Université Mostefa Ben Boulaïd - Batna 2
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Statistiques

Td1 D'algebre 3

Exercice 1 *On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ définie par*

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (3x - z, 2x + 4y + 2z, -x + 3z) \end{array}$$

1. Déterminer la matrice $A = Mat(f)_{\mathcal{B}}$ de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer le polynôme caractéristique de f. En déduire les valeurs propres de f.

3. Déterminer une base pour chaque espace propre de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

4. Trouver une matrice P telle que $A = PDP^{-1}$, ou D est une matrice diagonale que l'on explicitera.

5. Déterminer la matrice A^n, pour tout $n \geq 1$.

Exercice 2 *Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$ définie par :*$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

1. *Calculer le polynôme caractéristique de M.*
2. *Trouver les valeurs propres de M. (On doit trouver deux valeurs propres distinctes.)*
3. *Pour chaque valeur propre, déterminer le sous-espace propre correspondant. On donnera une base de chaque sous-espace propre.*
4. *Montrer que M est diagonalisable ?, et proposer une base B de vecteurs propres.*
Calculer D = MatB(u), la représentation matricielle de u dans la base B. Donner la matrice de passage, notée P, de la base canonique à la base B trouvée à la question précédente, et donner une relation entre A, P et D

Exercice 3 *La matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

Exercice 4 *Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A \in M_3(\mathbb{R})$ définie par*

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Pour quelle valeurs de m A_m est-inversible ?.*
2. *Calculer la matrice inverse de la matrice A_1.*
3. *La matrice*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

est -elle diagonalisable ?.

Exercice 5 *On désigne par I_d l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$.*

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. a) *Calculer* $(A+I)^2$.

b) *En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.*

2. *On note* $F = \{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) : \ AX = -X\}$.

a) *Résoudre l'équation $AX = -X$ d'inconnue $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.*

b) *En déduire que F est un sous-espace vectoriel de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de F.*

3. *On note* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

a) *Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse*

b) *Montrerque $P^{-1}AP = T$ où T est lamatrice triangulaire supérieure* $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) *Démontrer :* $\forall n \in \mathbb{N}, \ P^{-1}A^nP = T^n$.

4. a) *Exhiber une matrice $N \in M_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = -I + N$.*

b) *Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

c) *Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.*

Le résultat devra faire apparaître T^n comme combinaison linéaire de I et de N

Exercice 6 *Soit u une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, telle que sa représentation matricielle (dans la base canonique) soit donnée par la matrice suivante :*

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculer le polynome caractéristique de B, en déduire les valeurs propres de B.

2) *Montrer que u est trigonalisable dans $\mathbb{R}$.*

3) *Déterminer les sous espaces propres de u. En déduire que u n'est pas diagonalisable.*

Dans la suite on cherche à calculer Bn pour $n \in \mathbb{N}$.

4-a.) *Soit $P(x) = (x-1)^2 x + 1$. Montrer que $P(B) = 0$.*

4-b.) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on effectue la division Euclidienne de x^n par $P(x)$. Le reste étant un polynome de degré 2, il existe des coefficients réels a_n, b_n, c_n et un polynome $Q(x)$ tels que*

$$x^n = P(x)\,Q(x) + a_n x^2 + b_n x + c_n, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Montrer le système d'équations

$$\begin{cases} (-1)^n = a_n - b_n + c_n \\ 1 = a_n + b_n + c_n \\ n = 2a_n + b_n \end{cases}$$

4-c.) *En déduire a_n, b_n et c_n en fonction de n.*

4-d.) *En déduire une expression de B^n en fonction de n*

Exercice 7 *Soit $a \in \mathbb{R}$, notons A la matrice suivante*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$$

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *par la donnée de* u_0 *et* u_1 *et la relation de récurrence suivante, pour* $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n$$

1. *Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?*

2. *Lorsque A est diagonalisable, calculer* A^n *pour* $n \in \mathbb{N}$.

3. *On suppose A diagonalisable. On note* U_n *le vecteur* $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, *exprimer* U_{n+1} *en fonction de* U_n *et de A, puis* U_n *en fonction de* U_0 *et de A.*

Exercice 8 *On considère les matrices*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) *La matrice A est-elle diagonalisable ?*
2) *La matrice B est-elle*
i) diagonalisable dans $\mathbb{R}$?
ii) trigonalisable dans $\mathbb{R}$?
iii) diagonalisable dans $\mathbb{C}$?
(Justifier les réponses)

Exercice 9 *Soit*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A.
b) La matrice A est-elle diagonalisable ?
c) Est-elle inversible ? Si oui, calculer A^{-1}.

Exercice 10 . *Soit A la matrice réelle :=*

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Quel est le rang de A ?
b) Quelle est la dimension de $\ker A$?
c) Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est un vecteur propre de A. Quelle est la valeur propre associée ?*
d) Montrer que A est diagonalisable et donner une base de vecteurs propres de A.
e) Quel est le polynôme caractéristique de A ? Quel est son polynôme minimal ?

Exercice 11 *Soit* $t \in \mathbb{R}$. *On pose*

$$R(t) = \begin{pmatrix} cost & -sint \\ sint & cost \end{pmatrix}$$

a) Déterminer le polynôme caractéristique de $R(t)$.
b) Calculer l'inverse de $R(t)$.
c) Montrer que $R(t)$ *est diagonalisable sur* $\mathbb{C}$ *et déterminer une matrice P inversible indépendante de t et une matrice diagonale D telle que :*

$$R(t) = PDP^{-1}$$

Exercice 12 *Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *La matrice A est-elle diagonalisable ?*
2. *Calculer $(A - 2I_3)^2$, puis $((A - 2I_3)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n.*

Exercice 13 *Pour quelle(s) valeur(s) de α la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A est-elle diagonalisable ?

Exercice 14 *Soient l'application*

$$f : \underset{P \longmapsto f(P) = 3xP - (x^2-1)\acute{P}}{\mathbb{R}^3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3[X]}$$

et $\{B = 1, x, x^2, x^3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3[X]$.

1. *Calculer $M_f(B)$:*
2. *f est-elle diagonalisable ? si oui, effectuer la diagonalisation.*

Exercice 15 *. Soit la matrice*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$$

Montrer que B est diagonalisable dans $\mathbb{C}$