COURS D'ALGEBRE 3

Bachir Bounibane

Université de Batna 2-Mostefa Ben Boulaid
Département de Mathématiques
Filière :Mathématiques Appliquées
Deuxième année: Statistiques et Analyse des Données

Table des Matières

1 Rappel sur le calcul matriciel 5

1.1 Espace vectoriel des matrices 5

1.2 Opérations sur les matrices 7

1.2.1 Addition 7

1.2.2 Multiplication par un scalaire 8

1.3 Produit de deux matrices 8

1.3.1 Définition du produit 8

1.3.2 Produit d'un vecteur-ligne (matrice $1 \times p$) par une matrice 9

1.4 Matrices carrées 9

1.4.1 Matrices identités 9

1.4.2 L'inverse d'une matrice carrée 10

1.5 Applications linéaires et matrices 12

1.5.1 Représentation matricielle d'un vecteur dans une base 12

1.5.2 Matrices des images de vecteurs 15

2 Réduction des endomorphismes 18

2.1 Valeurs et vecteurs propres 18

2.1.1 Espace propre 21

2.1.2 Propriétés des vecteurs propres et valeurs propre 22

2.2 Polynôme caractéristique d'une matrice carrée 22

2.3 Matrices semblables et matrices diagonalisables 25

2.3.1 Méthode pratique de diagonalisation 28

2.4 Applications de la diagonalisation des matrices **33**
2.4.1 Puissance d'une matrice carrée 33
2.4.2 Formule du binôme 36
2.5 Calcul de la puissance k-ième d'une matrice diagonalisable **37**
2.5.1 Application sur le calcul des puissances d'une matrice diagonalisable. 38
2.5.2 Trigonalisation 40
2.6 Polynôme minimal et théorème de Cayley-Hamilton **41**
2.6.1 La division euclidiénne 42
2.6.2 Polynôme de matrice 42
2.6.3 Polynôme d'endomorphisme 42
2.7 Théorème de Cayley-Hamilton **43**
2.8 Polynômes annulateurs d'une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ **45**
2.8.1 Polynôme unitaire 45
2.8.2 Polynôme minimal 45
2.9 Matrice de Jordan **49**
2.9.1 Quelques propriétés simples de la matrice $J(\lambda)$. 50
2.10 Le théorème de Jordan **50**
2.10.1 Etapes à suivre pour trouver la réduite de Jordan 51
3 Systèmes différentiels linéaires 57
3.1 Cas où A est diagonalisable **58**

1. Rappel sur le calcul matriciel

1.1 Espace vectoriel des matrices

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.1 On appelle une matrice dans $\mathbb{K}$ de type (n,p) un tableau rectangulaire A d'éléments de $\mathbb{K}$ ayant n lignes et p colonnes.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & .a_{1j}.. & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Les éléments a_{11}, $a_{22},\dots$, a_{nn} forment la diagonale principale de la matrice. On note a_{ij} l'élément qui se trouve à la ligne numéro i et la colonne j et on note la matrice A par $A=(a_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le p}$. L'ensemble des matrices de type (n,p) est noté $\mathscr{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$.

1− Pour $n=1$, on dit que A est une matrice **ligne**, $A=(a_{11},a_{12},\dots,a_{1p})$.

2− Pour $p=1$ on dit que A est une matrice **colonne**, $A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1p} \end{pmatrix}$.

3− Pour $n=p$, on dit que A est une matrice carrée d'ordre n et on note $A\in M_n(\mathbb{K})$

4− Une matrice est dite **diagonale**, si tous ses coefficients non diagonaux sont nuls, i.e.,$a_{ij}=0$, pour tout $i\neq j$. On notera

$$Diag(a_{11},\dots,a_{nn})=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple 1.1 **1**)$-$ **La matrice nulle**

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0\\ 0 & 0 & ... & ...\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

2)$-$ La matrice carrée (a_{ij}) telle que $a_{ij}=0$ si $i\neq j$ et $a_{ii}=1$ $\forall i$ est appelée **matrice unité**, notée par I, elle vérifie $AI=IA=A$, $\forall A$ matrice carrée du même ordre que I. ■

Exemple 1.2

$$\begin{aligned} (\mathbf{1})\ A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7\\ 2 & 4 & 4\\ 8 & 7 & 1\\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} A_1 \text{ est une matrice de type } (4,3)\\ \text{avec par exemple } a_{12} &= 5, a_{42}=3, a_{23}=a_{22}=4\\ (\mathbf{2})\ A_2 &= \begin{pmatrix} -5\,2\,1\,0\\ 1\,0\,1\,7 \end{pmatrix} A_2 \text{ est une matrice de type } (2,4)\\ (\mathbf{3})\ A_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 9\\ -6 & 0 \end{pmatrix} A_3 \text{ est une matrice de type } (2,2) \end{aligned}$$

■

Définition 1.1.2 Soit $A=(a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ et $B=(b_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ deux matrices de types (n,p)

1) On dit que

$$A=B \text{ si } a_{ij}=b_{ij}\ \forall i=1,...,n, \forall j=1,...,p$$

2) **La transposée de la matrice** A est une matrice notée A^t définie par

$$A^t=(a_{ji})_{1\leq j\leq p, 1\leq i\leq n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1j} & a_{i1} & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1p} & a_{2p} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

autrement dit A^t c'est la matrice de type (p,n) obtenue en remplaçant les lignes par les colonnes et les colonnes par les lignes.

3) **Matrices triangulaires**: Une matrice est dite triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure), si tous ses coefficients en dessous (resp. au dessus) de la diagonale sont nuls, i.e., $a_{ij}=0$, pour tout $j>i$ (resp. $i<j$). Une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) sera notée

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ resp } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & & \dots & a_{1p} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & a_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème 1.1.1 **1**. $(A+B)^t = A^t + B^t$
2. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$
3. $(A^t)^t = A$
4. $(AB)^t = B^t A^t$.
• Si A est inversible, alors A^t l'est aussi et on a

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

• A st dite symétrique si $A = A^t$

■ **Exemple 1.3** .

1) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow A_2^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$. ■

1.2 Opérations sur les matrices

1.2.1 Addition

Soient A et B deux matrices ayant la même taille $n \times p$. Leur somme $C = A + B$ est la matrice de taille $n \times p$ définie par

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ pour } i = 1, \dots, p \text{ et } j = 1, \dots, n.$$

En d'autres termes, on somme coefficients par coefficients.

Le produit d'une matrice $A = a_{ij}$ de $M_{np}(\mathbb{K})$ par un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est la matrice αa_{ij} formée en multipliant chaque coefficient de A par α. Elle est notée $\alpha \cdot A$ (ou simplement αA).

■ **Exemple 1.4** .

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ alors } A + B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

■

1.2.2 Multiplication par un scalaire

Définition 1.2.1 . Soit M une matrice quelconque et λ un réel. Le produit de M par λ est la matrice de même dimension que M et dont chaque élément est le produit de λ par l'élément correspondant de M.

■ **Exemple 1.5** . Soit $M = \begin{pmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors : $\lambda M = \begin{pmatrix} 4\lambda & a\lambda \\ b\lambda & -\lambda \end{pmatrix}$ ■

Soient A, B et C trois matrices appartenant à $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\beta \in \mathbb{K}$ deux scalaires.
1. $A+B = B+A$: la somme est commutative,
2. $A+(B+C) = (A+B)+C$: la somme est associative,
3. $A+0 = A$: la matrice nulle est l'élément neutre de l'addition,
4. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$,
5. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
6. $-A = (-a_{ii})$.

Exercise 1.1 . **1**. Soient $A = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 21 & -6 \\ 0 & 3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$,
$D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$.
2. Calculer toutes les sommes possibles de deux de ces matrices. Calculer $3A+2C$ et $5B-4D$.
Trouver α tel que $A-\alpha C$ soit la matrice nulle.
3. Montrer que si $A+B = A$, alors B est la matrice nulle.
4. Que vaut $0{\cdot}A$? et $1{\cdot}A$? Justifier l'affirmation: $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$. ■

1.3 Produit de deux matrices

1.3.1 Définition du produit

Le produit AB de deux matrices A et B est défini si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B

Définition 1.3.1 — Produit de deux matrices. . Soient $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $p \times q$. Alors le produit $C = AB$ est une matrice $n \times q$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :

$$c_{ij} =_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

■ **Exemple 1.6** . **1**) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$,

alors

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 3(1)+2(5)+(-1)(6) & 3(0)+2(3)+(-1)(4) & 3(2)+2(1)+(-1)(2) \\ 0(1)+4(5)+6(6) & 0(0)+4(3)+6(4) & 0(2)+4(1)+6(2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 56 & 36 & 16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Soit une matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ -1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ et un vecteur-colonne $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Le produit AV est le vecteur-colonne : $AV = \begin{pmatrix} 2x+4y-5z \\ -x+6y+3z \end{pmatrix}$. ■

1.3.2 Produit d'un vecteur-ligne (matrice $1 \times p$) par une matrice

On peut effectuer le produit d'un vecteur-ligne à p colonnes par une matrice à p lignes (quelque soit le nombre n de colonnes). Le résultat est alors un vecteur ligne à n colonnes.

■ **Exemple 1.7** **1**. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ alors:

$A \times B = \begin{pmatrix} 2 \times 3 + 5 \times 4 \\ -3 \times 3 + 1 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ -5 \end{pmatrix}$. ■

R . **1-** Le produit de matrices n'est pas commutatif, c'est à dire que si A et B sont deux matrices quelconques, en général $A \times B \neq B \times A$.

2- La simplification n'est pas vraie en général, c.à.d $AB = O$ n'entraîne pas, nécessairement $A = O$ ou $B = O$.

3- Une matrice carrée A est inversible s'il existe B telle que $AB = BA = I$.

4- $AB = AC$ n'implique pas $B = C$

■ **Exemple 1.8** . $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \neq O$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \neq O$ mais $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$ ■

Propriétés Soit A, B et C trois matrices carrées de même taille et un réel k.
a) Associativité : $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$
b) Distributivité : $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ et $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
c) $(kA)B = A(kB) = k(A \times B)$

1.4 Matrices carrées

1.4.1 Matrices identités

Définition 1.4.1 . On appelle matrice unité de taille n la matrice carrée formée de n lignes et n colonnes :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & & \dots \\ \dots & .. & \dots & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, I_n n'a que des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs. Si l'ordre est implicite, on la note simplement I.

- Pour toute matrice carrée A de taille n, on a $A\times I_n = I_n \times A$

■ **Exemple 1.9** . $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A\times I_2 &= I_2 \times A = \begin{pmatrix} 3\times 1+(-2)3 & 3\times 0+(-2)\times 1 \\ 1\times 1+4\times 0 & 1\times 0+4\times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

Définition 1.4.2 . Soit A une matrice carrée d'ordre n, $A=(a_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le n}$,

(**1**) La suite des éléments $\{a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}\}$ est appelée la **diagonale** principile de A.

(**2**) La **trace** de A est le nombre

$$tr(A) =_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}.$$

(**3**) A est dite matrice diagonale si $a_{ij}=0$, $\forall i\neq j$ c'est à dire que les éléments de A sont tous nuls sauf la diagonale principale.

