

# Cours d'Analyse Numérique 2

*2<sup>ème</sup> Année S.A.D*

*Dr. Oulia Bouhoufani*

4 mai 2023

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Eléments d'Analyse Matriciel</b>	<b>2</b>
1	Notions Préliminaires . . . . .	2
2	Trace et Déterminant d'une Matrice . . . . .	3
2.1	Définitions . . . . .	3
2.2	Application : " Méthode de Cramer" . . . . .	4
3	Valeurs propres, Vecteurs propres et Rayant spectral . . . . .	4
4	Les Normes Matricielles . . . . .	4
4.1	Les normes Vectorielles . . . . .	4
4.2	Les normes Matricielles . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Résolution des Systèmes Linéaires</b>	<b>6</b>
1	Introduction . . . . .	6
1.1	La Résolution des Systèmes Triangulaires . . . . .	7
1.2	Tp 1 : Programmation en Matlab du problème 1.1 . . . . .	7
2	Les Méthodes Directes . . . . .	7
2.1	Méthode de Gauss . . . . .	7
2.2	Méthode de Gauss-Jordan . . . . .	12
2.3	Factorisation LU . . . . .	16
2.4	Méthode de Cholesky $BB^t$ . . . . .	19
3	Les Méthodes Itératives . . . . .	21
3.1	Méthode de Jacobi . . . . .	23
3.2	Méthode de Gauss-Seidel . . . . .	24
3.3	Méthode de Relaxation . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Résolution des Equations Non-Linéaires</b>	<b>27</b>
<b>4</b>	<b>Résolution Numérique des Equations Différentielles Ordinaires</b>	<b>28</b>

# Chapitre 1

## Eléments d'Analyse Matriciel

On note par  $M_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices de type  $n$  (matrices carrés de  $n$  lignes et  $n$  colonnes) et à coefficients dans  $\mathbb{R}$ .

### 1 Notions Préliminaires

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . On a les définitions suivantes :

- **Matrice Inversible** : On dit que  $A$  est une matrice inversible, s'il existe une matrice  $A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$  telle que :  $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ . (où  $I_n$  est la matrice unitaire d'ordre  $n$ ).
- **Matrice Symétrique** :  $A$  est dite symétrique ssi :  $A = A^t$  (où  $A^t$  est la transposée de  $A$  définie par  $A^t = (a_{ji})$ , t.q  $A = (a_{ij})$ ).
- **Matrice Orthogonal** : On dit que  $A$  est orthogonale ssi :  $AA^t = A^tA = I_n$ .
- **Matrice Diagonale** :  $A$  est dite diagonale ssi :  $a_{ij} = 0$  lorsque  $i \neq j$ , pour tout  $i, j = \overline{1, n}$ .
- **Matrice Triangulaire Inférieure** :  $A$  est triangulaire inférieure ssi :  $a_{ij} = 0$ ,  $i < j$ .
- **Matrice Triangulaire Supérieure** :  $A$  est triangulaire supérieure ssi :  $a_{ij} = 0$ ,  $i > j$ .

Rappelons quelques propriétés algébriques élémentaires des matrices triangulaires :

1. Le déterminant d'une matrice triangulaire (et aussi diagonale) est le produit des termes diagonaux, c.à.d,  $\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}$ .
  2. L'inverse d'une matrice triangulaires inférieure (respectivement supérieure) est encore une matrice triangulaire inférieure (respectivement supérieure).
  3. Le produit de deux matrices triangulaires inférieures (respectivement triang supérieures) est encore une matrice triangulaire inférieure (respectivement supérieure).
- **Matrice Pleine** : On dit que  $A$  est une matrice pleine s'il elle ne contient pas beaucoup de zéros (peux de coefficients nuls).
  - **Matrice Creuse** :  $A$  est une matrice creuse s'il elle contient beaucoup de zéros (c.à.d, non pleine).

● **Matrice avec une diagonale dominante :**

\*  $A$  est à diagonale dominante  $\Leftrightarrow |a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$ , pour tout  $i = \overline{1, n}$ .

\*  $A$  est à diagonale strictement dominante  $\Leftrightarrow |a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$ , pour tout  $i = \overline{1, n}$ .

● **Matrices Semblables :** Soit  $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ . On dit que  $A$  et  $B$  sont semblables ssi : il existe une matrice inversible  $C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ , telle que

$$B = C^{-1}AC$$

(ou si  $A = C^{-1}BC$ .)

● **Matrice Définie Positive :**  $A$  est dite matrice définie positive sur  $\mathbb{R}^n$  ssi :

$$\langle Ax, x \rangle = x^t Ax > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\},$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposition 1 :** Soit  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. Si  $A$  est définie positive, alors elle est inversible.
2. Si  $A$  est définie positive, alors toutes les sous-matrices principales  $A_k, k = \overline{1, n-1}$  sont inversibles, où  $A_k = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,k}}$ .
3. Si  $A$  est définie positive, alors tous les éléments diagonaux de  $A$  sont strictement positifs.
4. Supposant que  $A$  est symétrique. Dans ce cas,  $A$  définie positive  $\Leftrightarrow$  toutes les valeurs propres de  $A$  sont strictement positives

## 2 Trace et Déterminant d'une Matrice

### 2.1 Définitions

**Definition 2.1 "Trace d'une matrice"**

La trace de  $A$  qu'on note  $tr(A)$  est la somme de ses coefficients diagonaux ;

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

**Definition 2.2 "Déterminant d'une matrice"**

On appelle déterminant de  $A$ , qu'on note  $det(A)$  ou  $|A|$ , le scalaire défini par :

$$\begin{aligned} det(A) &= a_{11}det(A_{11}) - a_{12}det(A_{12}) + \dots + (-1)^n a_{1n-1} + (-1)^{n+1} a_{1n}det(A_{1n}) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j}det(A_{1j}), \dots \dots \dots (*) \end{aligned}$$

où  $A_{1j}$  est une matrice de taille  $(n-1)$  obtenue en éliminant de la matrice  $A$  la ligne '1' et la colonne 'j'.

**Remarque :**

On obtient la même valeur du déterminant, si on considère la ligne numéro  $i'$ ; t.q  $i = 2, \dots, n$  au lieu de la première ligne dans la relation (\*), c.à.d,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}).$$

**Propriétés :**

1.  $\det(A^t) = \det(A)$
2.  $\det(AB) = \det(BA) = \det(A) \cdot \det(B)$
3.  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ , si  $\det(A) \neq 0$
4.  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A), \forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

## 2.2 Application : " Méthode de Cramer "

Voir le lien suivant :

$$\text{https ://youtu.be/12a4aHIkZK8}$$

## 3 Valeurs propres, Vecteurs propres et Rayant spectral

● **Valeurs Propres :**

Les valeurs propres  $\lambda_i = \lambda_i(A), i = \overline{1, n}$  d'une matrice  $A$  d'ordre  $n$ , sont les  $n$  racines réelles ou complexe, simples ou multiples du polynôme caractéristique  $P_A$  de la matrice  $A$  t.q :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

● **Vecteurs Propres :**

le vecteur non nul  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $Ax = \lambda x$  est Le vecteur propre de  $A$  associé à la valeur  $\lambda$ .

