Université Batna 2
Faculté de mathématiques et informatique
Département de mathématiques
A.N- Master 1

Travaux dirigés

Série 3

Exercice 1 :

Lemme 2.3.2 (Cours).

Exercice 2 :

Lemme 2.3.4 (Cours).

Exercice 3 :

Considérons le problème de Dirichlet non-homogène suivant :

$$(P)\begin{cases} -u''(x)+u(x)=f(x), & \text{pour } \ x\in\,]0,1[\\ u(0)=\alpha,\ u(1)=\beta \end{cases}.$$

$f\in L^2(\Omega)$.

Appliquer la méthode des éléments finis $P1$ pour résoudre le problème (P).

Exercice 4 :

Soient $\Omega=\,]0,1[,\ f\in L^2(\Omega)$,

Considérons la formulation variationnelle suivante :

$$(FV)\begin{cases} \text{Trouver } u\in H^1(\Omega), \text{ tel que} \\ a(u,w)=L(w),\ \forall w\ \in H^1(\Omega) \end{cases}.$$

avec $a(u,w)=\int\limits_\Omega u'(x)w'(x)dx+\int\limits_\Omega u(x)w(x)dx$, et $L(w)=\int\limits_\Omega f(x)w(x)dx$.

1- Ecrire la formulation variationnelle discrétisée $(FV)_h$ associée au problème (FV) dans le cadre d'une résolution par la méthode des éléments finis $P1$.

2- En déduire que $(FV)_h$ est équivalente à la résolution d'un système linéaire dont on précisera la dimension, la matrice et le second membre.

Exercice 5 : (Devoir)

Considérons la formulation variationnelle suivante :

$$(FV)\begin{cases} \text{Trouver } u\in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u,w)=L(w)\ ,\ \forall w\in H^1(\Omega), \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} a(u,w)=\int\limits_\Omega g(x)u'(x)w'(x)dx+\int\limits_\Omega h(x)u(x)w(x)dx+\beta u(b)w(b)+\beta u(a)w(a), \\ L(w)=\int\limits_\Omega f(x)w(x)dx, \end{cases}$$

$\Omega=\,]a,b[$, $0<M_1\leq g(x)\leq M_2<+\infty$, p.p, $x\in\Omega$, $0<m_1\leq h(x)\leq m_2<+\infty$, p.p, $x\in\Omega$, et $\beta\in R_+$.

1) Montrer que $|w(s)|\leq c\,\|w\|_{H^1(\Omega)}$, pour tout $s\in[a,b]$, $w\in H^1(\Omega)$, tel que la constante $c>0$, à déterminer.

2) Etudier l'existence et l'unicité de la solution de (FV).

3) On suppose que $(g,h,f) \in C^1(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega}) \times L^2(\Omega)$. Montrer que la solution du problème (FV) appartient à $H^2(\Omega)$ et qu'elle vérifie les équations du problème (P) suivant :

$$(P)\begin{cases} -(g(x)u'(x))' + h(x)u(x) = f \ , \ \ x \in \Omega \\ \ g(b)u'(b) + \beta u(b) = 0 \\ -g(a)u'(a) + \beta u(a) = 0 \end{cases}$$

4) Dans le cadre d'une résolution par la méthode des éléments finis $P1$, on introduit le maillage de pas $h = \dfrac{b-a}{n+1}$ défini par les points $x_i = a + ih$, $i = 1, ..., n+2$.

On considère l'espace des éléments finis $P1$ de Lagrange défini par :

$$E_h = \left\{ w_h \in C([a,b]), \text{ tel que : } w_h \big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P1,\ i = 1, ..., n+1 \right\}.$$

Ecrire la formulation variationnelle approchée $(FV)_h$ dans l'espace E_h. En déduire que la recherche de la solution de $(FV)_h$ revient à la résolution d'un système linéaire $A_h u_h = L_h$. A expliciter dans le cas où $g(x) = x(x+1)$, $h(x) = x$ et $f(x) = e^x(x+1)$.

A remettre avant le 30/01/2021, à l'adresse email : n.boudiaf@univ-batna2.dz