Université de Batna 2 **2eme année SAD**

Faculté des Mathématiques et Informatique **Année 2021 – 2022** **Semestre2**

Département de mathématiques

Corrigé de l'examen final de la matière(Stats inf1)

Exercice 1 (10pts) (**i**) *On introduit la variable centrée-réduite associée*

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-14}{6} \xrightarrow{\qquad\qquad} \textbf{\textit{2,5pts}}$$

Cette variable aléatoire suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. *On cherche* $P(X > 24)$. *On peut réexprimer cette quantité en fonction de* Z, *dont on connaît la loi, de la manière suivante :*

$$\begin{aligned} P(X &> 24) = P(\frac{X-14}{6} > \frac{24-14}{6}) \\ &= P(Z > 1.666) = 1 - P(Z \leq 1.666) \\ &= 0,0485 \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad} \textbf{\textit{2,5pts}} \end{aligned}$$

(**ii**) *la méthode est la même. On cherche* $P(X \leq 6)$. *On peut réexprimer cette quantité en fonction de* Z, *dont on connaît la loi, de la manière suivante*

$$\begin{aligned} P(X &< 6) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{6-14}{6}) = P(Z < \frac{6-14}{6}) \\ &= P(Z < -1,33333) = P(Z > 1,33333) \\ &= 1 - P(Z \leq 1,33333) = 0.09180, \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad} \textbf{\textit{2,5pts}} \end{aligned}$$

(**iii**) *On cherche* $P(6 < X \leq 12)$. *On peut réexprimer cette quantité en fonction de* Z, *dont on connaît la loi, de la manière suivante*

$$\begin{aligned} P(6 &< X \leq 12) = P\left(\frac{6-14}{6} < Z < \frac{12-14}{6}\right) \\ &= P\left(-1,33333 < Z < -0,33333\right) \\ &= 0,2843 \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad} \textbf{\textit{2,5pts}} \end{aligned}$$

Exercice 2 (10pts) (**i**) *la moyenne est de*

$$\bar{x} = 759,5 \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad} \textbf{\textit{1pts}}$$

et la variance empirique

$$s^2 = 37.85 \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad} \textbf{\textit{1pts}}.$$

On peut prendre ces résultats comme estimations respectives de l'espérance et de la variance

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad} \textbf{\textit{1pts}}$$

est un estimateur biaisé, on corrige souvent la variance en prenant l'estimateur

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 \longrightarrow \textbf{\textit{1pts}}$$

qui donne l'estimation

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = 42,05 \longrightarrow \textbf{\textit{1pts}}$$

(**ii**) *Construire un intervalle de confiance pour μ avec les niveaux de confiance* 0.90 *et* 0.99.

On est dans la situation où la variance est inconnue. On proc'ede donc de la manière suivante. On note X la variable "nombre de connexions", et en remplacant σ^2 par son estimateur non-biaisé, on obtient

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}} \approx T_{\frac{\alpha}{2},\nu} \longrightarrow \textbf{\textit{1pts}}$$

où $T_{\frac{\alpha}{2},\nu}$ représente la loi de Student à ν degrés de liberté. On obtient alors sur la Table de la loi de Student les quantiles $t_{\frac{\alpha}{2},\nu} = 1,833$ et donc l'intervalle de confiance

$$I_\alpha = \left[\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2},\nu}\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2},\nu}\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}\right] \longrightarrow \textbf{\textit{1pts}}$$

ce qui donne après calculs :

$$\begin{aligned} I_{0,9} &= \left[759,5 - 1.833\sqrt{\frac{42,05}{10}}, 759,5 + 1.833\sqrt{\frac{42,05}{10}}\right] \xrightarrow{\textbf{\textit{1,5pts}}} \\ &= [755.24, 762.76]. \end{aligned}$$

Au niveau de confiance 0.99, *seule la valeur de $t_{\frac{\alpha}{2},\nu} = 3.250$. On obtient alors*

$$I_{0,99} = \left[759,5 - 3.250\sqrt{\frac{42,05}{10}}, 759,5 + 3.250\sqrt{\frac{42,05}{10}}\right] \longrightarrow \textbf{\textit{1,5pts}}$$

$$= [752.34, 765.66].$$