Université Batna 2 **3^{em} Licence Maths**
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2020/2021

Td1 Corrigée

Solution 1 *On a*

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \frac{1}{2}(x+h)^T A(x+h) - (x+h)^T b \\ &= \frac{1}{2}x^T Ax + \frac{1}{2}h^T Ah + \frac{1}{2}x^T Ah + \frac{1}{2}h^T Ax - (x+h)^T \\ &= f(x) + (Ax-b)^T h + \frac{1}{2}h^T Ah. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\left|h^T Ah\right|}{\|h\|_2} \leq \frac{\left\|h^2\right\| \|A\|_2}{\|h\|_2} = \|A\|_2 \|h\|_2 \,, \\ \text{donc } \lim \frac{\left|h^T Ah\right|}{\|h\|_2} &= 0 \end{aligned}$$

ce qui montre que $h^T Ah = o\,(h)$

Solution 2 *On résout :*

$$\nabla J(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3y^2 + 2x = 0 \\ 4y^3 - 6xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}y^2 \\ y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

2. *Soit* $t \in \mathbb{R}$. *On a* $J\,(td_1, td_2) = t^4 d_2^4 - 3t^3 d_1 d_2^2 + t^2 d_1^2$.
Supposons $d_1 \neq 0$. *Puisque*

$$\psi'\,(t) = 4t^3 d_2^4 - 9t^2 d_1 d_2^2 + 2d_1^2 t \text{ et } \psi''\,(t) = 12t^2 d_2^4 - 18td_1 d_2^2 + 2d_1^2,$$

on a $\psi'\,(0) = 0$ *et* $\psi''\,(0) = 2d_1^2 > 0$, *donc 0 est un minimum local de* ψ. *Si* $d_1 = 0$ *et* $d_2 \neq 0$, *alors* $J(0, td_2) = t^4 d_2^4$ *et* 0 *est un minimum local de* ψ. *Enfin, le cas* $d = 0$ *est trivial. La conclusion attendue s'ensuit.*

3. *Soit* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $x = y^2$. *Alors,* $J\,(x,y) = -y^4$ *et il est alors clair que* $J\,(x,y) < J\,(0,0)$ *si* $x = y^2$ *et* y *est suffisamment proche de* 0. *Par conséquent,* 0 *est un max local de la restriction de* J *à cette parabole.*

4. *On a* $HessJ\,(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -6y \\ -6y & 12y^2 - 6x \end{pmatrix}$ *et* $HessJ\,(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Puisqu'une valeur propre de la hessienne en $(0,0)$ *est nulle, on ne peut rien conclure de ce calcul. En revanche, les deux questions précédentes prouvent que* $(0,0)$ *est un point selle de* J.

Solution 3 *La fonction* f *est dérivable dans* $\mathbb{R}^2$ *car composition de fonctions dérivables. Les* *dérivées partielles*

$$\nabla f\left(x,y\right)=\left(\partial_x f\left(x,y\right),\partial_y f\left(x,y\right)\right)=\left(e^{xy}+xye^{xy},x^2e^{xy}\right)$$

sont elles-mêmes dérivables dans $\mathbb{R}^2$ *car composition de fonctions dérivables. La fonction* f *est de classe* C_1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *et donc elle est différentiable dans* $\mathbb{R}^2$*. En particulier elle est différentiable au point* $(1,0)$*. Dès que la fonction est différentiable, elle admet une linéarisation au voisinage de* $(1,0)$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(1,0)+(x-1)\partial_x f(1,0)+y\partial_y f(1,0)+o\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right), \\ f(x,y) &= 1+(x-1)+y+o\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)=x+y+o\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right) \end{aligned}$$

