Département de Mathématiques **2022-2023**
Faculté de Maths et de l'Informatique **Université : Batna 2**
2ième Année S.A.D Dr. Dulia Bouhoufani

EXAMEN FINAL "ANALYSE NUMÉRIQUE 2"

Exercice 1 : (8 points)

a) Détérminer la décomposition LU de la matrice A.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

b) Résoudre le système $Ax = b$, par la méthode LU.

Exercice 2 : (12 points)

Soit à résoudre le système $Ax = b$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \; et \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. (1.5 pts) Déterminer les matrices D, E, F telles que $A = D - E - F$ (définies en cours).
2. (3 pts) Calculer par la méthode de Gauss-Jordan la matrice $(D - E)^{-1}$.
3. (3 pts) Calculer la matrice G et le vecteur c, qui définissent la suite de Gauss-Seidel : $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + c$, avec $k \geq 1$.
4. (2.5 pts) En calculant $\rho(G)$ (le rayan spectral de la matrice G), dites si la méthode de Gauss-Seidel converge ou non ?
5. (2 pts) Partant de $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$, calculer $x^{(1)}, x^{(2)}$, puis comparer entre $\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_2$ et $\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_2$.

Corrigé

Exercice 1 : (8 points)

a) La décomposition LU de la matrice A du système donné est :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{6}{5} & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

b) Résoudre le système $AX = b$ par la méthode LU :

$$\text{On a } AX = b \Leftrightarrow \begin{cases} LY & = b........(1) \\ UX & = Y........(2) \end{cases}$$

La solution du système (1) est $Y = (5, 4, -9)^t$, et celle de (2) (et du système donné) est, alors, $X = (1, 2, 3)^t$.

Exercice 2 : (12 points)

1. Les matrices D, E, L telles que $A = D - E - F$ sont :

$$D = I_3, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. L'inverse de la matrice $D - E$, par la méthode de Gauss-Jordan :

$$(D-E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. La matrice G et le vecteur c définissant la suite de Gauss-Seidel sont comme suit :
   $c = (D-E)^{-1}b = (1, -1, 0)^t$,

$$\begin{aligned} G &= (D-E)^{-1} \times F \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Ainsi, la suite de Gauss-Seidel est $X^{(k+1)} = GX^{(k)} + (1, -1, 0)^t, \forall k \geq 1\,;\, X^{(0)} \in IR^n$.

4. Calculons le rayan spectral de la matrice G :
   $\rho(G) = \max\{|\lambda_i|\,;\lambda_i \textit{ valeur propre de } G\} = 2$.
   Comme $\rho(G) > 1$, alors la méthode de Gauss-Seidel diverge.

5. Partant de $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$, on obtient :
   $x^{(1)} = Gx^{(0)} + c = c = (1, -1, 0)^t$, ainsi, $\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_2 = \|c\|_2 = \sqrt{2}$.
   $x^{(2)} = Gx^{(1)} + c = (3, -3, 0)^t$, par suite $\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_2 = \|(3, -3, 0)^t - (1, -1, 0)^t\|_2 = \sqrt{8}$.
   Il est bien claire que $\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_2 < \|x^{(2)} - x^{(1)}\|_2$.