● **Spectre d'une matrice :**

L'ensemble des valeurs propres de  $A$  est appelé spectre de  $A$  (on le note par  $Sp(A)$ ) c.à.d,

$$Sp(A) = \cup_{i=1}^n \{\lambda_i(A)\}.$$

● **Rayon spectral :**

Le rayon spectral d'une matrice  $A$ , qu'on note par  $\rho(A)$  est le nombre positive défini par :

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \text{ valeur propre de } A\}.$$

## 4 Les Normes Matricielles

### 4.1 Les normes Vectorielles

**Definition 4.1** Soit  $V$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}^n$ . On dit qu'une application  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une norme sur  $V$  ssi le spropriétés suivantes sont vérifiées :

1.  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \forall x \in V$
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in V$

3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in V.$

**Exemples :**

Si on prend  $V = \mathbb{R}^n$ , alors les applications suivantes, notées par  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ , définissent des normes sur l'espace  $\mathbb{R}^n$  :

1.  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
2.  $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{1/2}$  (Norme Euclidienne)
3.  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$

**4.2 Les normes Matricielles**

**Definition 4.2** Une norme matricielle sur l'espace des matrices de type  $n \times m$  est une application  $\|\cdot\| : \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+,$  telle que :

1.  $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0, \forall A \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$
2.  $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$
3.  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \forall A, B \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$
4.  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \forall A \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R}), B \in \mathbb{M}_{m \times p}(\mathbb{R}).$

**Exemples :**

Soit  $A \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R}).$  Les applications suivantes, notées par  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ , définissent des normes sur l'espace  $\mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$  :

1. 
$$\|A\|_1 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,$$
2. 
$$\|A\|_\infty = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|,$$
3. 
$$\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = (\rho(A^t A))^{1/2}.$$

**Definition 4.3 "Norme Induite"**

On appelle norme matricielle induite par la norme vectorielle  $\|\cdot\|$  (ou aussi norme Subordonnée) sur l'espace  $\mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R}),$  qu'on note aussi par  $\|\cdot\|,$  la norme définie par :

$$\|A\| = \max_{x \in \mathbb{R}^m, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\mathbb{R}^n}}{\|x\|_{\mathbb{R}^m}} \dots\dots\dots (**)$$

**Remarques :**

1. Les normes matricielles induites dependent de la norme vectorielle considérées.
2. La matrice  $A$  n'est pas forcément carrée.
3. La notation "max" (dans la définition (\*\*)) laisse supposer qu'il existe effectivement un vecteur  $\tilde{x} \neq 0$  pour lequel le maximum est atteint (ce qui implique que pour ce  $\tilde{x}$  on a  $\|A\tilde{x}\| = \|A\| \|\tilde{x}\|).$

# Chapitre 2

## Résolution des Systèmes Linéaires

### 1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de résoudre le système de "n" équations linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right. \quad (1.1)$$

où les  $x_j, j = 1, \dots, n$  sont les inconnus, les  $a_{ij}, i, j = \overline{1, n}$  les coefficients du système et les  $b_i, i = 1, \dots, n$  les composantes du second membre.

Pour résoudre le système (1.1), il est commandé de le mettre sous la forme matricielle  $Ax = b$ , où  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}), b = (b_i)_i \in \mathbb{R}^n$  et  $x = (x_j)_j \in \mathbb{R}^n$ .

**Definition 1.1** On appelle solution du système (1.1) tout  $x = (x_j)_j \in \mathbb{R}^n$  satisfaisant (1.1).

**La résolution théorique du système (1.1) :**

Si la matrice des données  $A$  est inversible (c.à.d, si  $\det(A) \neq 0$ ), la solution  $x = (x_i)_i$  du système (1.1) est donnée, d'un point de vue théorique, par les formules de Cramer suivantes :

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, i = \overline{1, n},$$

où  $A_i$  est la matrice d'ordre "n" obtenue à partir de  $A$ , en remplaçant la  $i$ -ème colonne de  $A$  par le vecteur  $b$ .

\* Les règles classiques de **Cramer** sont particulièrement mal adaptées au calcul numérique car le nombre d'opérations à effectuer est  $N_{Cramer} = (n+1)^2 n! - 1$ , ( $n$  : représente la dimension du système donné).

**Exemple :**

Pour  $n = 5$ , on a  $N_{Cramer}$  et pour  $n = 10$ , on a  $N_{Cramer} \cong 4 \times 10^8$ .

Pour cette raison, des méthodes numériques alternatives aux formules de Cramer ont été développées. Dans ce chapitre, nous allons étudier deux types de méthodes :

- Les méthodes directes.
- Les méthodes itératives (ou indirectes).

## 1.1 La Résolution des Systèmes Triangulaires

Supposons que ma matrice  $A$  (dans (1.1)) est inversible. La résolution du système (1.1) est immédiate dans les deux cas suivants :

### Les systèmes diagonaux.

Dans ce cas, la matrice  $A$  du système (1.1) est diagonale ( $A = \text{diag}(a)$ ;  $a = (a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})^t$ ). Ainsi, la solution unique de ce système se donne par :

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, i = 1, \dots, n.$$

### Les systèmes triangulaires.

On appelle système triangulaire tout système linéaire de la forme (1.1) dont la matrice de données  $A$  est triangulaire. Ainsi, la solution unique de ce système est donnée par l'un des deux algorithmes suivants :

1. Lorsque  $A$  est triangulaire inférieure :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}, \\ \forall k = 2, \dots, n : \\ x_k = \frac{1}{a_{kk}} \left[ b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_j \right]. \end{cases} \quad (1.2)$$

2. Lorsque  $A$  est triangulaire supérieure :

$$\begin{cases} x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}, \\ \forall k = n-1, \dots, 1 : \\ x_k = \frac{1}{a_{kk}} \left[ b_k - \sum_{j=k+1}^n a_{kj} x_j \right]. \end{cases} \quad (1.3)$$

**Remarque 1.2** 1. Le nombre d'opérations élémentaires dans la résolution des systèmes diagonale est "n".

2. Le nombre d'opérations élémentaires dans la résolution des systèmes triangulaires est "n<sup>2</sup>".

## 1.2 Tp 1 : Programmation en Matlab du problème 1.1

## 2 Les Méthodes Directes

Dans tout ce qui suit, nous supposons que la matrice  $A$  (du système (1.1)) est inversible.

**Definition 2.1** On appelle méthode directe de résolution du système (1.1) une méthode qui donne exactement le  $x$  ( $A$  et  $b$  étant connus) solution de (1.1), après un nombre fini d'opération élémentaires.

### 2.1 Méthode de Gauss

#### Principe de la méthode

Le principe de la méthode de Gauss est de se ramener, par des opérations simples (combinaisons linéaires), à un système triangulaire supérieur équivalent. Ce dernier est plus facile à résoudre.



