Université Batna 2 **Analyse numérique 2**
Département de mathématiques **Master 1**

Travaux Dirigés
Série 1

Exercice 1 :

Soit $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ et $w = (w_1, w_2, w_3)^T$, on a :

- $rot(u) = \left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}, \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$.
- $u \times w = (u_2 w_3 - u_3 w_2, u_3 w_1 - u_1 w_3, u_1 w_2 - u_2 w_1)$.
- $\operatorname{div}(u(x)) = \sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i}(x)$.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné, $n(x)$ la normale unitaire exterieure à $\partial\Omega$.
1- Montrer que les deux formules suivantes sont équivalentes :

- $\int_\Omega \left(f(x)\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(x) + g(x)\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right) dx = \int_{\partial\Omega} f(x)g(x)n_i(x)ds, \ \ \forall f, g \in C^\infty(\overline{\Omega}),\ i = 1, 2, 3.$
- $\int_\Omega (u(x)\operatorname{div}(w(x)) + \nabla u(x).w(x))\, dx = \int_{\partial\Omega} u(x)(w(x).n(x))ds$, $\forall u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $w \in C^\infty(\overline{\Omega})$, dans $\mathbb{R}^3$.

2- Soient $u,\ w \in C^\infty(\overline{\Omega})$, dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que :
$\int_\Omega (u(x).rot(w(x)) - rot(u(x)).w(x))\, dx = \int_{\partial\Omega} (u(x) \times n(x)).w(x)ds.$

Exercice 2 :

Déduire la formule de Stokes suivante :
$\int_\Omega (\operatorname{div} u(x)).w(x)dx = -\int_\Omega u(x).\nabla w(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(x).(w(x)n(x))ds$, en utilisant la formule de Green suivante :
$\int_\Omega \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx = \int_{\partial\Omega} u(x)n_i(x)ds$, où $w \in C^1(\overline{\Omega})$ et u une fonction à valeurs vectorielles de $C^1(\overline{\Omega})$ à supports bornés dans le fermé $\overline{\Omega}$.

Exercice 3 :

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $u \in H^1(\ \Omega)$, l'unique solution de la formulation variationnelle:
$\int_\Omega (\nabla u(x).\nabla w(x) + u(x)w(x))dx = \int_{\partial\Omega} g(x)w(x)ds + \int_\Omega f(x)w(x)dx$, $\forall w \in H^1(\ \Omega)$,
$f,\ g \in L^2(\Omega)$.
Vérifie l'estimation suivante :
$\|u\|_{H^1(\Omega)} \le c\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\right)$, où $c > 0$ est une constante qui ne dépend pas de u, f et g.

Exercice 4 :

Soit $\Omega =]0,1[\times]0,1[$, et soit $w \in H_0^1(\Omega)$. Montrer que : $\|w\|_{L^2(\Omega)} \le c\,\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}$, où : $\|w\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int\limits_0^1\int\limits_0^1 |(w(x_1, x_2))|^2\, dx_1 dx_2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 5 :

On rappelle que $H_0^1(\Re) = H^1(\Re)$, et que toute $u \in H^1(\Re)$ est continue. On admet de plus que si $u \in H^1(\Re)$, alors $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} u(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} u(x) = 0$.
1) A-t-on l'inégalité de poincaré sur $H_0^1(\Re) = H^1(\Re)$? Justifier.
2) Que peut-on conclure.