Dept de Mathématiques **Université Batna 2 (2022/2023)**
Analyse Numérique2 (2ème Année S.A.D) ***Mme O.Bouhoufani***

TD 1 : Sur le calcul matriciel

Exercice 1.
Calculer les normes matricielles $\|.\|_1, \|.\|_2, \|.\|_\infty$ pour chacune des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -0.2 & 0.5 \\ 0.3 & 0 & -0.6 \\ 0.7 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Montrer les relations suivantes sur $\mathbb{R}^n$.

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty\,, \tag{1}$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty\,, \tag{2}$$

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2\,. \tag{3}$$

Indication Pour (3), utiliser l'inégalité de Hölder donnée par :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

où $a_i, b_i \in \mathbb{R}_+^*$ $(i = \overline{1,n})$ et $p, q \in [1, \infty[$; tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Exercice 3. Montrer que pour toute norme matricielle induite, on a

$$\|I_n\| = 1 \text{ et } \varrho(A) \leq \|A\|\,, \forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}).$$

* La norme induite d'une matrice $A \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ est définie par :

$$\|A\| = \max_{x\in\mathbb{R}^m-\{0\}} \frac{\|Ax\|_{\mathbb{R}^n}}{\|x\|_{\mathbb{R}^m}}.$$

Exercice 4. (TP1) Ecrire (en Matlab) un programme qui permet de résoudre un système "triangulaire" $Ax = b$, en utilisant les 2 algorithmes suivants :

1. Lorsque A est triangulaire inférieure :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{a_{11},} \\ \forall k = 2, ..., n : \\ x_k = \frac{1}{a_{kk}} \left[b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_j \right]. \end{cases}$$

2. Lorsque A est triangulaire supérieure :

$$\begin{cases} x_n = \frac{b_n}{a_{nn},} \\ \forall k = n-1, ..., 1 : \\ x_k = \frac{1}{a_{kk}} \left[b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j \right]. \end{cases}$$