Université Batna 2
Faculté de mathématiques et informatique
Département de mathématiques
A.N.- Master 1

Travaux dirigés

Série 1

Exercice 1 :

Considérons les problèmes aux limites suivants :

1- $\begin{cases} -u''(x) + e^x u(x) = f(x), & \text{pour } \; x \in \,]0,1[\\ u(0) = a, \quad u(1) = b \end{cases}$.

2- $\begin{cases} -u''(x) = f(x), & \text{pour } \; x \in \,]0,1[\\ u(0) = 0, \quad u'(1) = 2 \end{cases}$.

où f est une fonction continue.

a) Donner un schéma numérique basé sur une formule de différences finies pour chaque problème.

b) Ecrire le système linéaire correspondant.

Exercice 2 :

On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver une fonction } u : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ telle que :} \\ -\dfrac{d}{dx}[(2+\sin x)\dfrac{d}{dx}u(x)] = f(x) \;, \quad x \in \,]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où $f \in C\left([0,1]\right)$.

Ecrire un schéma basé sur une formule de différences finies avec un pas constant en donnant la matrice et le second membre.

(Indication: utiliser formule de différences finies centrées : $w'(x_i) \simeq \dfrac{w(x_{i+\frac{1}{2}}) - w(x_{i-\frac{1}{2}})}{h}$).

Exercice 3 :

Considérons les problèmes elliptiques suivants :

1- $\begin{cases} -\Delta u(x,y) = 0, & \text{pour } \; (x,y) \in \,]0,1[\times]0,1[\\ u(0,y) = y, \, u(x,0) = -x, \, u(1,y) = -1+y, \, u(x,1) = 1-x \end{cases}$.

2- $\begin{cases} -\Delta u(x,y) = f(x,y), & \text{pour } \; (x,y) \in \Omega = \,]0,a[\times]0,b[\\ u(x,y) = 0, \; \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$

f est une fonction régulière dans Ω.

a) Proposer un schéma numérique basé sur une formule de différences finies pour résoudre les problèmes précédents.

b) Ecrire le système linéaire corrèspondant.

Exercice 4 :

Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u\,''(x) + g(x).u'(x) = 0 & \text{pour} \quad x \in]0,1[\,, \\ u(0) = \alpha \quad , \quad u(1) = \beta \end{cases}$$

où $g \in (C(\ [0,1]),\ IR_+)$, et $\alpha, \beta \in IR$.

1- Donner un schéma numérique basé sur une formule de différences finies pour résoudre le problème précédent et ecrire le système linéaire corrèspondant.

2- Montrer que $Au \geq 0 \Longrightarrow u \geq 0$, (composante par composante).

3- Montrer que A est inversible.

4- Montrer que si u est solution de $Au = f$ alors :

$$\min(\alpha, \beta) \leq u_i \leq \max(\alpha, \beta).$$

Exercice 5 :

Considérons le problème aux limites elliptique suivant :

$$(P) \begin{cases} -u''(x) = f(x), & \text{pour} \quad x \in]0,1[\\ \quad u(0) = \ u(1) = 0 \end{cases}$$

1- Ecrire le schéma numérique associé à (P) et le système linéaire correspondant.

2- Montrer que $f \geq 0 \Longrightarrow u \geq 0$.

3- Montrer que A est une matrice inversible.

4- Montrer que le système $Au = f$ admet une solution unique.

5- Montrer que le schéma numérique $(Au = f)$ est stable pour la norme $\|.\|_\infty$.