\cdot)$ est une forme linéaire par linéarité de l'intégrale.
- $\forall v, w \in H^1(\Omega)$ on a : $|a(v,w)| \leq \left|\int_\Omega \nabla v(x) \nabla w(x) dx\right| + \left|\int_\Omega g(x) v(x) w(x) dx\right|$

$$\stackrel{C.S}{\leq} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} + g_1 \|v\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq (1+g_1) \|v\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)}, \quad (1+g_1) > 0$$

Comme $a(\cdot,\cdot)$ est bornée alors $a(\cdot,\cdot)$ est continue.

- $\forall v \in H^1(\Omega)$, on a : $a(v,v) = \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx + \int_\Omega g(x) |v(x)|^2 dx$

$$\geq \min(1, g_0) \|v\|^2_{H^1(\Omega)},$$

d'où $a(\cdot,\cdot)$ est coercive.

- $\forall w \in H^1(\Omega)$, on a : $|L(w)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)}$ par conséquent $L(\cdot)$ est continue.

D'après le théorème de L.M le problème (FV) admet une unique solution.

Exo 2 :

Multiplions l'équation par une fct test $w \in H^1_0(\Omega)$ et intégrons sur Ω :

$$\int_\Omega \left(-\alpha \Delta v w + \beta \frac{\partial v}{\partial x_1} w + \gamma \frac{\partial v}{\partial x_2} w + v w\right) dx_1 dx_2 = \int_\Omega f w \, dx_1 dx_2$$

En utilisant la formule de Green (2) et (1) on obtient :

$$\alpha \int_\Omega \nabla v \nabla w \, dx_1 dx_2 - \beta \int_\Omega v \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 dx_2 - \gamma \int_\Omega v \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_1 dx_2 + \int_\Omega v w \, dx_1 dx_2 = \int_\Omega f w \, dx_1 dx_2$$

on obtient la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } v \in H^1_0(\Omega) \text{ tq :} \\ a(v,w) = L(w), \quad \forall w \in H^1_0(\Omega), \text{ où :} \end{cases}$$

$$a(u,w) = \alpha \int_\Omega \nabla u \nabla w \, dx_1 \, dx_2 - \beta \int_\Omega u \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 dx_2 - \gamma \int_\Omega u \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_1 dx_2 + \int_\Omega u w \, dx_1 dx_2$$

et

$$L(w) = \int_\Omega f w \, dx_1 dx_2 .$$

- Hypothèses de L.M :

⊛ $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire et $L(\cdot)$ est une forme linéaire.

⊛ $a(\cdot,\cdot)$ continue, en effet : $\forall\, u, w \in H_0^1(\Omega)$ on a :

$$|a(u,w)| \leq \alpha \left| \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) \right| + |\beta| \left| \int_\Omega u \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \right| + |\gamma| \left| \int_\Omega u \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_1 dx_2 \right| +$$

$$\left| \int_\Omega u w \, dx_1 dx_2 \right|$$

$$\overset{CS}{\leq} \alpha \left[\left(\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac12} \left(\int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac12} + \left(\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac12} \left(\int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac12} \right] +$$

$$\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 = |\nabla u|^2 \right)$$

$$|\beta| \left(\int_\Omega |u|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac12} \left(\int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac12} + |\gamma| \left(\int_\Omega |u|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac12} \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial w}{\partial x_2} \right|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac12} +$$

$$\left(\int_\Omega |u|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac12} \left(\int_\Omega |w|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac12}$$

$$\overset{P.C}{\leq} 2\alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|w\|_{H_0^1(\Omega)} + |\beta| C_1(\Omega) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|w\|_{H_0^1(\Omega)} + |\gamma| C_2(\Omega) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|w\|_{H_0^1(\Omega)} + C_3(\Omega) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} C_4(\Omega) \|w\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$= C \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \cdot \|w\|_{H_0^1(\Omega)} , \quad C > 0 .$$