Théorème 1.4.1 . Soient$A$ et B deux matrices $n\times n$. Alors :

(**1**) $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B$
(**2**) $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{tr}A$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$,
(3) $\mathrm{tr}(tA) = \mathrm{tr}A$,
(**4**) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

■ **Exemple 1.10** .

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 12 & 1 \\ -2 & 1 & 10 \end{pmatrix} = A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 12 & 1 \\ -2 & 1 & 10 \end{pmatrix},$$

A_1 est une matrice symétrique

$A_2 = \begin{pmatrix} 7 & 40 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, A_2 est une matrice triangulaire supérieure .

$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, A_3 est une matrice diagonale. ■

1.4.2 L'inverse d'une matrice carrée

Définition 1.4.3 — Matrice inverse. . Soit A une matrice carrée de taille $n\times n$. S'il existe une matrice carrée B de taille $n\times n$ telle que $AB=I$ et $BA=I$, on dit que A est inversible. On appelle B l'inverse de A et on la note A^{-1}

Plus généralement, quand A est inversible, pour tout $p\in\mathbb{N}$, on note :

$$A^{-p} = (A^{-1})^p = \underbrace{A^{-1}A^{-1}...A^{-1}}_{p \text{ facteurs}}.$$

■ **Exemple 1.11** . Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Étudier si A est inversible, c'est étudier l'existence d'une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, telle que $AB = I$ et $BA = I$. Or $AB = I$ équivaut à :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2c = 1 \\ b+2d = 0 \\ 3c = 0 \\ 3d = 1 \end{cases}$$

Sa résolution est immédiate : $a = 1$, $b = -\frac{2}{3}$, $c = 0$, $d = \frac{1}{3}$. Pour prouver qu'elle convient, il faut aussi montrer l'égalité $BA = I$. La matrice A est donc inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ ■

■ **Exemple 1.12** . La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. ■

Proposition 1.4.2 . Soit A une matrice inversible. Alors A^{-1} est aussi inversible et on a :

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$

Exercise 1.2 . **1**). Soient

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^{-1}, B^{-1} , $(AB)^{-1}$, $(BA)^{-1}$, A^{-2}

2). Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

3). Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $2A - A^2$. Sans calculs, en déduire A^{-1}. ■

Considérons la matrice 2×2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Proposition 1.4.3 . Si $ad - bc \neq 0$, alors A est inversible et

$$A = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$: Si $\det(A) \neq 0$, alors A^{-1} existe. De plus, on a la formule de A^{-1} suivante

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(Com(A))^t,$$

où $Com(A)$ désigne la comatrice de A.

■ **Exemple 1.13** . Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Nous avons $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$

On a

$$\begin{aligned} A^{-1} &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}^t \\ &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 12 & -15 & 6 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

1.5 Applications linéaires et matrices

1.5.1 Représentation matricielle d'un vecteur dans une base

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathscr{B} = (e, ..., e_n)$.

Définition 1.5.1 . Soit $u \in E$. On appelle matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ la matrice colonne notée $M_{\mathscr{B}}(f)$. $M_{\mathscr{B}}(f) \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ et les coefficients sont les coordonnées de f dans la base $\mathscr{B}$.

Ainsi si $f = x_1e_1 + ... + x_ne_n$, alors: $M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}.$

■ **Exemple 1.14 — Cas des bases canoniques.** . **1**- Prenons $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. ■

■ **Exemple 1.15** . Prenons par exemple le vecteur $x = (1,-2,3)$. On a :

$$x = (1,-2,3) = 1 \times (1,0,0) - 2 \times (0,1,0) + 3 \times (0,0,1) = 1e_1 - 2e_2 + 3e_3$$

Ainsi, la matrice X représentant le vecteur x dans la base canonique $\mathscr{B}$ est $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2- Un vecteur $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est toujours représenté dans la base canonique par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

■

Donnons un exemple de calcul de matrice de représentation dans des bases autres que les bases canoniques.

■ **Exemple 1.16 — Cas général.** . **1**- Soit $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3\right)$ défini par:

$$f(x,y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x+3y \\ 3x+5y \\ -x+y \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Soit $\mathscr{B} = (u_1, u_2)$, $\acute{\mathscr{B}} = (v_1, v_2, v_3)$, où $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On vérifie facilement que $\mathscr{B}$ et $\acute{\mathscr{B}}$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement. Calculons $A = Mat_{\mathscr{B},\acute{\mathscr{B}}}(f)$. La formule de f nous donne $f(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1$, $f(u_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2v_2$, d'ou

$$Mat_{\mathscr{B},\acute{\mathscr{B}}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\acute{\mathscr{B}}$ est beaucoup plus simple que sa matrice dans les bases canoniques. On voit ici l'intérêt de choisir une autre base que la base canonique pour écrire la matrice d'une application linéaire. Comme le montre l'exemple précédent, le calcul de la matrice de représentation d'une application linéaire f dans les bases

$$(u_1, ..., u_n), (v, ..., vp)$$

se décompose en deux étapes :

► **Le calcul de** $f(u_1), ..., f(u_n)$;

► **Le calcul des coordonnées de** $f(u_1), ..., f(u_n)$ dans **la base** $(v, ..., v_p)$.

Soit, en général, la résolution de n systèmes de Cramer, chacun à p équations et p inconnues. Dans l'exemple précédent, ce calcul était immédiat. Il est aussi possible de déterminer la matrice de représentation de f par des calculs matriciels, à l'aide de la formule de changement de bases.

2- .Prenons toujours $E = \mathbb{R}^3$ et notons : $u = (1,0,0)$, $v = (1,1,0)$, $w = (1,1,1)$

On peut montrer facilement que la famille $\acute{\mathscr{B}} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Prenons toujours le vecteur $x = (1,-2,3)$. On cherche les coordonnées du vecteur x dans la base $\acute{\mathscr{B}}$.

$$\begin{aligned} x &= au+bv+cw \Leftrightarrow (1,-2,3) = a(1,0,0)+b(1,1,0)+c(1,1,1) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=1 \\ b+c=-2 \\ c=3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-5 \\ c=3 \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc :

$$x = 3u - 5v + 3w,$$

et la matrice $\acute{X}$ représentant le vecteur x dans la base $\acute{\mathscr{B}}$ est donc :$\acute{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3- Plaçons-nous dans $E = \mathbb{R}^n[X]$ qui est de dimension $n+1$, muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3, ..., X^n)$. Prenons par exemple le polynôme $P(X) = X^n + 2X - 1$. On a :

$$P(X) = -1 \times 1 + 2 \times X + 0 \times X^2 + 0 \times X^3 + \cdots + 0 \times X^{n-1} + 1 \times X^n$$

Ainsi, la matrice M représentant le polynôme P dans la base canonique $\mathscr{B}$ est

$$M = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4- Plaçons-nous dans $E = \mathbb{R}^2[X]$ qui est de dimension 3. La famille de polynômes $\acute{\mathscr{B}} = \left(1, X-1, (X+2)^2\right)$ est une base de E (puisque c'est une famille de polynômes non nuls échelonnés en degrés, donc famille libre, de 3 éléments, donc une base de E). Notons $P(X) = 3X^2 - 2X + 1$. Dans la base canonique, P est représenté par: $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dans la base $\acute{\mathscr{B}}$?

$$\begin{aligned}
P(X) &= a\times 1 + b(X-1) + c(X-2)^2 \Leftrightarrow 3X^2-2X+1 = a+bX-b+cX^2-4cX+4c \\
&\Leftrightarrow 3X^2-2X+1 = cX^2+(b-4c)X+(4c-b+a) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} c=3 \\ b-4c=-2 \\ a-b+4c=1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=10 \\ c=3 \end{cases}
\end{aligned}$$

On a donc:

$$P(X) = 3+10(X-1)+3(X-2)^2,$$

et P est ainsi représenté par

$$\acute{M} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

dans la base $\acute{\mathscr{B}}$. ■

Définition 1.5.2 . La matrice de l'application linéaire f par rapport aux bases $\mathscr{B}$ et $\acute{\mathscr{B}}$ est la matrice $(a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j-ème colonne est constituée par les coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\acute{\mathscr{B}} = (f_1, f_2, ..., f_n)$.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ . \\ f_j \\ . \\ f_n \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1j} & a_{i1} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array},$$

c'est la matrice dont les vecteurs colonnes sont l'image par f des vecteurs de la base de départ $\mathscr{B}$, exprimée dans la base d'arrivée $\acute{\mathscr{B}}$. On note cette matrice $Mat_{\mathscr{B},\acute{\mathscr{B}}}(f)$.

1.5.2 Matrices des images de vecteurs

Théorème 1.5.1 . Soit E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension p et n respectivement, munis des bases
$\mathscr{B}$ et $\acute{\mathscr{B}}$. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, $u \in E$ et $v = f(u)$. On note $X = M_{\mathscr{B}}(u)$,

$Y = M_{\acute{\mathscr{B}}}(v)$ et $A = M_{\mathscr{B},\acute{\mathscr{B}}}(f)$. Alors on a:

$$v = f(u),\ Y = AX$$

La matrice de f permet donc aussi de calculer les coordonnées dans $\acute{\mathscr{B}}$ de $f(u)$, si u est un vecteur de E dont on connaît les coordonnées

■ **Exemple 1.17** . Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Quelles sont les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathscr{B}$?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + 3z \\ -x + z \\ x - 3y + 2z \end{pmatrix}$$

Le vecteur $f(u)$ a donc pour coordonnées : $(2x - y + 3z, -x + z, x - 3y + 2z)$. ■

■ **Exemple 1.18** . Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + 3x_3) \end{aligned}$$

Il est utile d'identifier vecteurs lignes et vecteurs colonnes; ainsi f peut être vue comme l'application

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}.$$

Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = (f_1, f_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. C'est-à-dire

$$\begin{aligned} e_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. Quelle est la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\acute{\mathscr{B}}$?

• On a $f(e_1) = f(1,0,0) = (1,1) = f_1 + f_2$. La première colonne de la matrice $Mat_{\mathscr{B},\acute{\mathscr{B}}}(f)$ est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De même $f(e_2) = f(0,1,0) = (1,-2) = f_1 - 2f_2$. La deuxième colonne de la matrice $Mat_{\mathscr{B},\acute{\mathscr{B}}}(f)$ est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

• Enfin $f(e_3) = f(0,0,1) = (-1,3) = -f_1 + 3f_2$. La troisième colonne de la matrice $Mat_{\mathscr{B},\acute{\mathscr{B}}}(f)$ est donc $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ainsi :

$$Mat_{\mathscr{B},\acute{\mathscr{B}}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

■

■ **Exemple 1.19** . Soit $u \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ défini par

$$u : (x,y,z) \mapsto (x+2z, 3x+y+4z, 4y+5z).$$

Donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

« On note u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, dans la base canonique. », il convient alors de comprendre que l'endomorphisme en question est:

$$(x,y,z) \overset{u}{\mapsto} (x+2z, 3x+y+4z, 4y+5z)$$

pour lequel en effet $u(1,0,0) = (1,3,0)$, $u(0,1,0) = (0,1,4)$ et $u(0,0,1) = (2,4,5)$. ■

Exercise 1.3 . Soit f de matrice A dans des bases $\mathscr{B}$ et $\acute{\mathscr{B}}$ telle que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les dimensions de E et F ainsi que l'expression analytique de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\acute{\mathscr{B}}$. ■

Exercise 1.4 . Prenons $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ munies de leurs bases canoniques respectives $\mathscr{B}$ et $\mathscr{D}$ et f définie par

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) \longmapsto (x+z, x+y, 2y+z, x+3y+2z) \end{cases}.$$

Écrire la matrice $M_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(f)$ ■

2. Réduction des endomorphismes

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie n. D'autre part $\mathscr{L}(E)$ désigne le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des endomorphismes de E.