Cette linéarisation est valide localement, au voisinage du point $(1,0)$*, et pas dans tout* $\mathbb{R}^2$ *! Pour approcher la valeur* $f\left(1.1,-0.1\right)$ *on calcule:*

$$f(1.1,-0.1)\approx 1.1-0.1\approx 1$$

Solution 4

$$d\left(xy^2e^{xy}\right)=\frac{\partial\left(xy^2e^{xy}\right)}{\partial x}dx+\frac{\partial\left(xy^2e^{xy}\right)}{\partial y}dy$$

ou en passant par la régle de Leibniz

$$d\left(xy^2e^{xy}\right)=\left(y^2+xy^3\right)e^{xy}dx+\left(2xy+x^2y^2\right)e^{xy}dy$$

Si on pose $h\left(u,v\right)=\left(v,uv^2\right)=(x,y)$ *c. à d.* $x=v$ *et* $y=uv^2$*, on a* $G=f\circ h$ *et donc*

$$\begin{aligned} \frac{\partial G\left(u,v\right)}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(u,v\right)\frac{\partial x}{u}\left(u,v\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(u,v\right)\frac{\partial y}{u}\left(u,v\right) \\ &= 2vuv^2.0+\left(v^2-2uv^2\right)v^2 \\ &= \left(1-2u\right)v^4 \\ \frac{\partial G\left(u,v\right)}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(u,v\right)\frac{\partial x}{v}\left(u,v\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(u,v\right)\frac{\partial y}{v}\left(u,v\right) \\ &= 2vuv^2.1+\left(v^2-2uv^2\right).2uv \\ &= 4uv^2\left(v-u\right) \end{aligned}$$

Si on pose $\gamma\left(t\right)=\left(t^2,3t\right)=(x,y)$*, c.à d.* $\left\{\begin{array}{l} x=t^2 \\ y=3t \end{array}\right.$ *, on a* $H=f\circ\gamma$ *et donc*

$$\begin{aligned} \frac{dH\left(t\right)}{dt} &= \frac{d\left(f\circ\gamma\right)}{dt}\left(t\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(t^2,3t\right)\dot{x}\left(t\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(t^2,3t\right)\dot{y}\left(t\right) \\ &= 2t^23t.2t+\left(t^4-6t\right).3 \\ &= 24t^4-18t \end{aligned}$$

On veut calculer les dérivées de $g\circ f$*, donc on applique la régle de la chaıne:*

1-

$$\begin{aligned}\frac{\partial g\left(xy^2\right)}{\partial x} &= g'\left(xy^2\right)\frac{\partial\left(xy^2\right)}{\partial x}\\ &= \sqrt{xy^2}y^2\\ \frac{\partial g\left(xy^2\right)}{\partial y} &= g'\left(xy^2\right)\frac{\partial\left(xy^2\right)}{\partial y}\\ &= \sqrt{xy^2}\left(x^2-2xy\right)\end{aligned}$$

2- Soit $(x,y)=h(u,v)=(x(u,v),y(u,v))$

$$J_{h(u,v)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ v^2 & 2uv\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial k}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(h(u,v))\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial x}(h(u,v))\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\\ &= y(u,v)^2.0+2x(u,v)\,y(u,v)\,v^2\\ \frac{\partial k}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(h(u,v))\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial x}(h(u,v))\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\\ &= y(u,v)^2.1+2x(u,v)\,y(u,v)\,2uv\end{aligned}$$

3- En alternative, on peut passer par les matrices Jacobiennes.
Puisque

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y^2 & 2xy\end{pmatrix}$$

Solution 5 *on a*

$$\begin{aligned}J_{k(u,v)} &= J_{f(h(u,v))}.J_{h(u,v)}\\ &= \begin{pmatrix}y(u,v)^2 & 2x(u,v)\,y(u,v)\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0 & 1\\ v^2 & 2uv\end{pmatrix}.\\ &= \begin{pmatrix}y^2.0+2xy.v^2 & y^2.1+2xy.2uv\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2v^2x(u,v)\,y(u,v) & y(u,v)^2+4uvx(u,v)\,y(u,v)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

3- On veut calculer la dérivée de la fonction $f\circ\gamma$, donc on applique la régle de la Chaîne:

$$\begin{aligned}\frac{d(f\circ\gamma)}{dt}(t) &= \frac{df(x(t),y(t))}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\,\dot{x}(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\,\dot{y}(t)\\ &= y(t)^2\,\dot{x}(t)+2x(t)\,y(t)\,\dot{y}(t)\end{aligned}$$