⊛ $a(\cdot,\cdot)$ coercive, en effet : $\forall u \in H_0^1(\Omega)$, on a :

$$a(u,u) = \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 dx_1 dx_2 - \beta \int_\Omega u \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 dx_2 - \gamma \int_\Omega u \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_1 dx_2 + \int_\Omega |u|^2 dx_1 dx_2$$

on a : $u \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac12 \frac{\partial u^2}{\partial x_1}$, $u \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac12 \frac{\partial u^2}{\partial x_2}$, et :

$$\int_\Omega u \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = \int_\Omega \frac12 \frac{\partial u^2}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = \frac12 \int_\Omega 1 \cdot \frac{\partial u^2}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \overset{Green}{=} -\int_\Omega u^2 \frac{\partial 1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = 0$$

d'où : $a(u,u) = \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 dx_1 dx_2 + \int_\Omega |u|^2 dx_1 dx_2 \geq \alpha \|u\|^2_{H_0^1}$, $\alpha > 0$.

⊛ $L(\cdot)$ continue : $\forall w \in H_0^1(\Omega)$: $|L(w)| \overset{C.S}{\leq} \|f\|_{L^2(\Omega)} \left(\int_\Omega |w|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac12}$

$$\overset{P.C}{\leq} C(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{H_0^1(\Omega)} = C \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \quad C > 0$$

D'après le théorème de L.M, (FV) admet une unique solution.

Exo3 :

① Formulation variationnelle : Posons $E = \{w \in H^1(\Omega),\ w = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$.

Multiplions la 1ère équation par une fonction test $w \in E$ et intégrons sur Ω on obtient :

$\int_\Omega -\Delta U w\,dx = \int_\Omega f w\,dx$, appliquons la formule II de Green on obtient :

$$\int_\Omega \nabla U \nabla w\,dx - \int_{\Gamma_0} \underbrace{\frac{\partial U}{\partial n} w}_{=0} d\sigma - \int_{\Gamma_1} \underbrace{\overbrace{\frac{\partial U}{\partial n}}^{\nabla U.n}}_{=0} w\,d\sigma = \int_\Omega f w\,dx.$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \nabla U \nabla w\,dx = \int_\Omega f w\,dx$$

$$\left(\int_{\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1} \nabla U.n\,w\,d\sigma = \int_{\Gamma_0} \nabla U.n\,w\,d\sigma + \int_{\Gamma_0} \nabla U.n\,w\,d\sigma,\quad (\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \phi)\right).$$

Ainsi la formulation variationnelle est donnée par :

$$(FV) : \begin{cases} \text{Trouver } U \in E \text{ tq :} \\ \underbrace{\int_\Omega \nabla U \nabla w\,dx}_{a(U,w)} = \underbrace{\int_\Omega f w\,dx}_{L(w)}, \quad \forall w \in E \end{cases}$$

② Vérifions les hypothèses du théorème de L.M :

- Il est clair que $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire et $L(\cdot)$ est une forme linéaire.
- $a(\cdot,\cdot)$ continue ? $\forall U, w \in E$ on a :

$$|a(U,w)| \overset{C.S}{\leqslant} \left(\int_\Omega |\nabla U|^2 dx\right)^{\frac12} \left(\int_\Omega |\nabla w|^2 dx\right)^{\frac12} \leq \left(\int_\Omega (|\nabla U|^2 + |U|^2)\,dx\right)^{\frac12} \left(\int_\Omega (|\nabla w|^2 + |w|^2)\,dx\right)^{\frac12}$$
$$= \|U\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|w\|_{H^1(\Omega)}$$

- $a(\cdot,\cdot)$ coercive :

Le fait que les fonctions à trace nulle sur une partie du bord de Ω de mesure $(n-1)$ dimensionnelle non nulle vérifie encore l'inégalité de poincaré, alors on a : $\forall U \in E$:

$$a(U,U) = \int_\Omega |\nabla U|^2 dx = \|\nabla U\|^2_{L^2(\Omega)}, \text{ et : } \|U\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \text{diam}(\Omega) \|\nabla U\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \|\nabla U\|^2_{L^2(\Omega)} + \|U\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant (1 + \text{diam}(\Omega)) \|\nabla U\|^2_{L^2(\Omega)} \Rightarrow a(U,U) \geqslant \frac{1}{1+\text{diam}(\Omega)} \|U\|^2_{H^1(\Omega)} = \overset{\circ}{M} \|U\|^2_{H^1(\Omega)}$$