### Description de la méthode

L'idée principale de cette méthodes est d'éliminer les inconnus d'une façon systématique jusqu'à l'obtention d'un système triangulaire supérieur que nous pouvons résoudre aisément.

### Les étapes de la méthode

Considérons le système linéaire :  $Ax = b$ .

- **Etape 1 :** Supposons que  $a_{11} \neq 0$ . Alors, sous cette hypothèse, on peut éliminer l'inconnu  $x_1$  des  $(n - 1)$  dernières équations, en soustrayant de chaque équation "i" ( $i = 2, \dots, n$ ) le multiple " $r_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$ " de la 1ère équation.

Les  $(n - 1)$  dernières équations deviennent ainsi :

$$L_i^{(1)} \leftarrow L_i^{(0)} - r_{i1} \times L_1^{(0)}, \quad \forall i = 2, \dots, n,$$

où les nouveaux coefficients sont donnés, pour tout  $i, j = \overline{2, n}$ , par

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - r_{i1} \times a_{1j}$$

et

$$b_i^{(1)} = b_i - r_{i1} \times b_1.$$

Donc, le nouveau système  $A^{(1)}x = b^{(1)}$  équivalent à  $Ax = b$  se donne par

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad b^{(1)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

- **Etape 2 :** Si  $a_{22}^{(1)} \neq 0$ , alors on peut de façon similaire éliminer  $x_2$  des  $(n - 2)$  dernières équations. Nous obtiendrons ainsi, au moyen des multiplicateurs

$$r_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad i = 3, \dots, n,$$

un système, qu'on note par  $A^{(2)}x = b^{(2)}$  qui est équivalent à  $A^{(1)}x = b^{(1)}$  et donné par

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdot & \cdot & a_{3n}^{(2)} \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdot & \cdot & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

où les nouveaux coefficients sont donnés, pour tout  $i, j = \overline{3, n}$ , par

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - r_{i2} \times a_{2j}^{(1)}$$

et

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - r_{i2} \times b_2^{(1)}.$$

- **Etape k :** Si  $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ , alors on peut de façon similaire éliminer  $x_k$  des  $(n - k)$  dernières équations. Nous obtiendrons ainsi, au moyen des multiplicateurs

$$r_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad i = k + 1, \dots, n,$$

un système, qu'on note par  $A^{(k)}x = b^{(k)}$  qui est équivalent à  $A^{(k-1)}x = b^{(k-1)}$  et dont les coefficients de la nouvelle matrice  $A^{(k)}$  et le nouveau vecteur  $b^{(k)}$  sont donnés, pour tout  $i, j = \overline{k + 1, n}$ , par

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - r_{ik} \times a_{kj}^{(k-1)}$$

et

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - r_{ik} \times b_k^{(k-1)}.$$

- **Etape (n - 1) :** Si  $a_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)} \neq 0$ , nous pouvons poursuivre l'élimination des inconnus jusqu'à l'étape  $(n - 1)$ . Ceci fournira l'unique équation :

$$L_n^{(n-1)} \leftarrow L_n^{(n-2)} - r_{n(n-1)} \times L_{(n-1)}^{(n-2)}; \quad \text{où } r_{n(n-1)} = \frac{a_{n(n-1)}^{(n-2)}}{a_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)}}.$$

Les coefficients de la nouvelle matrice  $A^{(n-1)}$  et du vecteur  $b^{(n-1)}$  obtenus seront ainsi

$$a_{nn}^{(n-1)} = a_{nn}^{(n-2)} - r_{n(n-1)} \times a_{(n-1)n}^{(n-2)}$$

et

$$b_n^{(n-1)} = b_n^{(n-2)} - r_{n(n-1)} \times b_{(n-1)}^{(n-2)}.$$

- **Etape finale :** Dans cette étape, on obtient le système triangulaire supérieur suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \dots \\ a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{array} \right.$$

Ce système peut être alors résolu par substitution arrière (voir (1.3) dans le paragraphe 1.1).

### Écriture matricielle de l'élimination de Gauss

Dans la méthode de Gauss décrite précédemment, les opérations sur les lignes  $l_{k+1}, l_{k+2}, \dots, l_n, \forall k = \overline{1, n - 1}$  se traduisent matriciellement par le produit :

$$A^{(k)} = J_k \times A^{(k-1)} \quad \text{et} \quad b^{(k)} = J_k \times b^{(k-1)}, \quad \forall k = \overline{1, n - 1},$$

où, pour tout  $k = \overline{1, n-1}$ , les  $J_k \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  sont des matrices inversibles définies par :

$$J_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -r_{(k+1)k} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \vdots & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -r_{nk} & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ligne } k+1$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} A^{(n-1)} &= (J_{n-1} \cdot J_{n-2} \dots J_k \cdot J_{k-1} \dots J_2 \cdot J_1) A \\ &= J \times A \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} b^{(n-1)} &= (J_{n-1} \cdot J_{n-2} \dots J_k \cdot J_{k-1} \dots J_2 \cdot J_1) b \\ &= J \times b \end{aligned}$$

avec  $J = J_{n-1} J_{n-2} \dots J_k J_{k-1} \dots J_2 J_1$ . Ce qui donne l'équivalence entre les deux systèmes :  $Ax = b$  et  $A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}$ , puisque la matrice  $J$  est inversible (produit de  $(n-1)$  matrices inversibles).

### Technique du Pivot-partiel

Plaçons-nous à l'itération "k" de la méthode de Gauss. Comme la matrice  $A^{(k-1)}$  est forcément inversible (puisque les  $J_k$  et  $A$  le sont aussi), on a

$$\det(A^{(k-1)}) = a_{11} \cdot a_{22} \dots a_{(k-1)(k-1)}^{(k-2)} \det \begin{pmatrix} a_{kk}^{(k-1)} & \dots & a_{kn}^{(k-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nk}^{(k-1)} & \dots & a_{nn}^{(k-1)} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Par suite, il résulte que :  $\det \begin{pmatrix} a_{kk}^{(k-1)} & \dots & a_{kn}^{(k-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nk}^{(k-1)} & \dots & a_{nn}^{(k-1)} \end{pmatrix} \neq 0.$

On déduit qu'il existe au moins  $l \in \{k, \dots, n\}$  t.q :  $a_{lk}^{(k-1)} \neq 0$ . On choisit, alors, un  $l$  de  $\{k, \dots, n\}$  t.q :

$$\left| a_{lk}^{(k-1)} \right| = \max_{k \leq i \leq n} \left| a_{ik}^{(k-1)} \right|,$$

puis on permute entre la ligne "k" et la ligne "l" (de la matrice  $A^{(k-1)}$ ) et aussi entre la composante  $b_k^{(k-1)}$  et  $b_l^{(k-1)}$  et on continue la procédure de Gauss, jusqu'à obtenir un système triangulaire supérieur.

### Remarques :

1. L'intérêt de cette stratégie du pivot-partiel est qu'on peut toujours résoudre notre système linéaire lorsque  $A$  est inversible.

