Département de Maths **Université Batna 2 (2022-2023)**
Analyse Numérique 2 (2ème Année S.A.D)

Série de TD 3

Exercice 1 : Soit le système d'équations linéaires $Ax = b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que les processus itératifs de Jacobi et Gauss-Seidel, associés à ce système, convergent $\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ (sans calculer les matrices des itérations).
2. Calculer $\rho(J)$: le rayan spectral de la matrice de Jacobi.
3. Calculer $\rho(G)$: le rayan spectral de la matrice de Gauss-Seidel.
4. En déduire que $\rho(G) = (\rho(J))^2$.

Exercice 2 : Soit le système linéaire $Ax = b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 1 & 2 & \frac{2}{3} \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice de Jacobi J et le vecteur C, où $X^{(k+1)} = JX^{(k)} + C$.
2. Déterminer le polynôme caractéristique P de J, puis, calculer ses racines.
3. Que peut-on dire sur la convergence de la méthode de Jacobi ?
4. Montrer que si $\mid \alpha_{ij} \mid < \frac{1}{n}, \forall i, j = 1, ..., n$, alors la méthode de Jocobi converge $\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$; où $(\alpha_{ij})_{ij}$ sont les coefficients de la matrice J.
5. En déduire que la méthode de Jacobi associée à la matrice $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ convege $\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$, où
$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & si\ i \neq j \\ 8a_{ij}, & si\ i = j \end{cases}$$

Exercice 3 : Soit à résoudre le système linéaire $Ax = b$, défini par

$$A = \begin{pmatrix} \beta & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \beta & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \beta & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \beta \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}, \quad avec\ \beta \in \mathbb{R}.$$

1. Que peut-on dire de la convergence des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel sans calculer les matrices des itérations, dans les cas :
$$(a)\ \beta = 2, \quad (b)\ \beta = 3\ ?$$
2. Dans le cas où $\beta = 3$, on définit $b = (1, 0, 2, 28)^t$.
i) Calculer la solution exacte du système $Ax = b$, en utilisant la méthode de Gauss.
ii) Calculer les 3 premiers itérés des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel, en prennant $x^0 = (0, 0, 0, 0)^t$.
iii) Comparer ces itérés à la solution exacte. Les résultats sont-ils cohérents avec ceux de la question 1-(b) ?