Université Batna 2 **Analyse numérique 2**
Département de mathématiques **Master 1**

Travaux Dirigés
Série 2

Exercice 1 :

Considérons le problème variationnel suivant :

$$(FV)\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u,w) = L(w), \ \ \forall w \in H^1(\Omega). \end{cases}$$

où

$$a(u,w) = \int_\Omega \nabla u(x) \nabla w(x) dx + \int_\Omega g(x) u(x) w(x) dx$$

et

$$L(w) = \int_\Omega f(x) w(x) dx$$

avec $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné, $f \in L^2(\Omega)$, $a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $L : E \longrightarrow \mathbb{R}$,
$0 < g_0 \leq g(x) \leq g_1$, $\forall x \in \Omega$, g_0, $g_1 \in \mathbb{R}$.
Montrer que (FV) admet une solution unique.

Exercice 2 :

Considérons le problème aux limites suivant :

$$(P)\begin{cases} -\alpha \Delta u(x_1,x_2) + \beta \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2) + \lambda \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,x_2) + u(x_1,x_2) = f(x_1,x_2), \ \ \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u(x_1,x_2) = 0, \quad \text{sur } \ \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné, $f \in L^2(\Omega)$, et $\alpha > 0$.
Etudier l'existence et l'unicité de la solution du problème (P).

Exercice 3 :

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_0$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_0 = \varnothing$, et $f \in L^2(\Omega)$, considérons le problème aux limites suivant :

$$(P)\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), \ \ x \in \Omega \\ u(x) = 0, \ \ x \in \Gamma_0 \\ \nabla u(x).n(x) = 0, \ \ x \in \Gamma_1. \end{cases}$$

On suppose que la mesure $(n-1)$ dimensionnelle de Γ_0 est non nulle. n est la normale unité à $\partial\Omega$ exterieure à Ω.
1) Donner la formulation variationnelle (FV) de (P).
2) Montrer que (FV) admet une solution unique.
3) Montrer que $(FV) \Longrightarrow (P)$.

Exercice 4 :

Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\nabla(p(x,y)\nabla u(x,y)) + g(x,y)u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$, ouvert borné de classe C^1, $0 < p_{\min} \leq p(x,y) \leq p_{\max}$, $0 \leq g_{\min} \leq g(x,y) \leq g_{\max}$, et $f, p, g \in L^2(\Omega)$.

1) Donner une formulation variationnelle (FV) de (P).

2) Vérifier les hypothèses du théorème de Lax-Milgram.

3) Conclure.