2. Les  $a_{kk}^{(k-1)}$  sont appelés "Pivots de la méthode de Gauss".
3. La méthode de Gauss sans permutation de lignes s'appelle " Gauss **ordinaire**".
4. La méthode de Gauss permet de calculer le  $\det(A)$  par :  $\det(A) = (-1)^j \prod_{k=1}^{n-1} a_{kk}^{(k-1)}$ , où  $j$  est le nombre de permutation de lignes.
5. Si la matrice carrée  $A$  associée au système d'équations linéaires  $Ax = b$  est diagonalement dominante (au sens strictement), alors l'inverse de  $A$ , qu'on note  $A^{-1}$ , existe et la méthode de Gauss peut être appliquée sans aucune permutation (ni de lignes ni de colonnes).

**Nombre d'opérations de la méthode de Gauss :** Le nombre d'opérations nécessaires à l'algorithme de Gauss pour obtenir un système triangulaire est :

$$N_{Gauss} = \frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{6}n.$$

**Algorithme de Gauss :**

1. Construire la matrice augmenté  $\mathbb{A} = [A, b]$  du système linéaire donné
2. Etape  $k = 1$
3. Vérifier si le pivot  $a_{kk}$  est non nulle
4. Eliminer la variable  $x_k$  de toutes les lignes en dessous du pivot, c.à.d de la ligne  $(k + 1)$  à la  $n^{eme}$  ligne
5. Voir si la matrice obtenue (associée au nouveau système linéaire) est triangulaire supérieure
6. Si oui allez à l'étape 8
7. Si non,  $k := k + 1$  et aller à l'étape 3 et continuer
8. Par substitution inverse, on calcule la solution du système équivalent au système initial donné.

**Exemple 1 :** Résoudre le système linéaire suivant, par la méthode de Gauss avec pivot-partiel :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Corrigé :**

Notons ce système par  $B^{(0)}X = c^{(0)}$ . L'application de la 1ère étape de Gauss ( $k = 1$ ), donne :

$$[B^{(1)} : c^{(1)}] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & : & 1 \\ 0 & 0 & -13 & : & -3 \\ 0 & 4 & 1 & : & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme le pivot :  $b_{22}^{(1)} = 0$  (pivot nul), alors on doit appliquer la méthode de Gauss avec pivot-partiel, c.à.d, on permute entre la ligne "2" et la ligne "3" de  $[B^{(1)} : c^{(1)}]$ . On obtient donc

$$[\tilde{B}^{(1)} : \tilde{c}^{(1)}] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & : & 1 \\ 0 & 4 & 1 & : & 1 \\ 0 & 0 & -13 & : & -3 \end{pmatrix} l_2 := l_3$$

Ainsi, la résolution du dernier système (triangulaire supérieur) donne :

$$\begin{cases} 2x + y + 5z = 1 \\ 4y + z = 1 \\ -13z = -3 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/52 \\ 5/26 \\ 3/13 \end{pmatrix} \blacksquare$$

**Exemple 2 :** Par la méthode de Gauss, résoudre dans  $\mathbb{R}^4$ , le système :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -\frac{11}{4} \\ -8 \\ -29 \end{pmatrix}$$

**Corrigé :**

Comme ce système (qu'on note par  $A^{(0)}X = b^{(0)}$ ) est d'ordre "4", alors on a 3 étapes d'élimination de Gauss.

Pour tout  $k = \overline{1, 3}$ , les coefficients de la matrice  $A^{(k)}$  et du vecteur  $b^{(k)}$  se donnent, pour tout  $i, j = \overline{k+1, n}$ , par :

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - r_{ik} \times a_{kj}^{(k-1)} \text{ et } b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - r_{ik} \times b_k^{(k-1)},$$

où

$$r_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}.$$

Ainsi, on trouve

$$\begin{aligned} [A^{(1)} : b^{(1)}] &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 & : & -14 \\ 0 & 1 & -3 & 7 & : & \frac{45}{4} \\ 0 & 4 & 0 & 16 & : & 16 \\ 0 & 6 & 12 & 72 & : & -15 \end{pmatrix} \leftrightarrow [A^{(2)} : b^{(2)}] = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 & : & -14 \\ 0 & 1 & -3 & 7 & : & \frac{45}{4} \\ 0 & 0 & 12 & -12 & : & -39 \\ 0 & 0 & 30 & 30 & : & -\frac{165}{2} \end{pmatrix} \\ &\leftrightarrow [A^{(3)} : b^{(3)}] = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 & : & -14 \\ 0 & 1 & -3 & 7 & : & \frac{45}{4} \\ 0 & 0 & 12 & -12 & : & -39 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & : & 15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La résolution du système triangulaire :  $A^{(3)}X = b^{(3)}$ , par substitution arrière donne  $(x_1, x_2, x_3, x_4)^t = (1, \frac{1}{2}, -3, \frac{1}{4})^t$ .  $\blacksquare$

## 2.2 Méthode de Gauss-Jordan

Soit à résoudre le système linéaire :  $Ax = b$ , tels que  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  et  $b \in \mathbb{R}^n$ .

### Principe de la méthode

La méthode de Gauss-Jordan consiste à :

1. Transformer la matrice  $A$  du système linéaire donné en matrice identité :

$$(A, b) \longrightarrow (I_n, b^{(n)}),$$

où  $I_n$  est la matrice identité de  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ .

2. Résolution du système linéaire :

$$Ax = b \Leftrightarrow I_n x = b^{(n)} \Leftrightarrow x = b^{(n)}.$$

**Description de la méthode :**

On pose  $A^{(1)} = A$  et  $b^{(1)} = b$

$$(A^{(1)} : b^{(1)}) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n}^{(1)} : b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n}^{(1)} : b_2^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n1}^{(1)} & a_{n3}^{(2)} & \cdot & \cdot & a_{nn}^{(1)} : b_n^{(1)} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ L_n^{(1)} \end{matrix}$$

**A la 1<sup>ière</sup> étape :** Si  $a_{11}^{(1)} \neq 0$  (sinon on fait une permutation de ligne), alors on fait les affectations suivantes :

$$\begin{cases} L_1^{(2)} \leftarrow \frac{1}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)} \\ L_i^{(2)} \leftarrow L_i^{(1)} - a_{i1}^{(1)} L_1^{(2)}, \quad 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

On obtient, ainsi

$$(A^{(2)} : b^{(2)}) = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n}^{(2)} : b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n}^{(2)} : b_2^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{n1}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdot & \cdot & a_{nn}^{(1)} : b_n^{(2)} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1^{(2)} \\ L_2^{(2)} \\ L_3^{(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ L_n^{(2)} \end{matrix}$$

où

$$\begin{cases} a_{1j}^{(2)} = \frac{a_{1j}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, \quad 1 \leq j \leq n; \quad b_1^{(2)} = \frac{b_1^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}; \\ a_{i1}^{(2)} = 0, \quad 2 \leq i \leq n; \\ a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i1}^{(1)} a_{1j}^{(2)}, \quad 2 \leq i, j \leq n; \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - a_{i1}^{(1)} b_1^{(2)}, \quad 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

