Université Batna 2
Faculté de mathématiques et informatique
Département de mathématiques
A.N.- Master 1

Travaux dirigés

Série 2

Exercice 1 :

Soit E un espace de Hilbert.

1- Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|\langle u, w\rangle_E| \leq \|u\|_E \|w\|_E, \quad \forall u, w \in E.$$

2- Montrer que l'inégalité triangulaire :

$$\|u+w\| \leq \|u\| + \|w\|$$

est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

3- Montrer l'inégalité triangulaire inverse :

$$\|u-w\| \geq |\|u\| - \|w\||, \quad \forall u, w \in E.$$

Exercice 2 :

Considérons le problème de Dirichlet non- homogène suivant :

$$(P)\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), & \text{pour } x \in \Omega \\ u(0) = \alpha, \ u(1) = \beta \end{cases}.$$

où $\Omega =]0,1[$, $f \in L^2(\Omega)$.

1- Donner une formulation variationnelle (FV) de (P).

2- Verifier les hypothèses du théorème de Lax-Milgram.

3- Conclure.

Exercice 3 :

Soit $\Omega =]0,1[$, $f \in L^2(\Omega)$,

Considérons le problème aux limites suivants :

$$(P)\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), & \text{pour } x \in \Omega \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}.$$

1- Donner une formulation variationnelle (FV) de (P).

2- Etudier l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle (FV).

3- Montrer que la solution de (FV) est une solution de (P).

Exercice 4 :

Considérons le problème aux limites suivants :

$$(P)\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), & \text{pour } x \in \Omega =]0,1[\\ u'(0) - u(0) = 0, \ u'(1) = -1 \end{cases}.$$

avec $f \in L^2(\Omega)$.

1- Donner une formulation variationnelle (FV) de (P).

2- Montrer que la formulation variationnelle (FV) admet une unique solution.

Exercice 5 :

Soient a, $b \in \mathbb{R}$, tel que $a < b$, considérons le problème aux limites suivant :

$$(P)\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), \quad \text{pour} \;\; x \in \Omega =]a, b[\\ u'(a) + \alpha u(a) = g_1, \\ u'(b) + \beta u(b) = g_2 \end{cases}.$$

avec $f \in L^2(\Omega)$, α, β, g_1, $g_2 \in \mathbb{R}$.

1- Etablir une formulation variationnelle (FV) associé au problème (P).

2- Montrer Montrer que le problème (FV) admet une unique solution.