2.1 Valeurs et vecteurs propres

Définition 2.1.1 — Définition intuitive. Soit $f\colon E \longrightarrow E$ un endomorphisme..

• Un vecteur est dit vecteur propre par l'application linéaire f s'il est non nul et si l'application ne fait que modifier sa taille sans changer sa direction.

• Une valeur propre associée à un vecteur propre est le facteur de modification de taille, c'est-àdire le nombre par lequel il faut multiplier le vecteur pour obtenir son image. Ce facteur peut être négatif (renversement du sens du vecteur) ou nul (vecteur transformé en un vecteur de longueur nulle).

ftbpFUO2.8089in2.1888in0ptSans changer de directionFigure

Définition 2.1.2 . Soit $f\colon E \longrightarrow E$ un endomorphisme.

1. On dit que λ est une valeur propre de f, s'il existe un vecteur non nul x de E tel que

$$f(x) = \lambda x.$$

2. Un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ est un vecteur x non nul tel que

$$f(x) = \lambda x.$$

3. Le spectre de f est l'ensemble des valeurs propres de f. On le note $S_p(f)$.

■ **Exemple 2.1** . Prenons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Considérons $f = \frac{d}{dx}$ l'endomorphisme de dérivation sur E, soit

$$f : E \underset{u \longrightarrow \acute{u}}{\longrightarrow} E$$

Etant donné $\lambda \in \mathbb{R}$, considérons la fonction $u(x) := e^{\lambda x}$. On a bien $u \in E$, $u \neq 0_E$ et :

$$f(u) = \acute{u} = \lambda e^{\lambda x} = \lambda u.$$

Ceci montre que λ est une valeur propre de f et que la fonction $u : x \mapsto e^{\lambda x}$ est un vecteur propre associé à λ. Ainsi, tout nombre réel est une valeur propre de f. D'où :

$$Sp_{\mathbb{R}}(f) = \mathbb{R}.$$

Le spectre de f est donc infini. ■

■ **Exemple 2.2** Soit f: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (-2x-2y+2z, -3x-y+3z, -x+y+z).$$

1. Écriture en terme de matrice. L'application f s'écrit aussi $f(X) = AX$ avec
$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. Le vecteur $v_1 = (1,1,0)$ est vecteur propre.

En effet, $f(1,1,0) = (-4,-4,0)$, autrement dit $f(v_1) = -4v_1$. Ainsi v_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = -4$.

Si on préfère faire les calculs avec les matrices, on considère v_1 comme un vecteur colonne et on calcule $Av_1 = -4v_1$

3. $\lambda_2 = 2$ est valeur propre. Pour le prouver, il s'agit de trouver un vecteur non nul dans $Ker(f - \lambda_2 id_{\mathbb{R}^3})$ pour $\lambda_2 = 2$. Pour cela, on calcule $A - \lambda_2 I_3$:

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On trouve que $v_2 = (0,1,1)$ est dans le noyau de $A - 2I_3$, c'est-à-dire $(A - 2I_3)v_2$ est le vecteur nul. En d'autres termes, $v_2 \in Ker(f - \lambda_2 id_{\mathbb{R}^3})$, c'est-à-dire $f(v_2) - 2v_2 = 0$, donc $f(v_2) = 2v_2$.

▶ v_2 est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$.

4. $\lambda_3 = 0$ est valeur propre. On peut faire juste comme au-dessus et trouver que $v_3 = (1,0,1)$ vérifie $f(v_3) = (0,0,0)$. Ainsi $f(v_3) = 0.v_3$.

▶ v_3 est vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_3 = 0$.

5. On a trouvé 3 valeurs propres, et il ne peut y en avoir plus car la matrice A est de taille 3×3.

Conclusion: $\mathrm{Sp}(f) = \{-4,2,0\}$.

• Pour toute valeur propre λ,l'ensemble

$$E_\lambda = \{x \in E : f(x) = \lambda x\},$$

est un sous espace vectoriel de E, appelé **sous espace propre associé a la valeur propre** λ. ■

Définition 2.1.3 — version matricielle. . Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. S'il existe un vecteur **non nul** X de $\mathbb{K}^n$ tel que

$$AX = \lambda X, \tag{2.1}$$

alors on dit que :

1. λ est une valeur propre de A
2. X est un vecteur propre de A associé à λ

R . L'équation (2.1) est équivalente à :

$$(A-\lambda I)X=0$$

■ **Exemple 2.3** $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$ sont des valeurs propres de A.
En effet

$$\begin{aligned}
Av_1 &= \lambda v_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x+2y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow x=-2y \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
Av_2 &= \lambda v_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x+2y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \\
y &= 0 \text{ et } x \in \mathbb{R} \text{ alors } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

d'où $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à $\lambda_1 = 1$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à $\lambda_2 = 2$.
■

■ **Exemple 2.4** . Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 11 & -2 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$

• Vérifions que $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A.

En effet

$$\begin{aligned}
AX_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 11 & -2 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= -2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2X_1
\end{aligned}$$

Donc X_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_1 = -2$

• Vérifions que $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A.

On calcule AX_2

$$AX_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 11 & -2 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 13X_2$$

Donc X_2 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_2 = 13$.

• Vérifions que $\lambda_3 = 7$ est valeur propre de A.

Il s'agit donc de trouver un vecteur $X_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ tel que $AX_3 = 7X_3$.

$$\begin{aligned} AX_3 &= 7X_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 11 & -2 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ -2x_1 + 11x_2 - 2x_3 \\ 8x_1 - 7x_2 + 6x_3 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 8x_1 - 7x_2 - x_3 = 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On résout ce système linéaire et on trouve comme ensemble de solutions :

$$\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Autrement dit, les solutions sont engendrées par le vecteur

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On vient de calculer que $AX_3 = 7X_3$. Ainsi X_3 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_3 = 7$ ■

2.1.1 Espace propre

Définition 2.1.4 Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A, l'ensemble E_λ défini par :

$$E_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n \text{ ou } \mathbb{C}^n : Av = \lambda v\},$$

est appelé l'espace propre associé à la valeur propre λ alors E_λ est un sous espace vectoriel de E.

■ **Exemple 2.5** Soit la matrice B définie par:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont 2 une solution double et 1 simple.

Pour $\lambda = 2$, on a

$$E_2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \ : Bv = 2v\} = \left\{ (x.y.z) \in \mathbb{R}^3 : B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+z=2x \\ -x+2y+z=2y \\ 2z=2z \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} z-x=0 \\ --x+z=0 \\ z=z \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{c} x=z \\ z=z \end{array}$$

Donc $E_2 = \left\{(x.y.x) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{x(1.0.1) + y(0.1.0) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$ s.e.v de $\mathbb{R}^3$, $\{(1.0.1),(0.1.0)\}$ est une base de E_2 car les vecteurs sont libres. ■

R E_λ est appelé le sous-espace propre associé à λ

2.1.2 Propriétés des vecteurs propres et valeurs propre

Théorème 2.1.1 Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors on a les équivalences suivantes :

1) λ est une valeur propre de A.

2) $(A - \lambda I)$ n'est pas inversible.

3) $\det(A - \lambda I) = 0$

Proposition 2.1.2 Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont des valeurs propres distinctes d'une matrice carrée A et $x_1, \ldots, x_m$ les vecteurs propres correspondants, alors le système $\{x_1, \ldots, x_m\}$ est libre.

2.2 Polynôme caractéristique d'une matrice carrée

Définition 2.2.1 . Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est le polynôme χ_f défini par

$$P_f(\lambda) = \det(f - XI_d).$$

Le polynôme caractéristique de la matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est le polynôme P_A défini par

$$P_A(\lambda) = \det(A - XI_n).$$

■ **Exemple 2.6** Soit l'endomorphisme

$$\underset{(x,y,z)\longmapsto(x-y,2x+z,x+y+2z)}{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3}$$

Soit $\mathscr{B} = \{e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$M = Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc

$$P_f(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & 0-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 2.$$

■

■ **Exemple 2.7** Calculer le polynôme cractéristique de la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Par définition, on a

$$P_A(x) = \det(A - xI_n) = \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} = (1-x)(3-x).$$

■

■ **Exemple 2.8** Calculer les polynômes caractéristiques des matrices suivantes.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 13 & -12 & -6 \\ 6 & -5 & -3 \\ 18 & -18 & -8 \end{pmatrix}$$

(**1**) Par définition, on a

$$\begin{aligned} P_A(x) &= \det(A - xI_n) = \begin{vmatrix} 4-x & 1 & -1 \\ 2 & 7-x & -2 \\ 1- & -2 & 4-x \end{vmatrix} \begin{array}{c} 1^{ere}\ colonne \\ \downarrow \\ 1^{ere} + 3^{èm} \end{array} \\ &= \begin{vmatrix} 3-x & 2 & -1 \\ 0 & 7-x & -2 \\ 3-x & -2 & 4-x \end{vmatrix} \\ &= (3-x)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7-x & -2 \\ 1 & -2 & 4-x \end{vmatrix} \begin{array}{c} 2^{ème}\ colonne \\ \downarrow \\ 2 \times 3^{ème} + 2^{ème} \end{array} \\ &= (3-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3-x & -2 \\ 1 & 2(3-x) & 4-x \end{vmatrix} = (3-x)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 4-x \end{vmatrix} \\ &= (3-x)^2(9-x): \end{aligned}$$

D'où

$$P_{A_1}(x) = (3-x)^2(9-x)$$

(**2**) Le calcul de $P_{A_2}(x)$

$$\begin{aligned}
P_{A_2}(x) &= \begin{vmatrix} 13-x & -12 & -6 \\ 6 & -5-x & -3 \\ 18 & -18 & -8-x \end{vmatrix} \quad \begin{array}{c} 1^{ére} \text{ colonne} \\ \downarrow \\ 1^{ére} + 2^{ème} \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} (1-x) & -12 & -6 \\ (1-x) & -5-x & -3 \\ 0 & -18 & -8-x \end{vmatrix} \quad \begin{array}{c} 2^{ème} \text{ colonne} \\ \downarrow \\ (-2)\times 3^{ème} + 2^{ème} \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} (1-x) & 0 & -6 \\ (1-x) & (1-x) & -3 \\ 0 & (-2)(1-x) & -8-x \end{vmatrix} \\
&= (1-x)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -8-x \end{vmatrix} \\
&= (1-x)^2(-2-x).
\end{aligned}$$

■

R . **1**) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ la matrice de f dans une base $\mathscr{B}$

$$P_f(\lambda) = P_A(\lambda) = \det(A - XI_n)$$

2) Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$ une matrice carrée d'ordre 2: Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$;

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} &= \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\
&= \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A)
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$P_f(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A).$$

• Plus généralement, si $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est une matrice carrée d'ordre n alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}\ P_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}tr(A)\lambda^{n-1} + \cdots + \det(A).$$

• Si une matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ de $M_n(\mathbb{K})$ est triangulaire, alors ses valeurs propres sont les coefficients diagonaux puisque

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}\ P_f(\lambda) =_{i=1}^{n} (a_{ii}-\lambda).$$

Théorème 2.2.1 Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } A \Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0.$$

Autrement dit les valeurs propres d'une matrice sont les racines de son polynôme caractéristique.