- $L(\cdot)$ continue : $\forall w \in E : |L(w)| = \left|\int_\Omega f w\,dx\right| \overset{C.S}{\leqslant} \|f\|_{L^2(\Omega)} \left(\int_\Omega |w|^2 dx\right)^{\frac12} \leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)} \left(\int_\Omega (|w|^2 + |\nabla w|^2) dx\right)^{\frac12}$

$$= \|f\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)}$$

③

$(FV) \Rightarrow (P)$

Supposons que u soit une fonction régulière vérifiant (FV), par intégration par partie (formule II de Green) on obtient :

$$-\int_\Omega (\Delta u + f) w \, dx + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n} w \, ds = 0 \quad \ldots\ldots \ (*)$$

On procède en deux étapes :

- On applique $(*)$ à des fonctions tests à support compact dans Ω, donc pour $w \in D(\Omega)$ on a : $-\int_\Omega (\Delta u + f) w \, dx = 0 \Rightarrow -\Delta u = f$.
- On applique $(*)$ à des fonctions tests non nulles sur Γ_1, on obtient : $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur Γ_1.

Exo 4 :

① Formulation variationnelle : (FV) :

on a : $\nabla(P\nabla u) = \nabla P . \nabla u + P \Delta u$.

Multiplions la 1ère équation par une fct test $w \in H_0^1(\Omega)$ on obtient :

$w \nabla(P\nabla u) + w g u = f w$. Posons $v = w P \nabla u = \left(w P \frac{\partial u}{\partial x}, w P \frac{\partial u}{\partial y}\right)$,

alors : $\operatorname{div} v = \frac{\partial}{\partial x}(wP) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(wP) + \frac{\partial}{\partial y}(wP)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(wP)$

$$= \nabla(wP) . \nabla u + (wP)\Delta u$$

$$= P\nabla u . \nabla w + w \, \nabla . (P \nabla u)$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (P\nabla u . \nabla w + w \nabla(P\nabla u)) \, dx\,dy = \int_{\partial\Omega} (wP\nabla u).n \, ds \qquad \left(\int_\Omega \operatorname{div} v \, dx\,dy = \int_{\partial\Omega} v.n \, ds\right)$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (w \nabla(P\nabla u)) \, dx\,dy = \int_\Omega P\nabla u . \nabla w \, dx\,dy - \overbrace{\int_{\partial\Omega} wP\frac{\partial u}{\partial n} \, ds}^{=0}.$$

Par conséquent : (FV) : $\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tq :} \\ a(u,w) = L(w), \ \forall w \in H_0^1(\Omega), \text{ où :} \end{cases}$

$$a(u,w) = \int_\Omega P\nabla u . \nabla w \, dx\,dy + \int_\Omega g u w \, dx\,dy, \quad L(w) = \int_\Omega f w \, dx\,dy.$$

(2)

- $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire et $L(\cdot)$ est une forme linéaire.
- $a(\cdot,\cdot)$ continue car : $\forall v, w \in H_0^1(\Omega)$ on a :

$$|a(v,w)| \leq \left(P_{max} + q_{max} C(\Omega)\right) \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \|w\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad C(\Omega) > 0.$$

- $a(\cdot,\cdot)$ coercive, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ on a :

$$a(v,v) = \int_\Omega P|\nabla v|^2 dx\,dy + \int_\Omega q\,|v|^2 dx\,dy \geq P_{min} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx\,dy + q_{min} \int_\Omega |v|^2 dx\,dy$$

$$\geq P_{min} \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

- $L(\cdot)$ continue, en effet : $\forall w \in H_0^1(\Omega)$ on a :

$$|L(w)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} C_1(\Omega) \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad (C_1(\Omega) > 0).$$

(3) D'après le théorème de L.M, (FV) admet une unique solution.