Université de Batna 2 **2eme année SAD**
Faculté des Mathématiques et Informatique **Année 2021-2022**
Département de mathématiques

Examen final (ALG3)

Exercice 1. Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$ définie par:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de M. $(2pts)$
2. Trouver le $dét(M)$. $(1pts)$
3. Déduire que M est inversible ? $(1pts)$
4 Montrer que M est diagonalisable ? $(3pts)$
5. Ecrire la matrice de passage P associée a une base pour les espaces propres des valeurs propres de M. $(2pts)$
6. Écrire la matrice diagonale D en fonction de M et P. Déduire que $M = PDP^{-1}$ $(*)$. $(2pts)$
7. Calculer $M^{-\mathbf{1}}$ en utilisant $(*)$. $(3pts)$

Exercice 2 (intérogation 2). Soit $m \in R$ et $A \in M_3(\mathbb{R})$ définie par $\mathbf{A}_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Pour quelle valeurs de m A_m est-inversible ? $(1pts)$
2. Calculer la matrice inverse de la matrice A_1 $(2pts)$
3. La matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

est -elle diagonalisable ? $(3pts)$

Bonne chance

Solution 1 **1**. *Calculer $P_M(\lambda)$ le polynôme caractéristique de M.*

$$\begin{aligned} P_M(\lambda) &= \det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 2 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 2 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+5\lambda^2-7\lambda+3 \xrightarrow{\dots\dots} (\mathbf{2pnt}) \\ &= -(\lambda-3)(\lambda-1)^2 \end{aligned}$$

2.

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 3. \xrightarrow{\dots\dots\dots\dots} (\mathbf{1pnt})$$

3. *Est ce que M est inversible ?* $\det(A) = 3 \neq 0$ *donc la matrice A est inversible* $\xrightarrow{\dots\dots\dots\dots}$(**2pnt**)

4. *En déduire les valeurs propres de M sont donc*

$$\{1,3\} \xrightarrow{\dots\dots\dots\dots} (\mathbf{1pnt})$$

5. *Trouver une base pour les espaces propres associés aux valeurs propres de f . Il existe deux sous espaces propres*

(**a**)

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{u\in\mathbb{R}^3 : Au=u\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x = y-z\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $B_{E_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *et* $\dim(E_1) = 2 \xrightarrow{\dots\dots\dots} (\mathbf{1pnt})$

(**b**)

$$\begin{aligned} E_3 &= \left\{ u \in \mathbb{R}^3 : Au = 3u \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : y = z,\ x = y \text{ et } x - 2y + z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x = y = z, \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $B_{E_3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *et* $\dim(E_3) = 1. \xrightarrow{\dots\dots\dots} (\mathbf{1pnt})$

6. *Est ce que M est diagonalisable ?. Oui, M est diagonalisable car les dimensions des sous espaces propres et les multiplicités des valeurs propres associées coïncident.* $(\dim(E_1) = \alpha_1 = 2,\ \dim(E_3) = \alpha_2 = 1) \xrightarrow{\dots\dots\dots} (\mathbf{1pnt})$

7.*Écrire M sous la forme $M = PDP^{-1}$.*

Comme M est diagonalisable, d'après le théorème vu en cours, il existe une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et une matrice D diagonale de sorte que $M = PDP^{-1}$.

Pour P c'est la matrice composée des vecteurs propres comme colonnes, donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\dots\dots} (\mathbf{2pnt}) \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{\det(p)} Com\left(P^t\right) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et dans le même ordre que les vecteurs propres, on range les valeurs propres dans la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\dots\dots\dots} (\mathbf{1pnt})\ \textit{Ce qui donne}$$

$$M = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\dots\dots\dots} (\mathbf{1pnt})$$

8 *Calculer* $\mathbf{M^{-1}}$ ***par la formule de l'inverse*** -

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Com\left(A^t\right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\dots\dots} (\mathbf{1pnt})$$

Solution 2 (exercice 2) **1**) $\det(A_m) = 2(m+1)$, *A est inversible ssi* $\det(A_m) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1 \xrightarrow{\dots\dots} (\mathbf{1pnt})$

2) *pour* $m = 1$ $\mathbf{A}_1$ *est inversible et* $\det \mathbf{A}_1 = 4$

La matrice des cofacteurs $Com(\mathbf{A}_1) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & --1 \\ --1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{A}_1^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A}_1)} Com(\mathbf{A}_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & --\frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{\dots\dots\dots} (\mathbf{2pnt})$$

3) $\det(B - \lambda I) = (1-\lambda)^2 (2-\lambda) = \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1, \ \alpha_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2, \ \alpha_2 = 1 \end{cases} \xrightarrow{\dots\dots\dots} (\mathbf{1pnt})$,

$$\begin{aligned} v &= (x,y,z) \in E_1 \Leftrightarrow (B - I) v^T = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -0 & -1 \\ 0 & 0 & -0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= (z, 0, y+z) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists x \neq 0 \\ y = z = 0 \end{cases} \quad tq\ v = x(1,0,0) \Leftrightarrow E_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \right] \xrightarrow{\dots} (\mathbf{1pnt}) \\ &\Leftrightarrow \dim E_1 = 1 \neq \alpha_1 \Rightarrow B \ \textit{n'est pas diagonalisable} \xrightarrow{\dots\dots\dots} (\mathbf{1pnt}) \end{aligned}$$