■ **Exemple 2.9** Soit A $=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. On a

$$P_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 0-\lambda & -1 \\ 1 & 0-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2+1$$

Donc λ est une valeur propre de $A \Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$. ■

R Les valeurs propres d'une matrice triangulaire ou diagonale sont ses éléments diagonaux. En effet si $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire inférieure, on a

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ & & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & & 0 \\ a_{n1} & a_{n2}. & \cdots & & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\dots(a_{nn}-\lambda) \end{aligned}$$

Donc $Sp(A) = \{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}-\lambda\}$.

■ **Exemple 2.10** **1**. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).\ Sp(A) = \{3,-1,2\}$$

2. Soit

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 & 0 \\ 2i & -2 & 0 & 0 \\ 4i & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C}).\ Sp(A) = \{2, 1+i, 0\}.$$

■

2.3 Matrices semblables et matrices diagonalisables

Dans tout ce chapitre, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et f est un endomorphisme de E.

Étant donné un endomorphisme f de E, on va chercher s'il existe une base de E sur laquelle f s'exprime de façon simple. pour les matrices, étant donné une matrice carrée A, on va essayer de trouver une matrice inversible P telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit plus simple que la matrice A. l'idéal serait de trouver une base de E sur laquelle la matrice de f est diagonal, c'est-à-dire de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & . & . & 0 \\ & \lambda_2 & & & . \\ . & & . & & . \\ . & . & . & . & \\ 0 & . & . & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Cela signifie qu'il existe une base $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ de E telle que :

$$\begin{cases} f(u_1) = \lambda_1 u_1 \\ f(u_2) = \lambda_2 u_2 \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ f(u_n) = \lambda_n u_n \end{cases}$$

Si A est la matrice de f sur une base quelconque, cela veut dire qu'il existe une matrice inversible P telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale

Définition 2.3.1 **1**. On dit que l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base $\mathscr{B} = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$

de E dans la quelle la matrice de f est diagonale, c'est a dire

$$Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & & & 0 \\ . & & . & & & . \\ . & . & . & . & & . \\ . & . & . & & & . \\ 0 & 0 & . & . & . & \lambda_n \end{pmatrix}$$

2. On dit qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable s'il existe une matrice inversible P est une matrice diagonale D telle que:

$$A = PDP^{-1},$$

où P est la matrice de passage

Exemple 2.11 **1**). Considérons les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors l'égalité matricielle suivante :

$$D = \frac{1}{3}P^{-1}AP, \; P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi A est diagonalisable.

2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable. ∎

Exemple 2.12 Étudier la diagonalisation de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $a \in \mathbb{R}$

Rép. A est diagonalisable$\Leftrightarrow a = 0$. ∎

Proposition 2.3.1 . Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice. Supposons que A admette n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des vecteurs propres associés. Alors :

▶ La matrice A est diagonalisable.

▶ Si on note P la matrice dont les vecteurs colonnes sont les $(X_1, \ldots, X_n)$, alors $D = P^{-1}AP$ est la matrice diagonale formée des valeurs propres de A.

Théorème 2.3.2 . Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, λ_1, ..., $\lambda_n \in \mathbb{K}$ les valeurs propres de A d'ordre de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_p$, alors si

(**1**) $\dim E_{\lambda i} = m_i$, $i = 1, 2, .., p$.

(**2**) $\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} + \ldots + \dim E_{\lambda_p} = n$

Alors la matrice A est diagonalisable et la matrice diagonale D associée à A est donnée par:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & & . & . \\ . & . & . & . & . & \lambda_{p-1} & . \\ 0 & 0 & .0 & . & 0. & 0 & \lambda_p \end{pmatrix},$$

chaque λ_i se répete m_i fois, la matrice P est formé des vecteurs propres on ecrit

$$D = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}.$$

Proposition 2.3.3 Soit A une matrice diagonalisable avec $Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$, alors

$$\det(A) =_{i=1}^{p} \lambda_i = \lambda_1.\lambda_2 \ldots \lambda_p.$$

R Si λ_1, λ_2,..., λ_p sont des valeurs propres de $f \in \mathscr{L}(E)$ distinctes 2 a 2, de multiplicité $m_1, m_2, \ldots, m_p$, alors

$$\begin{aligned} P_f(X) &= (X-\lambda_1)^{m_1}(X-\lambda_2)^{m_2} \ldots (X-\lambda_p)^{m_p} Q(X) \text{ avec } Q(\alpha) \neq 0 \; \forall \alpha \in \mathbb{K} \\ &\Rightarrow m_1 + m_2 + \ldots + m_p \leq n = \dim E \end{aligned}$$

Théorème 2.3.4 Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de multiplicitè m de $f \in \mathscr{L}(E)$ alors

$$\dim E_\lambda \leq m$$

■ **Exemple 2.13** **1**. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, A \in M_3(\mathbb{R})$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$: On a :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 6\right) = -(\lambda-2)^2(\lambda-3).$$

La matrice A possède ainsi une valeur propre simple ($\lambda_1 = 3$, on a donc $\dim\left(E_{\lambda_1}\right) = 1$) et une valeur propre double ($\lambda_2 = 2$). On vérifie facilement que $E_{\lambda_1} = Vect((1,1,-2))$ et $E_{\lambda_2} = Vect((1,0,0)$.On a donc $\dim\left(E_{\lambda_2}\right) = 1$. La matrice A n'est pas diagonalisable car

$$\dim\left(E_{\lambda_1}\right) + \dim\left(E_{\lambda_2}\right) = 2 \neq \dim\left(\mathbb{R}^3\right).$$

2. Reprenons l'exemple de la matrice A de $M_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -1$ (valeur propre simple) et $\lambda_2 = 2$ (valeur propre double) et $E_{\lambda_1} = Vect((1,1,1))$ et $E_{\lambda_2} = Vect\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$. Cette matrice est diagonalisable car

$$\dim\left(E_{\lambda_1}\right) + \dim\left(E_{\lambda_2}\right) = 1 + 2 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right).$$

■

R Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si λ est valeur propre de A de multiplicité n, alors A est diagonalisable si et seulement si

$$A = \lambda I_n.$$

■ **Exemple 2.14** . Pour les matrices suivantes, en calculant les éléments propres on trouve

Matrices	$P_A(\lambda)$	$S_p(A)$	Multiplicité	$\dim E_\lambda$
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$x(x-2)^2$	0 2	1 2	1 2
$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$(x+1)^2(x-3)$	-1 3	2 1	1 1
$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$(x+1)(x-1)(x-3)$	-1 1 3	1 1 1	1 1 1

On en déduit que A et C sont diagonalisables, mais B ne l'est pas. ■

2.3.1 Méthode pratique de diagonalisation

Dans la pratique, on effectue la démarche suivante:

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée $n \times n$. Pour essayer de la diagonaliser.

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice $P_A(\lambda)$.

2. Chercher les racines de $P_A(\lambda)$, sur $\mathbb{R}$ en général, ou $\mathbb{C}$ (ce sont les valeurs propres de A).

On suppose ici que l'on a trouvé n valeurs propres distinctes : $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

3. Pour chaque valeur propre λ_i de A, on cherche un vecteur propre u_i.

▶ Si pour l'une des valeurs propres, la **dimension** de ce espace propre n'est pas égale le **degré** de **multiplicité** de la valeur propre, la matrice n'est pas diagonalisable. pour chaque sous espace propres, on trouve une base. Ce sont des vecteurs propres de A.

▶ Si la **dimension** de chaque sous espace propre est bien égale à la **degré** de **multiplicité** correspondant, la matrice A est diagonalisable.

5. Soit P la matrice dont colonnes sont des vecteurs propres $(u_1,\dots,u_n)$. Alors si P est inversible, $D = P^{-1}AP$ est la matrice diagonale

■ Exemple 2.15 — Exemples. 1.

Diagonalisons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Pour cela, on détermine ses valeurs propres :

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) &= (4-\lambda)(1-\lambda)+2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6. \\ &= (\lambda-2)(\lambda-3) \end{aligned}$$

b. Ainsi, la matrice A admet deux valeurs propres distinctes, qui sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$. Par la proposition 41, elle est diagonalisable.

c. Déterminons une base de vecteurs propres. Tout d'abord pour $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y$$

d'où le vecteur propre $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre $\lambda_1 = 2$. Pour la valeur propre $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 2y$$

d'où le vecteur propre $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre $\lambda_2 = 3$.

d. Dans la base (u_1, u_2), la matrice s'écrit

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Plus précisément $D = P^{-1}AP$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Démontrons que A est diagonalisable et trouvons une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

a. Commençons par calculer le polynôme caractéristique de A:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 5 & -4-\lambda & 0 \\ 6 & -6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda+4)(\lambda-2)$$

b. Les racines du polynôme caractéristique, et donc les valeurs propres de A, sont les réels $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -4$ et $\lambda_3 = 2$. Il y a trois valeurs propres distinctes, et donc par la proposition 43, la matrice est diagonalisable.

3. Déterminons des vecteurs propres associés. Par exemple, pour $\lambda_2 = -4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x \\ -4y \\ -4z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 0 \\ 5x = 0 \\ 6x - 6y + 6z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

• L'ensemble des solutions est donc $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$. D'où le vecteur propre $X_2 = \{\,0,1,1\}$ associé à la valeur propre $\lambda_2 = -4$

De même, on trouve X_1 (associé à $\lambda_1 = 1$) et X_3 (associé à $\lambda_3 = 2$) :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d. La base (X_1, X_2, X_3) diagonalise la matrice A, c'est-à-dire $D = P^{-1}AP$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

■

■ **Exemple 2.16** Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Déterminons le spectre de A:

$$P_A(X) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 1 \\ \lambda-2 & 2+\lambda & -1 \\ \lambda-2 & -4 & 2+\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4+\lambda & -2 \\ 0 & -4 & 1+\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)\left(\lambda^2 + 5\lambda\right)$$

Le polynôme caractéristique est scindé à racines simples, la matrice est donc diagonalisable.

Déterminons les espaces propres :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) \Leftrightarrow \begin{array}{l} x+2y-z=2x \\ 3x-2y+z=2y \\ 4y-2z=2z \end{array} \Leftrightarrow (x=y=z), \text{ donc } E_2(A) = vec\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) \Leftrightarrow \begin{array}{l} x+2y-z=0 \\ 3x-2y+z=0 \\ 4y-2z=0 \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ z=2y \end{array} \right., \text{ donc } E_0(A) = vec\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-5}(A) \Leftrightarrow \begin{array}{l} x+2y-z=-5x \\ 3x-2y+z=-5y \\ 4y-2z=0=-5z \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=\frac{5}{12}z \\ y=-\frac{3}{4}z \end{array} \right., \text{ donc } E_{-5}(A) = vec\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}.$$

Finalement, $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -9 \\ 1 & 2 & 12 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 30 & 10 & -5 \\ -21 & 7 & 14 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

■

■ **Exemple 2.17** Diagonalisons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, si c'est possible.

