
Corrigé du TD 3 :"Intégration Numérique"

Exercice 1. Soient :$I_1 = \int_0^1 e^{-x^2} dx, \quad I_2 = \int_0^\pi \sin x dx$.

1. Déterminons une valeur approximative de I_1, en utilisant la méthode du trapèze simple (n=1) puis par celle du trapèze généralisée ($n = 2$), en estimant l'erreur théorique à chaque fois.
1.1) Trapèze simple ($n = 1$) : Pour $f(x) = e^{-x^2}$, $a = 0$ et $b = 1$, on a

$$\begin{aligned} I_1 &\simeq \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] \\ &= \frac{1-0}{2}\left[e^{-0} + e^{-1}\right] = \frac{1}{2}(1 + e^{-1}) = 0,6839. \end{aligned}$$

Donc la valeur 0,6839 est une approximation pour $\int_0^1 e^{-x^2} dx$.
* Pour l'erreur théorique : On a $f \in C^2([0,1])$, d'où

$$R(f) = -\frac{h^3}{12} \times f^{(2)}(\xi), \ \xi \in [a,b], h = b - a.$$

Par suite

$$\begin{aligned} |R(f)| &= \frac{(b-a)^3}{12}\left|f^{(2)}(\xi)\right| \\ &\leq \frac{1}{12} \times M, \end{aligned} \tag{0.1}$$

où $M = \max_{0\leq\xi\leq1}\left|f^{(2)}(\xi)\right|$.
On a $f(x) = e^{-x^2}$, alors $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ et aussi $f''(x) = 2xe^{-x^2}(2x^2 - 1)$. En utlisant le tableau de variation de f'', on peux vérifier que f'' est croissante sur $[0,1]$. Ainsi,

$$M = \max_{0\leq\xi\leq1}\left|f^{(2)}(\xi)\right| = \left|f^{(2)}(1)\right| = 2e^{-1} \simeq 0,7358.$$

En substituant ceci dans (0.1), on obtient l'estimation suivante pour l'erreur théorique $|R(f)| \leq \frac{0,7358}{12} = 0,0613.$
1.2) Trapèze composite ($n = 2$) : On a

$$\begin{aligned} I_1 &\simeq \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right] \\ &= \frac{h}{2}[f(a) + f(b) + 2f(x_1)], \end{aligned}$$

où $h = \frac{b-a}{2} = \frac{1}{2}, x_1 = a + h = \frac{1}{2} = \frac{a+b}{2}$. Par suite,

$$I_1 \simeq \frac{1}{4}\left[1 + e^{-1} + 2e^{-\frac{1}{4}}\right] = 0,7319.$$

* Pour estimer l'erreur théorique : on a

$$\begin{aligned}
|R(f)| &= \left|\frac{-n(h)^3}{12} \times f^{(2)}(\xi)\right|, \ \xi \in [0,1]\,, h = \frac{b-a}{n} \\
&\leq \left|\frac{-2(1/2)^3}{12}\right| \times M, \ \ M = 0,7358 \\
&\leq \frac{0,7358}{12.(2)^2} \simeq 0,0153.
\end{aligned}$$

Donc, la valeur 0,0153 est une estimation de l'erreur théorique de cette méthode.

2. En suivant les mêmes étapes précedentes, on peut calculer une valeur approchée de $I_2 = \int_0^\pi \sin x dx$ par la méthode de Simpson (simple) et celle de Simpson composite (n=4) comme suit

2.1) Simpson(simple) $(n = 2)$: On applique la formule de Simpson suivante :

$$I_2 \simeq \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right]$$

ou bien

$$I_2 \simeq \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right], \ h = \frac{b-a}{2},$$

avec $f(x) = \sin x, a = 0$ et $b = \pi$,

* Pour l'erreur théorique et tant que $f \in C^2([0,\pi])$, on applique la relation

$$R(f) = (-h^5/90) \times f^{(2)}(\xi), \ \xi \in [0,\pi]\,.$$

2.2) Simpson généralisée (ou composite) $(n = 4)$:

Puisque n est paire $(n = 2k, k \in \mathbb{N}^*)$, alors cette méthode est applicable. Donc, on a

$$I_2 \simeq \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_n) + 4.\sum_{i=1(i:impaire)}^{n-1} f(x_i) + 2.\sum_{i=1(i:paire)}^{n-2} f(x_i)\right],$$

ici $h = \frac{b-a}{4} = \frac{\pi}{4}$ et $\forall i = \overline{1,3}, x_i = x_0 + ih$. D'où

$$x_0 = 0, \ x_1 = x_0 + h = \frac{\pi}{4}, \ x_2 = x_0 + 2h = \frac{\pi}{2}, \ x_3 = x_0 + 3h = \frac{3\pi}{4}, \ x_4 = \pi.$$

Ainsi,

$$I_2 \simeq \frac{\pi}{12}\left[\sin(0) + \sin(\pi) + 4\left(\sin(\frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{3\pi}{4})\right) + 2\sin(\frac{\pi}{2})\right].$$

Après les calcules, on obtient $I_2 \simeq \frac{\pi}{6}(1 + 2\sqrt{2}) = 2,0053.$

* Estimons l'erreur théorique : Comme $f \in C^4([0,1])$, alors

$$R(f) = \frac{-(b-a)(h^4)}{180} \times f^{(4)}(\xi), \ \xi \in [0,\pi]\,.$$

Comme $f(x) = \sin x$, alors $f^{(4)}(\xi) = \sin x, \forall x \in [0, \pi]$. Ainsi, on trouve

$$|R(f)| \leq \frac{\pi}{180}(\frac{\pi}{4})^4 \times \max_{0 \leq \xi \leq \pi} \left|f^{(4)}(\xi)\right|$$

$$|R(f)| \leq \frac{\pi^5}{180(4^4)} \times 1 = ...?.$$

Ici $M = \max_{0 \leq \xi \leq \pi} \left|f^{(4)}(\xi)\right| = |\sin \pi| = 1$.

Remarques :

a) L'erreur obtenue avec Simpson généralisée doit être inférieure ou égale à celle obtenue avec Simpson simple.

b) Lorsque "n" le nombres de subdivision de l'intervalle de l'intégration est plus grand, alors l'erreur de l'intégration devient plus petit (Ainsi , la formule de quadrature sera plus précise).

3. Comme la primitive de la fonction $f : x \longrightarrow \sin x$ est connue, alors on peut calculer la valeur exacte de I_2, la comparer avec les résultats obtenus dans (2) et aussi calculer l'erreur commise par chaque approximation à l'aide de la relation $E_c = I_2 - J(f)$, (J_f est la valeur approximative de I_2).■

Exercice 2. Calculons n : le nombre de subdivisions de $[-\pi, \pi]$ nécessaires pour évaluer à $(0, 5)10^{-3}$ près, grâce à la méthode de Simpson, l'intégrale $I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx$.
Pour cela, on résoud l'inégalité suivante (où n est l'inconnu) :

$$|R(f)| \leq (0.5)10^{-3}, \tag{0.2}$$

où $R(f) = \frac{-(b-a)h^4}{180} \times f^{(4)}(\xi),\ \xi \in [-\pi, \pi]$: " c'est l'erreur de Simpson généralisée".
On a $h = \frac{b-a}{n} \Rightarrow h^4 = \left[\frac{\pi-(-\pi)}{n}\right]^4 = \frac{(2\pi)^4}{n^4}$ et $f(x) = \cos x \Rightarrow f^{(4)}(x) = \cos x, \forall x \in [-\pi, \pi]$.
Par suite

$$|R(f)| = \frac{2\pi}{180} \times \frac{16\pi^4}{n^4} |\cos \xi| \leq \left(\frac{8\pi^5}{45}\right).\frac{1}{n^4}.$$

Maintenant, pour que $|R(f)| \leq (0.5)10^{-3}$, il suffit que

$$\left(\frac{8\pi^5}{45}\right).\frac{1}{n^4} \leq (0.5)10^{-3}.$$

ce qui est équivalent à $n \geq 20$. Ainsi, on prend $n = 20$ comme nombre de subdivision necessaire, puisque c'est "paire" est minimale. ■

Exercice 4.

