Département de Maths **Université Batna 2 (2022-2023)**
Analyse Numérique 2 (2ème Année S.A.D)

TD 2 : Résolution des systèmes linéaires (méthodes directes)

Exercice 1 : En utilisant la méthode de Gauss, résoudre les deux systèmes linéaires suivants :

1.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{9}{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

2.
$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : Soient
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad et\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

1. Résoudre par la méthode de Gauss le système $Ax = b$, en fonction de b_1, b_2, b_3 et b_4, où b_i $(i = \overline{1,4})$ sont des paramètres réels quelconques.
2. En déduire A^{-1}.

Exercice 3 : Utiliser la méthode de Gauss-Jordan, pour déterminer l'inverse des matrices suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 10 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

.

Exercice 4 : "La factorisation LU"
Considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \\ 12 \end{pmatrix}$$

1. Faite la décompostion "LU" de la matrice du système donné (qu'on note par "B"), en utilisant les deux méthodes suivantes :
   a)- En utilisant l'algorithme "LU", c.à.d, multiplier L par U et identifier les coéfficients de LU avec ceux de B (dite la méthode de Crout)
   b)- En utilisant les éliminations de Gauss ordinaire.
2. Calculer la solution du système donné.
3. Calculer le $det(B)$, puis déterminer la matrice inverse B^{-1}, en utilisant L^{-1} et U^{-1}.

Exercice 5 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R}).$$

Etablir :

1. La décomposition LU de la matrice A.
2. La solution du système $Ax = (32, 23, 33, 31)^t$, ainsi que le déterminant de A.
3. L'inverse de A, en resolvant les 3 systèmes linéaires :
   $Av_1 = (1, 0, 0, 0)^t, Av_2 = (0, 1, 0, 0)^t, Av_3 = (0, 0, 1, 0)^t, Av_4 = (0, 0, 0, 1)^t$, où v_1, v_2, v_3 et $v_4 \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 6 :
Soient

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad et \ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est définie positive.
2. Effectuer la factorisation de Cholesky de A.
3. Résoudre le système $Ax = b$ par la méthode de Cholesky.