1$^{\text{ère}}$ étape : recherche des valeurs propres

$$\det(A-\lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda) = 0.$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$.

2$^{\text{ème}}$ étape : recherche de vecteurs propres linénairement indépendants

En résolvant $(A-\lambda I)x = 0$, pour chaque valeur de λ, on obtient

- une base pour $\lambda = 1$: $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- une base pour $\lambda = 2$: $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3$^{\text{ième}}$ étape : construction de P

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4$^{\text{ième}}$ étape : Construction de D à partir des valeurs propres correspondantes

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5$^{\text{ième}}$ étape : vérification

$$\begin{aligned} AP &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ PD &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

■ **Exemple 2.18** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

1. Déterminons le polynôme caractéristique de A :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 8) = (1-\lambda)(\lambda+4)(\lambda-2).$$

Les valeurs propres de A sont les racines de $P_A(\lambda)$, ce sont donc $1, -4$ et 2.

2. Montrons que A est diagonalisable :

Nous venons de voir que A, matrice réelle d'ordre 3, admet trois valeurs propres réelles distinctes, cela prouve que A est diagonalisable.

3. Déterminons une base de vecteurs propres et P la matrice de passage :

Les trois sous-espaces propres distincts sont de dimension 1, il suffit de déterminer un vecteur propre pour chacune des valeurs propres

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2y - z = x \\ 3x - 2y = y \\ -2x + 2y + z = z \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow x = y = z \end{aligned}$$

Donc

$$E_1 = \{(x,x,x); x \in \mathbb{R}\} = vec\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$E_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

On obtient le système

$$\left\{ \begin{array}{l} 2y - z = 2x \\ 3x - 2y = 2y \\ -2x + 2y + z = 2z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x + 2y - z = 0 \\ 3x - 4y = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{-1}{2}x \\ y = \frac{3}{4}x \end{array} \right.$$

Donc

$$E_2 = \left\{(x, \frac{3}{4}x, \frac{-1}{2}x) : x \in \mathbb{R}\right\} = vec\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}.$$

$$E_{-4} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\}$$

On obtient le système

$$\begin{cases} 2y - z = -4x \\ 3x - 2y = -4y \\ -2x + 2y + z = -4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - z + 4x = 0 \\ 3x - 2y + 4y = 0 \\ -2x + 2y + z + 4z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = x \\ y = -\frac{3}{2}x \end{cases}$$

Donc

$$E_{-4} = (x, \frac{-3}{2}x, x) : x \in \mathbb{R} = vec\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}.$$

La matrice de passage P est égale

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Calculons P^{-1} et déterminons la matrice diagonale D :

On a

$$\det P = -30$$

Donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}{}^t(Com(P)) = -\frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 & -12 & -18 \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

D'ou

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

■

2.4 Applications de la diagonalisation des matrices

2.4.1 Puissance d'une matrice carrée

Définition 2.4.1 . Soit A une matrice carrée et n un entier naturel.

Le carré de A est la matrice, noté A^2, égale à $A \times A$.

Le cube de A est la matrice, noté A^3, égale à $A \times A \times A$. Plus généralement, la puissance n-ième de A est la matrice, notée A^n, égale au produit de n facteurs A.

Autrement dit,

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n\ facteurs}$$

avec $A^0 = I_n$ et $A^{n+1} = A^n \times A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

■ **Exemple 2.19** . On cherche à calculer A^p avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On calcule A^2, A^3 et A^4 et on obtient :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, A^4 = A^3 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

L'observation de ces premières puissances permet de penser que la formule est :

$$A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^{p-}-1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}.$$

Démontrons ce résultat par récurrence.

Pour cela, dé nissons notre hypothèse de récurrence h_p à l'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ comme étant

$$H_p : A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^{p-}-1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}$$

1– Le résultat est vrai pour $p = 1$ (on retrouve A).

2– On suppose H_p est vraie pour un entier $p \in \mathbb{N}^*$ et on démontre H_{p+1}. Or, d'après la définition,

$$A^{p+} = A^p \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^{p-}-1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^{p+1-}-1 \\ 0 & (-1)^{p+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{p+1} \end{pmatrix},$$

d'où H_{p+1}. Donc la propriété est démontrée par récurrence. ■

■ **Exemple 2.20** Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont 1 et 3 et on trouve la diagonalisation

$$A = PDP^{-1}$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Notons que

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} A^k &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^k+1 & 3^k-1 \\ 3^k-1 & 3^k+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour $k = 3 \Rightarrow A^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 28 & 26 \\ 26 & 28 \end{pmatrix}$ ∎

Une autre application de la diagonalisation est pour le calcul de l'exponentielle de matrice. Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, on pose

$$e^A = \exp(A) = I_n + \frac{A}{1!} + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + ... =_{k\geq 0} \frac{1}{k!}A^k$$

Notons quepour $A = 0$ (la matricenulle), ona

$$\exp(0) = I_n + \frac{0}{1!} + \frac{0}{2!} + ... + \frac{0}{k!} + ... = I_n.$$

R . La fonction classique exponentielle est donnée, pour $z \in \mathbb{C}$, par

$$e^z =_{k\geq 0} \frac{1}{k!}z^k$$

■ **Exemple 2.21** . Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2 et A^3, puis en déduire $\exp(A)$.

En effet,d'après le calcul, on a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

De plus, $A^3 = A.A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} e^A &= I_3 + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} = I_3 + A + \frac{A^2}{2} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ \frac{13}{2} & \frac{9}{2} & \frac{21}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

∎

Théorème 2.4.1 . Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, la matrice e^A existe et vérifie les propriétès suivantes

1. La matrice eA est inversible et son inverse est e-A,

2. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ deux matrices qui commutent, c'est-à-dire $AB = BA$, alors

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

3. Soit $P \in G_{Ln}(\mathbb{K})$, une matrice inversible, on a

$$e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}.$$

■ **Exemple 2.22** . Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont 1 et 3 et on trouve la diagonalisation avec $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Notons que

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme dans le cas des puissances de matrices, le fait essentiel est que l'exponentielle d'une matrice diagonale est facile est calculer. Plus précisèment, soit la matrice diagonale D dont la diagonale est $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, alors la matrice e^D est diagonale avec pour diagonale $\left(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n}\right)$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} e^A &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^1 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^3+e & e^3-e \\ e^3-e & e^3+e \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

2.4.2 Formule du binôme

Proposition 2.4.2 — Calcul de $(A+B)^p$ lorsque $AB = BA$. . Soient A et B deux éléments de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent, c'est-à-dire tels que $AB = BA$. Alors, pour tout entier $p > 0$, on a la formule

$$(A+B)^p =_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k}B^k,$$

où $\binom{p}{k} = \frac{p!.}{k!(p-k)!}$

pour $p = 2$ on a $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$.

■ **Exemple 2.23** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que l'on décompose en $A = I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Notons que
$N^2 = 0$. De plus I et N commutent, donc pour $p \in \mathbb{N}$ on obtient

$$A^p = (I+N)^p = I^p + pI^{p-1}N,$$

par la formule du binôme. On en déduit

$$A^p = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

■ **Exemple 2.24** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ On pose $N = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. la matrice N est nilpotente (c'est-à-dire il existe $k \in N$ tel que $N^k = 0$) comme le montrent les calculs suivants

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } N^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme on a $A = I + N$ et les matrices N et I commutent (la matrice identité commute avec toutes les matrices), on peut appliquer la formule du binôme de Newton. On utilise que $I^k = I$ pour tout k et surtout que $N^k = 0$ si $k > 4$. On obtient

$$\begin{aligned} (N+I)^p &= A^p =_{k=0}^{p} \binom{p}{k} N^k I^{p-k} =_{k=0}^{3} \binom{p}{k} N^k \\ &= I + pN + \frac{p(p-1)}{2!} N^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} N^3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & p & p^2 & p\left(p^2 - p + 1\right) \\ 0 & 1 & 2p & p(3p-2) \\ 0 & 0 & 1 & 3p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

2.5 Calcul de la puissance k-ième d'une matrice diagonalisable

Soit A une matrice diagonalisable d'ordre n, à coefficients dans K. Pour calculer A^k en fonction de k ($k \in \mathbb{N}^*$), on procède comme suit :

• On **diagonalise** A , ce qui consiste à :

– Calculer **le polynôme caractéristique** de A.

– Déterminer **les valeurs propres de** A.

– Déterminer les espaces propres de A en précisant une base pour chacun d'entre eux. La réunion de toutes ces bases donnera une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{K}^n$, constituée de vecteurs propres de A.

– Ecrire P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ vers $\mathscr{B}$.

• Notons par f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ associé à la matrice A relativement à la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Puisque $\mathscr{B}$ est constituèe de vecteurs propres de A (donc de f), la matrice associée à f relativement à $\mathscr{B}$ s'écrit :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ 0 & \lambda_2 & & & & \\ 0 & 0 & . & & & \\ . & . & & . & & \\ . & . & & & . & \\ 0 & 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

2.5.1 Application sur le calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.

Supposons que A soit diagonalisable. C'est-'a-dire qu'il existe P et D avec

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ 0 & \lambda_2 & & & & \\ 0 & 0 & . & & & \\ . & . & & . & & \\ . & . & & & . & \\ 0 & 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ et } D = P^{-1}AP.$$

On a:

$$D^k = P^{-1}A^kP \quad A^k = PD^kP^{-1}.$$

Soit

$$A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & & & \\ 0 & \lambda_2^k & & & & \\ 0 & 0 & . & & & \\ . & . & & . & & \\ . & . & & & . & \\ 0 & 0 & & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

Ceci permet de calculer les suites linéaires récurrentes

$$U_k = AU_{k-1} \quad U_k = A^kU_0$$

avec

$$U_k = \begin{pmatrix} u_{1,k} \\ u_{2,k} \\ . \\ . \\ . \\ u_{n,k} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} u_{1,k} \\ u_{2,k} \\ . \\ . \\ . \\ u_{n,k} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ . \\ . \\ . \\ u_{n,0} \end{pmatrix}.$$

■ **Exemple 2.25** Soit $(Un)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = AU_n \\ U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Donner l'expression de U_n en fonction de n.

En raisonnant par récurrence, on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ Un = A^n U_0.$$

Par ailleurs, on a $AU_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. En utilisant la question précédente, on trouve alors que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{3n} = (-8)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ U_{3n+1} = (-8)^n \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ U_{3n+2} = (-8)^n \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

■

Corollaire 2.5.1 Soit D une matrice diagonale;i.e.,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ 0 & \lambda_2 & & & & \\ 0 & 0 & . & & & \\ . & . & & . & & \\ . & . & & & . & \\ 0 & 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix} = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$$

Alors

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & & \\ 0 & e^{\lambda_2} & & & \\ 0 & 0 & . & & \\ . & . & & . & \\ . & . & & & . \\ 0 & 0 & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} = diag\left\{e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, ..., e^{\lambda_n}\right\}.$$

■ **Exemple 2.26** Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer $\exp A$:

En efftet, d'après ce qui précède on obtient

$$A = \begin{pmatrix} e^{-1} & 1 \\ 1 & e^2 \end{pmatrix}$$

■

Exercise 2.1 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Calculer D^2, D^3, puis D^k.