1. Déterminons le polynôme de Lagrange P interpolant une fonction f aux points -1/2, 0, 1/2 :

$$P(x) = L_0(x)f(-\frac{1}{2}) + L_1(x)f(0) + L_2(x)f(\frac{1}{2}), \forall x \in \mathbb{R}.$$

   Après les calcules (voir chaptre 1) : $L_0(x) = 2x^2 - x, L_1(x) = -4x^2 + 1$ et $L_2(x) = 2x^2 + x$. Ainsi,

$$P(x) = (2x^2 - x)f(-\frac{1}{2}) + (-4x^2 + 1)f(0) + (2x^2 + x)f(\frac{1}{2}).$$

2. En déduire la formule d'intégration (1) :
   Par intégration du polynôme P (obtenue ds la question1), on obtient $\alpha = \gamma = \frac{4}{3}, \beta = \frac{-2}{3}$.
   (car $\int_{-1}^{1}(2x^2 - x)dx = \frac{4}{3}, \int_{-1}^{1}(-4x^2+1)dx = -\frac{2}{3}, \int_{-1}^{1}(2x^2+x)dx = \frac{4}{3}$).
   Ainsi, nous obtenons,
$$\int_{-1}^{1} f(x) \approx \frac{4}{3}f(-1/2) - \frac{2}{3}f(0) + \frac{4}{3}f(1/2). \tag{0.3}$$

3. Donnons une valeur approchée de $\int_a^b f(x)dx$. En utilisant le changement de variable : $y = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}x$, il résulte
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left[\frac{4}{3}f\left(\frac{b+3a}{4}\right) - \frac{2}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{4}{3}f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right]. \tag{0.4}$$

4. **Application.** Calculons I_1 à l'aide de la formule de quadrature (0.3) et I_2 à l'aide de (0.4) :
   * On posant $f(x) = e^x$ dans (0.3), il résulte que
$$I_1 = \int_{-1}^{1} e^x dx \approx \frac{4}{3}\left(e^{1/2} + e^{-1/2}\right) - \frac{2}{3}.$$
   * Aussi, si $f(x) = e^x$ dans (0.4), alors
$$\begin{aligned} I_2 = \int_{-5}^{3} e^x dx &\approx 4\left[\frac{4}{3}f(-3) - \frac{2}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(1)\right] \\ &= \frac{8}{3}\left(2e^{-3} - e^{-1} + 2e\right). \blacksquare \end{aligned}$$

Exercice 3. Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Calculons les coéfficients des formules de quadrature suivantes :

1. $\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq J_1(f)$, avec $J_1(f) = \lambda_0 f(-\frac{1}{3}) + \lambda_1 f(\frac{1}{3})$, pour que cette formule soit exacte pour tout $f \in \mathbb{P}_1[X]$.

2. $\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq J_2(f)$, avec $J_2(f) = \lambda_0 f(-\frac{3}{5}) + \lambda_1 f(-\frac{1}{5}) + \lambda_2 f(\frac{1}{5}) + \lambda_3 f(\frac{3}{5})$, pour que 7 formule soit exacte pour tout $f \in \mathbb{P}_3[X]$.

==

1. Pour que la formule de quadrature J_1 soit exacte sur $\mathbb{P}_1[X]$, il faut et il suffit que l'erreur d'intégration : $R(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx - J_1(f)$ soit nulle pour tout $f \in \mathbb{P}_1[X]$. Comme $\{1, X\}$ est une base de $\mathbb{P}_1[X]$, alors il suffit que $R(f) = 0$ pour :
$f \equiv 1$ (c.à.d, $f(x) = 1$ sur $[-1,1]$) et pour $f : x \mapsto x, \forall x \in [-1,1]$.
a) Pour $f \equiv 1$, il vient que $f(-\frac{1}{3}) = f(\frac{1}{3}) = 1$. D'où
$$R(f) = \int_{-1}^{1} 1dx - J_1(1) = 0 \Leftrightarrow [x]_{-1}^{1} - [\lambda_0 \times 1 + \lambda_1 \times 1] = 0,$$
ce qui donne l'équation : $2 - \lambda_0 - \lambda_1 = 0 \ldots\ldots..(Eq_1)$.
b) Pour $f : x \mapsto x, \forall x \in [-1,1]$, il résulte que $f(-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}$ et $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$. Ainsi
$$R(f) = \int_{-1}^{1} xdx - J_1(X) = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} - \left[\lambda_0\left(-\frac{1}{3}\right) + \lambda_1\frac{1}{3}\right] = 0,$$