**A la k<sup>ième</sup> étape ( $1 \leq k \leq n$ ) :** Si  $a_{kk}^{(k)} \neq 0$  (sinon on fait une permutation de ligne), alors on fait les affectations suivantes :

$$\begin{cases} L_k^{(k+1)} \leftarrow \frac{1}{a_{kk}^{(k)}} L_k^{(k)} \\ L_i^{(k+1)} \leftarrow L_i^{(k)} - a_{ik}^{(k)} L_k^{(k+1)}, \quad i = \overline{1, n}, i \neq k. \end{cases}$$

On obtient, donc

$$(A^{(k+1)} : b^{(k+1)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{1n}^{(k+1)} : b_1^{(k+1)} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & a_{2n}^{(k+1)} : b_2^{(k+1)} \\ \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & a_{3n}^{(k+1)} : b_3^{(k+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(k+1)} : b_n^{(k+1)} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1^{(k+1)} \\ L_2^{(k+1)} \\ L_3^{(k+1)} \\ \dots \\ \dots \\ L_n^{(k+1)} \end{matrix}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} a_{kj}^{(k+1)} = \frac{a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad k \leq j \leq n; \\ a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k+1)}, \quad i = \overline{1, n}, i \neq k; \\ b_k^{(k+1)} = \frac{b_k^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}; \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - a_{ik}^{(k)} b_k^{(k+1)}, \quad i = \overline{1, n}, i \neq k. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

**Remarques :**

1. Pour un système d'ordre  $n$ , la méthode de Gauss-Jordan nécessite  $O(n^3)$  opérations (moins rapide que celle de Gauss).
2. Elle est aussi conseillée pour inverser une matrice :

$$(A, I_n) \longrightarrow (I_n, A^{(-1)}).$$

**Algorithme de Gauss-Jordan :**

Input : Les données du problème :

l'ordre ou la taille du système  $N$ ; matrice carrée  $A = (a_{ij})$  dont les coefficients sont repérés par les indices de type entier  $i, j$ ; le vecteur  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)^t$  repéré par l'indice  $i$ .

Introduire le système sous forme augmenté  $[A, B]$  (autrement dit, ajouter le vecteur  $B$  comme une colonne de plus à la matrice  $A$ ).

Traitement :

Pour  $1 \leq k \leq N$  "Les étapes de transformation (Normalisation et Réduction)"

Si  $a_{kk} \neq 0$  alors

$$\text{Pour } j = 1, N + 1, a_{kj} = \frac{a_{kj}}{a_{kk}}$$

Sinon, procéder à une permutation de la ligne  $k$  (ou colonne  $k$ ) avec autre tel que l'élément pivot soit non nul.

fin si

Pour  $(1 \leq i \leq N)$  et  $(i \neq k)$

Pour  $k \leq j \leq N + 1$ ,  $a_{ij} = a_{ij} - a_{ik} \times a_{kj}$

fin pour

fin pour

Impression des résultats : La solution

Pour  $1 \leq i \leq N$ ,  $x_i = a_{i,N+1}$ ; fin pour

**Exemple 3 :**

Résoudre le système linéaire suivant, par la méthode de Gauss-Jordan :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

**Corrigé :**

On a  $[A | B] = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 8 \\ 3 & 3 & -5 & 14 \\ 4 & 5 & -2 & 16 \end{array} \right)$ . D'où

$$[A^{(1)} | B^{(1)}] = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -2 & 4 \\ 0 & 3/2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 := L_1 \div 2 \\ L_2 := L_2 - 3 \times L_1 \\ L_3 := L_3 - 4 \times L_1 \end{array}$$

$$[A^{(2)} | B^{(2)}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7/3 & 10/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \div \frac{3}{2} \\ L_1 := L_1 - \frac{1}{2} \times L_2 \\ L_3 := L_3 - 3 \times L_2 \\ L_3 \div 4 \end{array}$$

$$[A^{(3)} | B^{(3)}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 := L_1 + \frac{7}{3} \times L_3 \\ L_2 := L_2 - \frac{2}{3} \times L_3 \end{array}$$

On a directement la solution dans la 4ème colonne ; c.à.d,  $(1, 2, -1)^t$ . ■

**\* Calcul de l'inverse d'une matrice avec Gauss-Jordan :**

Soit  $A$  une matrice carrée inversible. Pour calculer  $A^{-1}$ , on utilise la propriété suivante :

Le  $j^{ime}$  vecteur colonne de la matrice inverse  $A^{-1}$  est  $X_j = A^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \end{bmatrix}$ .



Cette colonne  $X_j$  est donc solution du système linéaire  $AX_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \end{bmatrix} \dots\dots\dots(*)$

Ainsi, pour déterminer les  $n$  colonne de la matrice inverse  $A^{-1}$ , il suffit de résoudre (en même temps) les  $n$  systèmes linéaires de type (\*), par la méthode de Gauss-Jordan.

**Exemple 4**

Calculons par Gauss-Jordan l'iversse de  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ .

On a

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 & : & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & : & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -2 & : & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 & : & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & : & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7/3 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \leftrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 19/12 & -3/2 & 7/12 \\ 0 & 1 & 0 & -7/6 & 1 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{array} \right]$$

Donc,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 19/12 & -3/2 & 7/12 \\ -7/6 & 1 & -1/6 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 19 & -18 & 7 \\ -14 & 12 & -2 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \blacksquare$$

### 2.3 Factorisation LU

#### Principe de la méthode

Le principe de cette méthode est de décomposer la matrice  $A$  en une matrice triangulaire inférieure  $L$  et une matrice triangulaire supérieure  $U$ , c.à.d,  $A = LU$ . Le système linéaire  $Ax = b$  est ainsi équivalent au système  $(LU)x = b$ , qui se décompose en deux systèmes triangulaires :

$$Ly = b \text{ et } Ux = y.$$

Dans le premier système l'inconnu est "y", alors que l'inconnu dans le 2ème est bien "x".

#### Théorème d'existence et d'unicité de la décomposition LU

**Theorem 2.2** Soit  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  inversible, telle que toutes les sous-matrices principales  $A_{[k]} = (a_{ij})_{i,j=1}^k, k = 1, \dots, n - 1$  sont inversibles. Alors, il existe une matrice triangulaire inférieure  $L$  avec  $L_{ii} = 1, \forall i = \overline{1, n}$  et une matrice triangulaire supérieure  $U$  vérifiants :  $A = LU$ . En plus, cette décomposition LU est unique.