3. Trouver une formule pour A^k. ■

2.5.2 Trigonalisation

Définition 2.5.1 . Un endomorphisme f de E est dit **trigonalisable** s'il existeune base $(\mathscr{B}_i)_{1\leq i\leq n}$ de E suivant laquelle la matrice representant f soit **triangulaire supérieure**

Définition 2.5.2 — Version matricielle. . Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite **trigonalisable** si elle est semblable a une matrice **triangulaire supérieure** ; autrement dit, s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}AP$ soit **triangulaire supérieure**.

Théorème 2.5.2 — Caractérisation. Un endomorphisme f de E est **trigonalisable** si et seulement si son polynôme caracteristique P_f est **scindé** sur $\mathbb{K}$.

Théorème 2.5.3 — Version matricielle. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est **trigonalisable** si et seulement si son polynôme caracteristique P_A est **scindé** sur $\mathbb{K}$.

Définition 2.5.3 Un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est dit triangularisable si et seulement si il existe une base dans laquelle $M(f)$ est triangulaire.

R
- Pour trigonaliser une matrice, il n'y a pas de méthode globale à connaître a priori.
- La trigonalisabilité d'une matrice s'obtient après le calcul de son polynôme caractéristique et le constat que ce polynôme est scindé sur le corps de référence de la matrice.
- Si la matrice est considérée comme matrice complexe, elle est donc toujours trigonalisable.

■ **Exemple 2.27** Considérons les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors l'égalité matricielle suivante

$$T = P^{-1}AP.$$

Avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. ■

■ **Exemple 2.28** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{vmatrix}$$ ■

2.6 Polynôme minimal et théorème de Cayley-Hamilton

Dans ce paragraphe, $\mathbb{K}$ désigne le corps des complexes ou le corps des réels. Soit $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes a une indéterminée X et a coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Un polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ s'ecrit

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + +a_pX^n.$$

L'entier p est le degré de $P(X)$. Rappelons egalement que l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ sur le corps $\mathbb{K}$ est de dimension infinie et possède une base dénombrable donnée par la famille

$$\mathscr{B} = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$$

On peut définir également dans $\mathbb{K}[X]$ une multiplication commutative: si $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + +a_pX_p$ et $Q(X) = b_0 + b_1X + a_2X^2 + +b_qX^q$ sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré respectif p et q, alors le polynôme $(PQ)(X) = P(X)Q(X)$ est le polynôme de degré $p+q$ défini par

$$PQ(X) = c_0 + c_1X + ... + c_{p+q}X_{p+q}.$$

$$\begin{cases} c_0 = a_0b_0, \\ c_1 = a_0b_1 + a_1b_0, \\ c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + ... + a_ib_{k-i} + ... + a_{k-1}b_1 + a_kb_1, \\ c_{p+q} = a_pb_q \end{cases}$$

2.6.1 La division euclidiénne

Etant donnés deux polynômes $P_1(X), P_2(X) \in \mathbb{K}[X]$ de degré respectif p_1 et p_2 avec p_1 p_2, il existe un unique polynôme $Q(X)$ appel e quotient et un unique polynôme $R(X)$ appelé le reste tels que

(**1**) degré $R(X) <$ degré $P_1(X)$,
(**2**) $P_1(X) = P_2(X)Q(X) + R(X)$.

2.6.2 Polynôme de matrice

Définition 2.6.1 Soit $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_pX_p$ un polynôme a coeficients dans $\mathbb{K}$. Si $M \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée a coefficients dans $\mathbb{K}$, on note par $P(A)$ la matrice

$$P(A) = a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + +a_pA^p.$$

ou I_n est la matrice identité.

Exemple 2.29 (**1**) Soit $P(X) = 2 + 3X + 4X^2 \in \mathbb{R}[X]$ et soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$P(A) = 2I_2 + 3A + 4A^2,$$

ce qui donne

$$P(A) = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 43 & -19 \\ 19 & 5 \end{pmatrix}.$$

(**2**) Soit $P(X) = X^2 - 4X + 4$ et A la matrice donnée dans l'exemple précédent. Alors

$$P(A) = 4I_2 - 4A + A^2$$

ce qui donne

$$P(A) = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■

2.6.3 Polynôme d'endomorphisme

Soit $\mathbb{K}$ un corps et f un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Définition 2.6.2 On remplace X^k par f^k (ou A^k) et 1 par I_{dE} (ou I_n).
Plus généralement, pour un polynôme

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ...a_nX^n \in \mathbb{K}[X].$$

On définit l'endomorphisme:
$P(f) := a_0I_n + a_1f + a_2f^2 + ... + a_nf^n$ et $P(A) = a_0 + a_1A + a_2A^2 + ...a_nA^n$

Proposition 2.6.1 Pour tous polynômes P et Q on a :
- $P(f)Q(f) = Q(f)P(f)$
- $P(A)Q(A) = Q(A)P(A)$

■ **Exemple 2.30 — Polynôme d'une diagonale.** .

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & & 0 \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ 0 & 0 & . & . & \lambda_n \end{pmatrix},$$

on a:

$$P(D) := \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 & . & . & 0 \\ 0 & P(\lambda_2) & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ 0 & . & . & . & P(\lambda_n) \end{pmatrix},$$

pour tout polynôme $P(X) \in P[X]$. ■

2.7 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 2.7.1 — Cayley-Hamilton. Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $P_A(X)$ son polynôme caractéristique. Alors

$$P_A(A) = 0$$

De même, soit $f \in \mathscr{L}(E)$, avec E de dimension finie. Alors

$$P_f(f) = 0$$

■ **Exemple 2.31** . Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1+\lambda)(1+\lambda) + 2 = \lambda^2 + 1$$

Vérifions le théorème de Cayley-Hamilton sur cet exemple, en calculant $P_A(A)$

$$P_A(A) = A^2 + I^2 = -I^2 + I^2 = 0$$

■

■ **Exemple 2.32** Plus généralement, en dimension 2, posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

On a

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc \\ &\Rightarrow P_A(A) = A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vérifions que $P_A(A)=0$

$$\begin{array}{rcl} \text{On a } P_A(A) & = & A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2 \\ & = & \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} -(a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

■

■ **Exemple 2.33** Considérons par exemple la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique s'écrit

$$P_A(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-5\lambda-2$$

Le théorème de Cayley-Hamilton affirme que $A^2-5A-2I=0$, le théorème de Cayley-Hamilton permet de calculer les puissances d'une matrice plus simplement que par un calcul direct. Reprenons la relation précédente

$$A^2-5A-2I_2=0 \Leftrightarrow A^2=5A+2I_2$$

Ainsi, par exemple, pour calculer A^4, nous pouvons écrire

$$A^3=(5A+2I_2)A=5A^2+2A=5(5A+2I_2)+2A=27A+10I_2$$

Ainsi vous pouvez calculer de proche en proche toutes les puissances positives de A

$$\begin{array}{rcl} A^4 & = & A^3A=(27A+10I_2)A=27A^2+10A=27(5A+2I_2)+10A \\ & = & 145A+54I_2. \end{array}$$

On peut également utiliser la relation polynomiale initiale $A^2-5A-2I_2=0$ pour prouver l'inversibilité de A et calculer son inverse.

$$A(A-5I_2)=2I_2 \Leftrightarrow A^{-1}=\left(\frac{1}{2}A-5I\right)$$

■

■ **Exemple 2.34** En utilisant le Théorème de Cayley-Hamilton, calculer l'inverse de la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tout d'abord, calculons $P_A(x)$

$$P_A(x)=\begin{vmatrix} 1- & 1 & 0 \\ -1 & 0-x & 0 \\ 2 & 0 & -1-x \end{vmatrix} = x^3+1$$

On en déduit que

$$P_A(A)=A^3+I_3=0 \Rightarrow A^3=-I \Rightarrow A^{-1}=-A^2$$

Finalement, on obtient

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

■

2.8 Polynômes annulateurs d'une matrice de $M_n(\mathbb{K})$

2.8.1 Polynôme unitaire

Définition 2.8.1 un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$ est dit **unitaire** si son coefficient dominant (le coefficient du terme de plus haut degré) est égal à 1.

R Un polynôme P est donc unitaire si et seulement s'il s'écrit sous la forme

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$$

Définition 2.8.2 Soit $M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée et $P(X) \in K[X]$ un polynôme à coefficients dans K. On dit qu'un polynôme $P(X)$ est un polynôme annulateur de la matrice A ou de l'endomorphisme f si

$$P(A) = 0, \text{ ou si } P(f) = 0.$$

■ **Exemple 2.35** Soit $A \in M_2(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de A est

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - Tr(A)\lambda + det(A).$$

On montre que $P_A(\lambda)$ est un polynôme annulateur de A. ■

■ **Exemple 2.36** Dans l'exemple précédent, le polynôme $P(X) = X - 4X + 4$ est un polynôme annulateur de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Notons egalement que le polynôme nul est un polynôme annulateur de toute matrice carrée. ■

2.8.2 Polynôme minimal

Définition 2.8.3 Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée complexe. On appelle polynôme **minimal** de M, le polynôme annulateur de degré minimum et unitaire (c'est- a-dire dont le coefficient de plus haut degré egal a 1). On le note $\mathfrak{m}_M(X)$.

Théorème 2.8.1 Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n ($n > 1$) (ou A une matrice carrée d'ordre n). Le polynôme minimal de f (respectivement de A) divise le polynôme caractéristique de f (respectivement de A).

■ **Exemple 2.37** Soit la matrice à coefficients réels

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique, $P_M(X) = (1-X)^3$

Pour déterminer le polynôme minimal de on fait les remarques suivantes :
• il admet 1 comme unique racine,
• il divise $(1-X)^3$
• il est unitaire.

Il n'y a donc que trois possibilités $(1-X)$, $(1-X)^2$ ou $(1-X)^3$. Or la matrice M est différente de I_3 $(M - I_3 \neq 0)$, donc n'est pas un polynôme annulateur de M. Pour conclure, il suffit alors de calculer $(M-I_3)^2$. On trouve la matrice nulle donc

$$\mathfrak{m}_M(X) = P\min(X) = (X-1)^2.$$

■

■ **Exemple 2.38** Calculer le polynôme minimal de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tout d'abord, le polynôme caractéristique est $P_A(x) = (x-1)^2$.

$\mathfrak{m}_A(x) = (x-1)$ ou $\mathfrak{m}_A(x) = (x-1)^2$, et puisque $(A - I_2) \neq 0$, alors

$$\mathfrak{m}_A(x) = P_A(x) = (x-1)^2.$$

■

■ **Exemple 2.39** **1**) Soit $M = I_n$ la matrice identité. Alors

$$\mathfrak{m}_M(X) = 1 - X.$$

En effet

$$\mathfrak{m}_{I_n}(X) = I_n - I_n = 0:$$

Ce polynôme est annulateur et de degré minimum 1.