ce qui implique que $-\frac{1}{3}\lambda_0 + \frac{1}{3}\lambda_1 = 0$........$(Eq_2)$.
La résolution des deux équations (Eq_1) et (Eq_2) donne : $\lambda_0 = \lambda_1 = 1$. Donc, la 1ière formule de quadrature est :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq J_1(f) = f(-\frac{1}{3}) + f(\frac{1}{3}).$$

2. De meme, pour que la formule de quadrature $J_2(f)$ soit exacte sur $\mathbb{P}_3[X]$, il faut et il suffit que $R_2(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx - J_2(f) = 0$, pour tout $f \in \{1, X, X^2, X^3\}$.

- Pout $f \equiv 1$: on a

$$R(f) = \int_{-1}^{1} 1dx - J_2(1) = 0 \Leftrightarrow [x]_{-1}^{1} - [\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3] = 0,$$

ce qui donne : $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2$......$(Eq_1)$

- Pout $f \equiv X$, sur Ω : on a

$$R(f) = \int_{-1}^{1} xdx - J_2(X) = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} - \left[\lambda_0(-\frac{3}{5}) + \lambda_1(-\frac{1}{5}) + \lambda_2(\frac{1}{5}) + \lambda_3(\frac{3}{5})\right] = 0,$$

ce qui implique que $-\frac{3}{5}\lambda_0 - \frac{1}{5}\lambda_1 + \frac{1}{5}\lambda_2 + \frac{3}{5}\lambda_3 = 0$........$(Eq_2)$.

- Pout $f \equiv X^2$, sur Ω : on a

$$R(f) = \int_{-1}^{1} x^2dx - J_2(X^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} - \left[\lambda_0(-\frac{3}{5})^2 + \lambda_1(-\frac{1}{5})^2 + \lambda_2(\frac{1}{5})^2 + \lambda_3(\frac{3}{5})^2\right] = 0,$$

i.e, $9\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + 9\lambda_3 = \frac{50}{3}$........$(Eq_3)$.

- Pout $f \equiv X^3$, sur Ω : on a

$$R(f) = \int_{-1}^{1} x^3dx - J_2(X^3) = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} - \left[\lambda_0(-\frac{3}{5})^3 + \lambda_1(-\frac{1}{5})^3 + \lambda_2(\frac{1}{5})^3 + \lambda_3(\frac{3}{5})^3\right] = 0,$$

i.e, $-27\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 + 27\lambda_3 = 0$........$(Eq_4)$.

Donc, pour déteminer les coéfficients $\lambda_i, i = 0, ..., 3$, on doit résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \\ 9 & 1 & 1 & 9 \\ -27 & -1 & 1 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{50}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Après les calcules (par substitution ou par la méthode de Cramer), on obtient :

$$\lambda_0 = \lambda_3 = 0,9167, \lambda_1 = \lambda_2 = 0,0833.$$

Ainsi, on obtient :

$$J_2(1) = 0,9167.f\left(\frac{-3}{5}\right) + 0,0833.f\left(\frac{-1}{5}\right) + 0,0833.f\left(\frac{1}{5}\right) + 0,9167.f\left(\frac{3}{5}\right).$$

Remarques :
Au semesttre 2, vous allez étudier différentes méthodes numériques (Directes et Itératives) permettant la résolution adéquate des systèmes linéaires de grande taille et avec des matrices pleine (comme le système précedent).