**Description de la méthode**

Soit  $A = LU$ ;  $A = (a_{ij})$ ,  $L = (l_{ij})$ ,  $U = (u_{ij})$  des matrices définies comme suit :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ l_{12} & l_{22} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ l_{31} & l_{32} & u_{33} & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdot & \cdot & u_{3n} \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

En effectuant la multiplication matricielle de  $L$  par  $U$ , on obtient le système d'équations suivant :

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^i l_{ik} u_{kj}, \quad i \leq j$$

et

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^j l_{ik} u_{kj}, \quad i > j,$$

ce dernier système contient  $n^2$  équations linéaires et le nombre d'inconnus (les  $l_{ij}, u_{ij}$ ) est  $n(n+1)$ . Donc, on a un système surdéterminé ( $n(n+1) > n^2$ ). En choisissant  $n$  équations supplémentaires, on peut avoir un système linéaire qui admet une et une seule solution. Cela peut se faire, par exemple, en fixant la valeur de la diagonale de la matrice  $L$  :  $l_{ii} = 1$ , pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Pour calculer les  $n^2$  inconnus (ou coefficients) restants des deux matrices  $L$  et  $U$ , on a l'algorithme suivant :

Pour  $i = 1, \dots, n$

Pour  $j = i, \dots, n$

$$\begin{aligned} u_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \\ l_{ji} &= \frac{1}{u_{ii}} \left[ a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki} \right] \end{aligned}$$

Fin pour

Fin pour

**Remarque 2.3** Par multiplication des deux matrices  $L$  et  $U$  et identification avec  $A$ , on obtient un système linéaire de " $n^2$ " équations et " $n^2$ " inconnus. En résolvant ce système, dans les cas particuliers ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), on constate que la détermination des éléments de  $L$  et de  $U$  se fait en suivant l'algorithme général suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} & l_{ii} = 1, \quad 1 \leq i \leq n; \\ & \begin{cases} u_{1j} = a_{1j}, \quad 1 \leq j \leq n; \\ l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}, \quad 2 \leq i \leq n; \end{cases} \\ & \text{Pour } m = 2, \dots, n \\ & \begin{cases} u_{mj} = a_{mj} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{mk} u_{kj}, \quad m \leq j \leq n; \\ l_{im} = \frac{1}{u_{mm}} \left[ a_{im} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{ik} u_{km} \right], \quad m+1 \leq i \leq n \end{cases} \end{aligned} \right.$$

**Décomposition LU et algorithme de Gauss ordinaire**

Supposons qu'à chaque étape "k" ( $k = 1, \dots, n - 1$ ) de l'élimination de Gauss, le coefficient  $a_{kk}^{(k-1)}$  de la matrice  $A^{(k-1)}$  soit différent de zéro, alors on a

$$A^{(n-1)} = J_{n-1}J_{n-2}\dots J_1A,$$

ce qui implique que

$$A = (J_{n-1}J_{n-2}\dots J_1)^{-1} A^{(n-1)}.$$

La matrice  $A^{(n-1)}$  est une matrice triangulaire supérieur dont les termes diagonaux sont les pivots de Gauss ( $a_{kk}^{(k-1)}, k = 1, \dots, n - 1$ ). Si on note par  $U$  la matrice  $A^{(n-1)}$ , alors  $U = A^{(n-1)}$  est inversible (par construction).

D'autre part, les matrices d'élimination de Gauss :  $J_k, k = 1, \dots, n - 1$  sont inversibles, par suite la matrice produit  $J_{n-1}J_{n-2}\dots J_1$  est aussi inversible et ses termes diagonaux sont égaux à 1. Ainsi, on peut déterminer les matrices  $L$  et  $U$ , en utilisant l'algorithme de Gauss ordinaire, en posant

$$U = A^{(n-1)}$$

et

$$L = (J_{n-1}J_{n-2}\dots J_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ r_{21} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ r_{31} & r_{32} & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & \dots & r_{n(n-1)} & 1 \end{pmatrix},$$

où, pour tout  $k = \overline{1, k - 1}$ , on a

$$r_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad i = \overline{k + 1, n}.$$

**Exemple 5 :** Résoudre dans  $\mathbb{R}^4$  le système linéaire suivant par la méthode LU :

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

**CORRIGÉ :** D'après ce qui précède, pour résoudre ce système par la méthode de factorisation LU, il suffit d'appliquer les 3 étapes de Gauss sur la matrice des données :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix},$$

puis prendre  $U = A^{(3)}$  et  $L = (J_3 \times J_2 \times J_1)^{-1}$ .

En haut (Exemple2), l'application des éliminations de Gauss sur la matrice  $A$ , nous a donné

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0.4 & 3.6 & 3.4 \\ 0 & 0.1 & 3.4 & 5.1 \end{pmatrix}, A^{(2)} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, A^{(3)} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Par suite, on aura

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 1 & 0 & 0 \\ 0.8 & 4 & 1 & 0 \\ 0.7 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}, U = A^{(3)} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Maintenant, la résolution du système donné :  $AX = b$ ; ( $b = (32, 23, 33, 31)^t$ ) est équivalente à la résolution des deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} LY = b \dots\dots(1) \\ UX = Y \dots\dots(2) \end{cases}$$

La résolution du premier système

$$L \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

donne  $Y = (32, \frac{6}{10}, 5, \frac{1}{2})^t$ . De même, la résolution par substitution arrière du 2ème système  $UX = Y$  :

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

implique que

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^t = (1, 1, 1, 1)^t$$

## 2.4 Méthode de Cholesky $BB^t$

Maintenant, on va étudier la méthode de Cholesky, qui est une méthode directe adaptée à la résolution d'un système linéaire avec une matrice symétrique définie positive.

### Principe de la méthode

Cette méthode consiste à déterminer une décomposition de  $A$  sous la forme  $BB^t$ , où  $B$  est une matrice triangulaire inférieure et de coefficients diagonaux strictement positifs. Ainsi, la résolution du système  $Ax = b$  devient :

$$BB^t x = b \Leftrightarrow \begin{cases} By = b \dots\dots(1) \\ B^t x = y \dots\dots(2) \end{cases}$$

### Existence et d'unicité de la décomposition $BB^t$

**Theorem 2.4** Si  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est symétrique définie positive, il existe une matrice réelle triangulaire inférieure  $B$  telle que :  $A = BB^t$ .

Si on impose que les éléments diagonaux de la matrice  $B$  sont tous strictement positifs, alors la factorisation  $A = BB^t$  est unique.

**Description de la méthode**

Pour trouver les coefficients  $(b_{ij})_{i,j=1}^n$ , on utilise la relation  $A = BB^t$ , comme suit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ b_{12} & b_{22} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{n1} \\ 0 & b_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{n2} \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdot & \cdot & b_{n3} \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

En effectuant la multiplication  $BB^t$  et en identifiant avec  $A$ , on obtient l'algorithme suivant :  
 Pour  $i = 1$ , on détermine la première colonne de  $B$  :

$a_{11} = b_{11}b_{11}$  d'où

$$b_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$a_{1j} = b_{11}b_{j1}$  d'où

$$b_{j1} = \frac{a_{1j}}{b_{11}}, \quad 2 \leq j \leq n.$$

On détermine la  $i$ -ème colonne de  $B$ , où  $2 \leq i \leq n$ , après avoir calculé les  $(i - 1)$  premières colonnes :

$a_{ii} = b_{i1}b_{i1} + \dots + b_{ii}b_{ii}$  d'où

$$b_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}^2}$$

$a_{ij} = b_{i1}b_{j1} + \dots + b_{ii}b_{ji}$  d'où

$$b_{ji} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}b_{jk}}{b_{ii}}, \quad i + 1 \leq j \leq n$$

**Remarque :** La méthode de Cholesky permet aussi de calculer le déterminant de  $A$ , qui est égal au carré du produit des éléments diagonaux de la matrice  $B$ , puisque

$$\det(A) = \det(B) \times \det(B^t) = \det(B)^2 = \prod_{i=1}^n b_{ii}.$$

**Nombre d'opérations de la méthode de Cholesky :**

Le nombre d'opérations nécessaires à l'algorithme de cholesky pour calculer les coefficients de la matrice  $B$  est donné par :

$$N_{Cholesky} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

**Exemple 6 :** 1- Déterminer la factorisation de Cholesky de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

2- Calculer  $\det(A)$  ?