2) Soit

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$: Alors

$$\mathfrak{m}_D(X) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2) = X^2 - (\lambda_1+\lambda_2)X + \lambda_1\lambda_2$$

En effet, comme D n'est pas du type aI_2, son polynôme minimal est de degré au moins egal a 2. Calculons $m_D(X)$: On

$$\mathfrak{m}_D(X) = D^2 - (\lambda_1+\lambda_2)D + \lambda_1\lambda_2 I_2$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}_D(D) &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^{2-} - (\lambda_1+\lambda_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + \lambda_1\lambda_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1(\lambda_1+\lambda_2) & 0 \\ 0 & \lambda_2(\lambda_1+\lambda_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1\lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix}. \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ainsi $\mathfrak{m}_D(X)$ est annulateur de D et de degrée minimum dans $\mathscr{A}nn(D)$. C'est bien le polynôme minimal. ■

■ **Exemple 2.40** . Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer le polynôme minimal de A.

Le calcul du polynôme caractéristique donne $\chi_A(X) = -(X-1)^2(X+1)$. Les valeurs propres de A sont donc 1 et -1. Les racines du polynôme minimal $\mathfrak{m}_A$ sont donc exactement 1 et -1, et on doit avoir $\mathfrak{m}_A(X)$. Les possibilités pour $\mathfrak{m}_A(X)$ sont donc $(X-1)(X+1)$ ou $(X-1)^2(X+1)$. Il suffit ci de tester si $(X-1)(X+1)$ est annulateur. Le calcul donne $(A-I)(A+I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ donc le polynôme minimal est

$$\mathfrak{m}_A(X) = (X-1)^2((X+1) = -\chi_A$$

Déduisons A^{-1},A^3 et A^5.

On a donc $(A-I)^2(A+I) = 0 = A^3 - A^2 - A + I$, d'oú $A(I+A-A^2) = I$, et $A^{-1} = I + A - A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ D'autre part $A^3 = A^2 + A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, Pour A^5 on calcule A^3A^2 ou $A^5 = 2A^2 + A - 2I$ par réductions successives. On obtient $A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ■

Exercise 2.2 — Exercice corrigé. . Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer le polynôme minimal de A.
3. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse. ■

■ **Exemple 2.41 — Corrigé.** On a

$$\mathbf{1}.\ P_A(X) = \begin{vmatrix} X-3 & 1 & -1 \\ 0 & X-2 & 0 \\ 1 & 1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-2)\left((X-3)(X-1)+1\right) = (X-2)^3.$$

2. Le polynôme minimal divisant le polynôme caractéristique, on a trois polynômes candidats possible pour ce dernier: $X-2$, $(X-2)^2$ et $(X-2)^3$. Il suffit donc de voir lequel de ces polynômes est le premier plynôme annulateur de A. On a

$$\begin{aligned} A-2I_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } (A-2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{M_3}(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

d'ou

$$m_A(X) = (X-2)^2$$

3. En utilisant le fait que le polynôme minimal est annulateur de A, on trouve que $(A-2I_3)^2 = A^2-4A+4I_3 = 0_{M_3(\mathbb{R})}$, d'où

$$I_3 = \frac{-1}{4}(A^2-4A) = A\left(I_3 - \frac{1}{4}A\right)$$

On en déduit que la matrice A est inversible, d'inverse $A^{-1} = I_3 - \frac{1}{4}A$. ■

■ **Exemple 2.42** Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est

$$P_M(X) = -(X+1)^2(X-3)$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 3$, racine simple et $\lambda_2 = -1$, racine double. On en déduit que le polynôme minimal est l'un des polynômes suivants, rangés par degré croissant:

(**1**) $P_1(X) = (X+1)(X-3)$
(**2**) $P_2(X) = (X+1)^2(X-3)$.

En effet ce sont les seuls polynômes ayant -1 et 3 comme racines et n'ayant que ces racines de multiplicite inférieure ou egale a celle du polynôme caractéristique. On vérifie que $P_1(X)$ s'il est annulateur. S'il est annulateur, il est minimal. Sinon, on prend le suivant dans la liste. On a

$$P_1(M) = (M+I_3)(M-3I_3) = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 16 & -8 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

Ainsi $P_1(X)$ n'est pas annulateur. On en eduit que $P_2(X)$ est annulateur.

$$P_2(M) = (M+I_3)^2(M-3I_3) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 4 & -10 & 8 \\ 6 & -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Théorème 2.8.2 Soient $M \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice (non nulle) et $\mathfrak{m}_M(X)$ son polynôme minimal. Alors

(**1**) Toutes les valeurs propres de M sont des racines de $\mathfrak{m}_M(X)$.

(**2**) Si est une racine de $\mathfrak{m}_M(X)$, alors est une valeur propre de M.

Proposition 2.8.3 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathscr{L}(E)$: Supposons le polynôme caractéristique de f scindé, soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ ses racines distinctes alors :

$$f \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow P_{\min}(X) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)...(X-\lambda_r).$$

2.9 Matrice de Jordan

Définition 2.9.1 Un bloc de Jordan d'ordre n associé à la valeur propre noté souvent par $J_{\lambda,n}$ ou $J_n(\lambda)$ est une matrice carrée d'ordre n sous la forme

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & & 0 \\ . & . & . & 1 & & 0 \\ . & . & . & . & 1 & . \\ . & & . & . & . & 1 \\ 0 & . & . & . & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$$

avec $\lambda \in \mathbb{K}$, $n \geq 0$.

$J(\lambda)$ est une matrice triangulaire supérieure avec λ sur la diagonale principale, 1 sur la diagonale supérieure et des 0 ailleurs.

R Le bloc de Jordan $J_n(\lambda)$ peut aussi être écrit sous la forme

$$J_n(\lambda) = I_n + N$$

où N est nilpotente d'indice n:i.e. $N^{n-1} \neq 0$ et $N^n = 0$. En outre, il peut être vu comme le bloc de Jordan $J_n(0)$

Définition 2.9.2 On appelle bloc de Jordan nilpotent une telle matrice où les coefficients diagonaux sont tous nuls, c'est-à-dire de la forme

$$J_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ . & \ddots & . & 1 & \ddots & 0 \\ . & \ddots & & . & 1 & 0 \\ . & & . & . & 0 & 1 \\ 0 & . & . & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$$

Définition 2.9.3 Une **matrice de Jordan** est une matrice diagonale par bloc de la forme

$$J_n(0) = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline J_1(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & J_2(\lambda) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & J_r(\lambda_r) \\ \hline \end{array}\right),$$

où les J_i sont des blocs de Jordan.

■ **Exemple 2.43** Voici une matrice de Jordan

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Elle est formée de :
• un bloc de Jordan 2×2 associé à la valeur propre -3,
• un bloc de Jordan 3×3 associé à cette même valeur -3,
• un bloc de Jordan 1×1 associé à la valeur 2,
• un bloc de Jordan 3×3 associé à la valeur 5. ■

2.9.1 Quelques propriétés simples de la matrice $J(\lambda)$.

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $J = J_n(\lambda)$. On montre facilement que l'on a :
(**i**) $P_J(X) = (-1)^n (X - \lambda)^n$.
(**ii**) $\mathfrak{M}_J(X) = (X - \lambda)^n$.
(**iii**) $\dim E(\lambda) = 1$ (oú $E(\lambda)$ d´esigne l'espace propre de J, associè à la valeur propre λ

2.10 Le théorème de Jordan

Théorème 2.10.1 Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ a son polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$, alors A est semblable (sur $\mathbb{K}$) à une matrice de Jordan, appelée réduite de Jordan de A. Il existe donc $P \in M_n(\mathbb{K})$ inversible telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_r(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

où les J_i sont des blocs de Jordan.

Théorème 2.10.2 Soit f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique $P_f(X)$ est scindé sur $\mathbb{K}$.

Il existe une base $\mathscr{B}$ de E où la matrice de f est de Jordan, c'est-à-dire

$$Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} J_1(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_r(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

2.10.1 Etapes à suivre pour trouver la réduite de Jordan

Pour trouver la réduite de Jordan d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, on suit les étapes suivantes:

► Calculer **le polynôme caractéristique** et **les valeurs propres** de A.

► Pour chaque valeur propre λ, calculer **le sous-espace propre** $E_\lambda = \ker(A - \lambda I_n)$ et trouver une

base de E_λ. **Le nombre de blocs** de **Jordan** associés à λ est dim E_λ.

► Pour chaque vecteur propre de la base de E_λ, on construit le bloc de Jordan associé :

• Si $v_1 \in E_\lambda$ est un vecteur propre de la base de E_λ, alors on cherche $v_2 \in \mathbb{K}^n$ tel que $(A - \lambda I_n)v_2 = v_1$.

• Puis on cherche s'il existe $v_3 \in \mathbb{K}^n$ tel que $(A - \lambda I_n)v_3 = v_2$.

• On arrête le processus lorsqu'il n'y pas de solution.

• L'itération suivante $(A - \lambda I)\, v_{p+1} = v_p$. On a alors

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda v_1 \\ Av_2 &= v_1 + \lambda v_2 \\ Av_p &= v_{p-1} + \lambda v_p \end{aligned}$$

• Donc, dans le sous-espace engendré par ces $(v_1, v_2, ..., v_p)$, la matrice associée à A, dans cette base, est exactement le bloc de Jordan :

$$
J(\lambda) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_p \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} Av_1 & Av_2 & \ldots & & Av_p \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\
\vdots & \ldots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \cdots & 0 & \ddots & 1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda
\end{pmatrix} \end{array},
$$

■ **Exemple 2.44** Soit

$$
A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}
$$

Calculons sa réduite de Jordan J et une matrice de passage P telle que $P^{-1}AP = J$.

1.$P_A(\lambda) = ?$

$$
P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 & -2 \\ -3 & -1-\lambda & 3 \\ 2 & 3 & 0-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-2)^2.
$$

Il y a donc deux valeurs propres : -1 et 2

2.Valeur propre -1.

La valeur propre -1 est de multiplicité 1. Le sous-espace propre associé

$$
E_{-1} = Ker(A+I_3) = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 : Av = -v \right\}.
$$

sera de dimension 1. Après calculs, on trouve que $E_{-1} = vect \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Comme la multiplicité de -1 comme racine de $P_A(\lambda)$ est 1, alors la valeur propre -1 sera juste associée à un bloc de Jordan de taille 1×1.

3. Valeur propre 2.

La valeur propre 2 est de multiplicité 2. Il faut déterminer le sous-espace propre associé

$$
E_2 = Ker(A-2I_3) = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 : Av = 2v \right\}
$$

Après calculs, on trouve que

$$
E_2 = vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
$$

Comme E_2 est un espace vectoriel de dimension 1, alors que 2 est racine de multiplicité 2, la matrice A n'est pas diagonalisable et on sait alors que la valeur propre 2 sera associée à un bloc de Jordan de taille 2×2.

4. Bloc de Jordan.
On cherche $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $(A-2I_3)\,v_3 = v_2$. Si $v_3 = (x,y,z)$ alors :

$$\begin{aligned}
(A-2I_3)\,v_3 &= v_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2x+3y-2z=1 \\ -3x-3y+3z=0 \\ 2x+3y-2z=1 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2x+3y=1+2z \\ x+y=z \end{array} \right.
\end{aligned}$$

En prenant par exemple $z=0$ (n'importe quelle valeur conviendrait), on choisit $v_3 = (-1,1,0)$.