3- Résoudre le système  $Ax = b; b = (1, 1, 1)^t$  en utilisant la factorisation de Cholesky.

### 3 Les Méthodes Itératives

Les méthodes d'élimination ou de factorisation sont utilisées surtout lorsque l'ordre de la matrice du système linéaire est petit (matrice  $100 \times 100$ ) ou lorsque cette matrice est pleine (i.e. peu de coefficients nuls). Mais dans la pratique, beaucoup de problèmes nécessite la résolution d'un système  $Ax = b$  d'ordre assez important, avec  $A$  une matrice creuse (i.e. beaucoup de coefficients nuls). Des systèmes de ce type sont donnés par exemple par l'application de la méthode des différences finies ou de la méthode des éléments finis.

Pour cette classe de systèmes linéaire, on utilise les méthodes itératives qui consistent à générer, à partir d'un vecteur initial  $X^{(0)}$  de  $\mathbb{R}^n$ , une suite de vecteurs  $\{X^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$  telle que  $X^{(n+1)} = F(X^{(n)})$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} X^{(n)} = X$ ; où  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un opérateur lié à la méthode et  $X$  est la solution du système linéaire  $AX = b$ .

**Principe d'une méthode itérative :**

Etant donné le système linéaire

$$AX = b, \tag{3.1}$$

avec  $A$  une matrice d'ordre  $n$  inversible et  $b$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ .

Le principe des méthodes itératives est d'écrire la matrice  $A$  sous la forme  $A = M - N$ , où  $M$  est une matrice inversible, ainsi on aura

$$\begin{aligned} AX = & \Leftrightarrow (M - N)X = b \\ & \Leftrightarrow MX = NX + b \\ & \Leftrightarrow X = M^{-1}NX + M^{-1}b. \end{aligned}$$

En posant  $B = M^{-1}N$  et  $c = M^{-1}b$ , le système (3.1) est donc équivalent à

$$X = BX + c. \tag{3.2}$$

Ceci nous permet de définir la suite (ou la méthode) itérative par :

$$\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^n, \text{ vecteur donné} \\ X^{k+1} = BX^k + c \end{cases} \tag{3.3}$$

et en cas de convergence de  $\{X^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  vers  $X^*$ , alors  $X^*$  est solution du système (3.1).

- La matrice " $B$ " est appelée matrice de la méthode itérative.

**Remarque 3.1** 1. Le critère d'arrêt de la méthode itérative utilisée se fait, en général, sur l'erreur relative de deux itérés successifs  $X^{(k)}$  et  $X^{(k+1)}$ , c.à.d, tester

$$\frac{\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|}{\|X^{(k)}\|} < \epsilon,$$

où  $\epsilon$  est une valeur positive choisie petite. Sinon, on teste l'erreur absolue  $\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|$  (si c'est très petit).

2. La méthode itérative est dite convergente si,  $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} X^{(n)} = X^*$  où  $X^*$  est la solution dy système  $AX = b$ .

**Condition de convergence d'une méthode itérative**

Notons par  $e^{(k)} = X^{(k)} - X^*$  le vecteur erreur à l'étape  $k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). On a

$$X^* = BX^* + M^{-1}b \tag{3.4}$$

$$X^{(k)} = BX^{(k-1)} + M^{-1}b \tag{3.5}$$

En soustrayant (3.5) de (3.4), on obtient

$$X^{(k)} - X^* = B(X^{(k-1)} - X^*) = Be^{(k-1)}.$$

D'où

$$e^{(k)} = Be^{(k-1)} = B^2e^{(k-2)} = \dots = B^ke^{(0)}; \text{ avec } e^{(0)} = X^{(0)} - X^*,$$

ou encore

$$X^{(k)} - X^* = B^k(X^{(0)} - X^*).$$

La méthode converge si pour tout  $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} X^{(k)} = X^*$ , ce qui est équivalent à

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k = 0 \text{ (0 au sens des matrices)}.$$

**Theorem 3.2** La suite  $\{X^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  définie par (3.3) converge vers  $X^*$  si et seulement si

$$\rho(B) < 1,$$

où  $\rho(B)$  est le rayon spectral de la matrice d'itération  $B$ ; ( $\rho(B) = \max\{|\lambda|, \lambda \text{ valeur propre de } B\}$ ).

**Proposition 3.3** (relation entre  $\rho(B)$  et  $\|B\|_i$ )

$$\rho(B) \leq \|B\|_i,$$

pour tout  $i \in \{1, 2, \infty\}$ .

**Description des principales méthodes itératives :**

Considérons la décomposition suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k21} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix} = D - E - F, \tag{3.6}$$

où  $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ ,

$$E = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ -a_{21} & 0 & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ -a_{k1} & -a_{k2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} \text{ et } F = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -a_{1n} \\ & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & \cdot & -a_{n-1,n} \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

**Exemple 7.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ . Alors,  $A = D - E - F$ , avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---

Dans tout ce qui suit, on suppose que  $D$  est inversible ( $a_{ii} \neq 0, i = \overline{1, n}$ ).

### 3.1 Méthode de Jacobi

Dans cette méthode, on pose

$$M = D, N = E + F$$

et on note par  $J := M^{-1}N$  " la matrice de Jacobi "

En écrivant le processus itératif :

$$X^{(k+1)} = (M^{-1}N)X^k + M^{-1}b, \quad (3.7)$$

le calcul de la solution approchée  $x^{(k)}$  du système linéaire donné se fait, à chaque itération  $k$ , par la résolution du système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - a_{14}x_4^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)})/a_{11} \\ x_2^{(k)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - a_{24}x_4^{(k-1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)})/a_{22} \\ x_3^{(k)} = (b_3 - a_{31}x_1^{(k-1)} - a_{32}x_2^{(k-1)} - a_{34}x_4^{(k-1)} - \dots - a_{3n}x_n^{(k-1)})/a_{33} \\ \dots \\ x_n^{(k)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(k-1)} - a_{n2}x_2^{(k-1)} - a_{n3}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{nn}x_n^{(k-1)})/a_{nn} \end{array} \right., \quad (3.8)$$

ou d'une façon général par

$$x_i^{(k)} = \left( b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} \right) / a_{ii}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Donc, en partant d'un vecteur de départ  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^t$ , on peut calculer le nouveau itéré  $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})^t$ , par substitution dans le système (3.7) et on répète ce même processus pour déterminer la solution sous forme vectoriel  $x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})^t$  et ainsi de suite jusqu'à obtenir la meilleure solution approximative du système donné.