5. Matrice de Jordan.
Dans la base (v_1,v_2,v_3), on a $Av_1 = -v_1$, $Av_2 = 2v_2$, et comme $(A-2I_3)v_3 = v_2$ alors

$$Av_3 = v_2 + 2v_3.$$

La matrice associée à A dans la base (v_1,v_2,v_3) est donc :

$$J(\lambda) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Av_1 & Av_2 & Av_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array},$$

Autrement dit, $J = P^{-1}AP$ où P est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs v_1,v_2,v_3 exprimés dans la base canonique

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■

■ **Exemple 2.45** Soit f un endomorphisme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 5 représentè dans une certaine base par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique associè est $P_f(X) = -(X-3)^5$. Cherchons une base de l'unique sous-espace propre E_3, en résolvant le système

$$(A-3I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dont on trouve deux solutions linéairement indépendantes, par exemple

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La réduction de Jordan de la matrice A fera donc apparaître deux bloc

Pour obtenir le bloc associ´e au vecteur colonne propre U_1 on cherche un vecteur U_2 telque

$$(A-3I_3)\,U_2 = U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dont une solution est

$$U_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie ensuite que le système $(A-3I_3)\,U_3 = U_2$ n'admet pas de vecteur U_3 solution, donc le processus s'arrète et on a obtenu un premier bloc de Jordan $J_2(3)$.

Pour obtenir le bloc associé au vecteur colonne propre V_1 on cherche un vecteur V_2 telque

$$(A-3I_3)\,V_2 = V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dont une solution est

$$V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On cherche ensuite un vecteur V_3 tel que

$$(A-3I_3)\,V_3 = V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dont une solution est

$$V_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le processus s'arrête nécessairement là, car nous avons obtenu assez de vecteurs pour générer l'espace vectoriel de dimension 5. En utilisant la matrice de passage

$$V = (U_1, U_2, V_1, V_2, V_3),$$

on vérifie que

$$V^{-1} \cdot A \cdot V = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_2(3) & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & J_3(3) \end{pmatrix}$$

■

Exercise 2.3 Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que

$$A^3 = 5A - 2I_3.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A:
2. Écrire la forme réduite de Jordan de A:
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire réelle satisfaisant la relation de récurrence

$$u_{n+3} - 5u_{n+1} + 2u_n = 0,\ u_0 = 1,\ u_1 = -1,\ u_2 = 0.$$

Déterminer le terme général u_n en fonction de n et les premiers termes u_0, u_1, u_2 ■

1. On a :$A^3 - 5A + 2I = 0$: Donc d'après le théorème de Cayley-Hamilton
$P_A(X) = X^3 - 5X + 2 = (X-2)(X+1+\sqrt{2})(X+1-\sqrt{2}) = m_A(X)$:
2. Comme A est diagonalisable, alors

$$J = D = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

3.

$$u_{n+3} - 5u_{n+1} + 2u_n = 0,\ u_0 = 1,\ u_1 = -1,\ u_2 = 0$$

$$X_{n+1} = AX_n,\ X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ou $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}, X_0 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$

$$X_n = A^n X_0$$

3. Systèmes différentiels linéaires

L'une des propriétés fondamentales de l'exponentielle d'une matrice réside dans le fait qu'elle est intimement liée à la résolution des équations linéaires à coefficients constants.

Définition 3.0.1 Un système différentiel linéaire homogène est un système d'équations différentielles de la forme :

$$(S):\left\{\begin{array}{l} x_1^{'}(t)=a_{11}x_1(t)+\ldots+a_{1n}x_n(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_n^{'}(t)=a_{n1}x_1(t)+..+a_{nn}x_n(t) \end{array}\right.$$

avec $a_{ij}\in\mathbb{R}$ et $x_i:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ dérivables. Soit $A=(a_{ij})\ 1\leq i,j\leq n$

On pose

$$X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{pmatrix},X^{'}(t)=\begin{pmatrix} x_1^{'}(t) \\ x_2^{'}(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{pmatrix},A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & .a_{1j}.. & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Avec cette notation matricielle, le système différentiel (S) devient :

$$X^{'}(t)=AX(t)$$

Résoudre le système linéaire $X^{'}(t)=AX(t)$, avec $A\in M_n(\mathbb{R})$ (ou $A\in M_n(\mathbb{C})$) une matrice constante, c'est donc trouver $X(t)$ dérivable (c'est-à-dire n fonctions $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ dérivables) tel que $X^{'}(t)=AX(t)$, pour tout $t\in\mathbb{R}$

Si A est une matrice **diagonale** à coefficients réels, alors le système s'écrit $X'(t) = AX(t)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & . & & & & . \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ainsi X est la solution d'un système différentiel diagonal:

$$\begin{cases} x_1^{'}(t) = \lambda_1 x_1 \\ x_2^{'}(t) = \lambda_2 x_2 \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ x_n^{'}(t) = \lambda_n x_n \end{cases}$$

On résout indépendamment chaque équation $x_i^{'}(t) = \lambda_i x_i(t)$, dont les solutions sont les $x_i(t) = k_i e^{\lambda it}$, $k_i \in \mathbb{R}$. Les solutions $X(t)$ sont donc les fonctions

$$X(t) = \begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} \\ k_2 e^{\lambda_2 t} \\ . \\ . \\ . \\ k_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

où $k_1, ..., k_n$ sont des constantes réelles

Proposition 3.0.1 Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$, λ une valeur propre de A et V un vecteur propre associé. Alors la fonction

$$X : \mathbb{R} \underset{t \mapsto e^{\lambda t} V}{\longrightarrow} \mathbb{R}^n$$

est solution du système différentiel

$$X' = AX$$

Proof. Soit $X(t) = e^{\lambda t} V$. On a alors $X'(t) = 3bbe^{\lambda t} V = e^{\lambda t}(\lambda V) = e^{\lambda t}(AV) = AX(t)$. Cela prouve que $X(t)$ est bien solution du système homogène $X' = AX$. ■

3.1 Cas où A est diagonalisable

• Soit P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $V_1, ..., V_n$. Alors la matrice $P^{-1}AP = D$ est diagonale.

• Soit $X(t)$ une solution du système différentiel $X' = AX$. La matrice de passage P étant inversible,

notons $Y = P^{-1}X$ (donc $X = PY$). Alors $Y' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = P^{-1}APY = DY$. Ainsi Y est la solution d'un système différentiel diagonal :

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' \\ y_2' \\ . \\ . \\ . \\ y_n' \end{array}\right. = DY = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & . & & & & . \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$$

Par suite

$$\frac{y_i'}{y_i} = \lambda_i \Rightarrow y_i = k_i e^{\lambda_i t}.$$

Par substitution dans $X(t) = PY(t)$, nous obtenons

$$X(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \cdots + \ldots k_n e^{\lambda_n t} V_n = k_1 X_1(t) + \cdots + k_n X_n(t)$$

i.e

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} V_1 \\ . \\ . \\ . \\ k_n e^{\lambda_n t} V_n \end{pmatrix},$$

où les V_i sont les vecteurs propres qui forment les colonnes de la matrice P

Finalement: $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de solutions

■ **Exemple 3.1** Résoudre le système différetiel

$$X' = AX,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ avec } X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = -1$. De plus, on a

$$E_{\lambda_1} = vect\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} \text{ et } E_{\lambda_2} = vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\},$$

la solution du système différentiel $X' = AX$ est donné par la formule suivante (d'après le calcul des valeurs et vecteurs propres de la matrice A) :

$$X(t) = c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\left\{\begin{array}{l} x_1(t) = 2c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t} \\ x_2(t) = 3c_1 e^{4t} - c_2 e^{-t} \end{array}\right.$$

Comme $X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{cases} 2c_1 + c_2 = 3 \\ 3c_1 - c_2 = 2 \end{cases}$$

Ceci implique $c_1 = c_2 = 1$: Par conséquent

$$\begin{cases} x_1(t) = 2e^{4t} + e^{-t} \\ x_2(t) = 3e^{4t} - e^{-t} \end{cases}$$

■

■ **Exemple 3.2** Résoudre le système difféqetiel

$$X' = AX,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

D'après un calcul simple, on a

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1,\ v_1 = (-1,1,1) \\ \lambda_2 = 2,\ v_2 = (0,1,0) \text{ et } v_3 = (0,0,1) \end{cases}$$

La matrice A est diagonalisable donc, on a

$$X(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x(t) = -c_1 \\ x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ x(t) = c_1 e^t + c_3 e^{2t} : \end{cases}$$

■

■ **Exemple 3.3** On veut résoudre le système différentiel $X' = AX$ avec $X(0) = X_0$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

• **Valeurs propres et vecteurs propres.**
Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ et $\lambda_3 = 5$. Les vecteurs propres associés sont

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• **Solutions générales**. Nous obtenons trois solutions

$$\begin{aligned} X_1(t) &= e^{\lambda_1 t} V_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix},\ X_2(t) = e^{\lambda_2 t} V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}, \\ X_3(t) &= e^{\lambda_3 t} V_3 = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les solutions du système $X' = AX$ sont donc les fonctions de la forme

$$X(t) = aX_1(t) + bX_2(t) + cX_3(t) \text{ avec } a,b,c \in \mathbb{R}.$$

• **Condition initiale.**
On cherche quelle solution vérifie en plus $X(0) = X_0$. Or

$$X(0) = aX_1(0) + bX_2(0) + cX_3(0) = aV_1 + bV_2 + cV_3 = \begin{pmatrix} a+c \\ a+b+c \\ a+b \end{pmatrix}$$

La condition initiale $X(0) = X_0$ se transforme donc en le système linéaire :

$$\begin{cases} a+c = 1 \\ a+b+c = 2 \\ a+b = 3 \end{cases}$$

On trouve $a = 2, b = 1, c = -1$. Ainsi l'unique solution qui vérifie le système et la condition initiale est

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{5t} \\ 2e^t + e^{-2}t - e^{5t} \\ 2e^t + e^{-2t} \end{pmatrix}$$

■

■ **Exemple 3.4** Résoudre le système différentiel

$$Y' = AY, \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

D'après un calcul simple, on a

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_1 = (1,1,0) \\ v_2 = (-1,0,1) \\ v_3 = (1,1,1) \end{cases}$$

La matrice A est diagonalisable, donc on a

$$Y(t) = c_1e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} y_1(t) = c_1e^t - c_2e^t + c_3e^{2t} \\ y_2(t) = c_1e^t + c_3e^{2t} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \\ y_3(t) = c_2e^t + c_3e^{2t} \end{cases}$$

■

■ **Exemple 3.5** Soit le système suivant

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 3x_2 \\ x_2' = 2x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

Mettons-le sous la forme matricielle, nous avons

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ associés à leurs valeurs : $\begin{cases} V_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda_1 = -1 \\ V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda_2 = 4 \end{cases}$,

d'où, la solution est

$$\begin{aligned} X(t) &= (c_1 \exp(-t))V_1 + (c_2 \exp 4t)V_2 \\ &= \begin{pmatrix} c_1 \left(-\frac{3}{2}\right) \exp(-t) + c_2 \exp(4t) \\ c \exp(-t) + c_2 \exp(4t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■