#### Etapes principales de la méthode de Jacobi :

1. Etant données  $A, b, x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^t, \epsilon$  (la précision) et/ ou  $K_{\max}$  (le nombre maximal d'itérations).
2. Pour  $i = 1, 2, \dots, n$

$$x_i^{(k+1)} = \left( b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) / a_{ii}$$



A répéter pour  $k = 0, \dots, Kmax$ .

Si

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k+1)}\|} < \epsilon$$

arrêter les itérations et  $x^{(k+1)}$  est une solution approchée du système donné avec une précision relative  $\epsilon$ .

### 3.2 Méthode de Gauss-Seidel

Ici, on pose

$$M = D - E, N = F$$

et on note par  $G = M^{-1}N = (D - E)^{-1}F$  " la matrice de Gauss-Seidel ".

En récrivant le processus itératif (3.5), les solutions approchées  $x^k$  du système linéaire se donne, à chaque itération  $k$ , par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k)} = \left( b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - a_{14}x_4^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)} \right) / a_{11} \\ x_2^{(k)} = \left( b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - a_{24}x_4^{(k-1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)} \right) / a_{22} \\ x_3^{(k)} = \left( b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} - a_{33}x_3^{(k)} - a_{34}x_4^{(k-1)} - \dots - a_{3n}x_n^{(k-1)} \right) / a_{33} \\ \dots \\ x_n^{(k)} = \left( b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - a_{n3}x_3^{(k)} - a_{n4}x_4^{(k)} - \dots - a_{nn}x_n^{(k)} \right) / a_{nn} \end{array} \right. \quad (3.9)$$

ou d'une façon général par

$$x_i^{(k)} = \left( b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i-1, j \neq i}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} \right) / a_{ii}, \text{ pour } i = \overline{1, n}.$$

- On remarque qu'à chaque itération  $k$ , les composantes  $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)})^t$ ; calculées à l'étape  $k$  et les composantes  $(x_{i+1}^{(k-1)}, x_{i+2}^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)})^t$  calculées à l'étape  $k - 1$  sont utilisées pour calculer la nouvelle composante  $x_i^k$ .

#### Etapes principales de la méthode de Gauss-Seidel :

1. Etant données  $A, b, x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^t, \epsilon$  et/ ou  $Kmax$ .
2. Pour  $i = 1, 2, \dots, n$

$$x_i^{(k+1)} = \left( b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i-1, j \neq i}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) / a_{ii}$$

A répéter pour  $k = 0, \dots, Kmax$ .

Si

$$\frac{\|x^{k+1} - x^k\|}{\|x^{k+1}\|} < \epsilon$$

arrêter les itérations et  $x^{k+1}$  est une solution approchée du système donné avec une précision relative  $\epsilon$ .

- Remarque 3.4** 1. S'il existe  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $a_{i_0 i_0} = 0$ , alors on procède à une permutation de ligne sur  $A$  et sur  $b$ .
2. En général, la convergence de l'une de ces méthode n'implique pas la convergence de l'autre.
3. Plus  $\rho(B) \ll 1$ , plus la convergence du processus itératif (ou méthode) :

$$X^{(k+1)} = (M^{-1}N)X^k + M^{-1}b, \quad (3.10)$$

vers la solution exacte du système  $Ax = b$  est plus rapide.

**Exemple 8**

Soient les deux systèmes linéaires  $A_i X = b_i, i = 1, 2$ .

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Appliquées à chaque système, étudier la convergence des méthodes Jacobi et Gauss-Seidel pour tout  $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ .

**Corrigé :** Rappelons que  $J = M^{-1}N = D^{-1}(E + F)$  et  $G = (D - E)^{-1}F$ . Ainsi, on obtient

1.

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Après les calculs, on trouve  $\rho(J_1) = 1.118 > 1$  et  $\rho(G_1) = 1/2 < 1$ . D'où, la méthode de Gauss-Seidel converge vers la solution du système  $A_1 X = b_1, \forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ , alors que la méthode de Jacobi ne converge pas  $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ .

2.

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, G_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ici,  $\rho(J_2) = 0 < 1$  et  $\rho(G_2) = 2 > 1$ . Donc, la méthode de Jacobi converge vers la solution du système  $A_2 X = b_2, \forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ , mais la méthode de Gauss-Seidel ne converge pas  $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ .

**Autres conditions (suffisantes) de convergence pour les méthodes : Jordan et Gauss Seidel**

**Theorem 3.5** Pour que les processus itératifs de Jacobi et de Gauss Seidel converge ( $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ ), il suffit que la matrice  $A$  (du système linéaire étudié) soit à diagonale dominante stricte.

**Preuve** ■

**Proposition 3.6** Si  $A$  est symétrique définie positive, alors la méthode (ou processus itératif) de Gauss-Seidel converge pour tout  $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ .

### 3.3 Méthode de Relaxation

La matrice d'itération est dans cette méthode  $B = M^{-1}N$  où

$$M = \left(\frac{1}{\omega}\right)D - E, N = \left(\frac{1}{\omega} - 1\right)D + F, \omega \in \mathbb{R}^*.$$

- On remarque que si  $\omega = 1$ , cette méthode coïncide avec celle de Gauss-Seidel; on l'utilise pour accélérer la convergence de la méthode de Gauss-Seidel.

En réécrivant le processus itératif :

$$X^{(k+1)} = (M^{-1}N)X^k + M^{-1}b,$$

alors la méthode de relaxation consiste en le schéma suivant :

Lors du passage de  $X^{(k)}$  à  $X^{(k+1)}$ , on ne retient pas  $X^{(k+1)}$  pour la suite, mais  $\omega X^{(k+1)} + (1 - \omega)X^{(k)}$ . Autrement dit, on a

$$X^{(k+1)} \longleftarrow X^{(k)} + \omega (X^{(k+1)} - X^{(k)}).$$

En injectant cette expression dans l'algorithme de Gauss-Seidel, on obtient l'algorithme suivant :

$$x_i^{(k)} = x^{k-1} + \omega \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} \right) / a_{ii}, \text{ pour } i = \overline{1, n}.$$

#### Convergence de la méthode de relaxation

**Theorem 3.7** (condition sur le paramètre  $\omega$ )

- Pour  $A$  quelconque (mais inversible), une condition nécessaire pour que la méthode de relaxation converge pour tout  $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  est que  $\omega \in ]0, 2[$ .
- Si  $A$  est diagonale dominante stricte, alors la condition suffisante de convergence est que  $\omega \in ]0, 1]$ .
- Si  $A$  est symétrique définie positive, alors la condition nécessaire et suffisante de convergence est que  $\omega \in ]0, 2[$ .

# Chapitre 3

## Résolution des Equations Non-Linéaires

# Chapitre 4

## Résolution Numérique des Equations Différentielles Ordinaires