Solution 6 *Déterminons les points critiques de f, en tout point $x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$ on a :*

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x,y)=x_2(1-x_1x_2-2x_1^2)e^{-x_1^2-x_1x_2-x_2^2}\\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x,y)=x_1(1-x_1x_2-2x_2^2)e^{-x_1^2-x_1x_2-x_2^2}\end{cases}$$

Le système d'équations $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x,y)=0$ *et* $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x,y)=0$ *admet les solutions :* $\hat{x}_{(1)}={}^t(0,0)$, $\hat{x}_{(2)}={}^t(1,-1)$, $\hat{x}_{(3)}={}^t(-1,1)$, $\hat{x}_{(4)}={}^t\left(\sqrt{\frac{1}{3}},\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$, $\hat{x}_{(5)}={}^t\left(-\sqrt{\frac{1}{3}},-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$. *D'autre part, on a :*

$$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1 x_2}=\begin{pmatrix} A(x_1,x_2) & B(x_1,x_2)\\ C(x_1,x_2) & D(x_1,x_2)\end{pmatrix}$$

$A(x_1,x_2)=x_2\left(4x_1^3+4x_2x_1^2+x_1x_2^2-6x_1-2x_2\right)$
$B(x_1,x_2)=x_1\left(4x_2^3+4x_1x_2^2+x_1^2x_2-2x_1-6x_2\right)$
$C(x_1,x_2)=(1-2x_1^2-3x_1x_2-2x_1^2+2x_1^3x_2+5x_1^2x_2^2+2x_1x_2^3)$.
Déterminons la nature de $\hat{x}_{(1)}$. *On a :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(\hat{x}_{(1)}\right)=0 \text{ et } \det\left(H^2 f(\hat{x}_{(1)})\right)=-1$$

On en déduit que $\hat{x}_{(1)}={}^t(0,0)$ *n'est ni un minimum ni un maximum.*
Déterminons la nature de ${}^t(1,-1)$. *On a*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(\hat{x}_{(2)}\right)=3e^{-1}>0 \text{ et } \det\left(H^2 f\left(\hat{x}_{(2)}\right)\right)=\begin{vmatrix} 3e^{-1} & e^{-1}\\ e^{-1} & 3e^{-1}\end{vmatrix}=8e^{-2}$$

On en déduit que $\hat{x}_{(2)}={}^t(1,-1)$ *est un minimum local.*
Déterminons la nature de $\hat{x}_{(4)}$. *On a*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(\hat{x}_{(4)}\right)=-\frac{5e^{-1}}{3}<0 \text{ et } \det\left(H^2 f\left(\hat{x}_{(4)}\right)\right)=\begin{vmatrix} -\frac{5e^{-1}}{3} & -\frac{e^{-1}}{3}\\ -\frac{e^{-1}}{3} & -\frac{5e^{-1}}{3}\end{vmatrix}=\frac{8}{3}e^{-2}$$

On en déduit que $\hat{x}_{(4)}={}^t\left(\sqrt{\frac{1}{3}},\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ *est un maximum local*

Solution 7 *L'ensemble S est un convexe si*

$$\forall X_1,X_2\in S,\forall\lambda\in\,]0,1[\;\; \lambda X_1+(1-\lambda)X_2\in S.$$

Soit X_1,X_2 *deux vecteurs de* S_1, *alors*
$X_1\in S_1\Rightarrow X_1=(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$ *tel que* $y_1-x_1^2\geq 0$
$X_2\in S_1\Rightarrow X_2=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ *tel que* $y_2-x_2^2\geq 0$,
on obtien

$$\lambda X_1+(1-\lambda)X_2=\lambda(x_1,y_1)+(1-\lambda)(x_2,y_2)=(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)\in\mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned}
[\lambda y_1+(1-\lambda)y_2]-[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]^2 &= [\lambda y_1+(1-\lambda)y_2]-\left[\lambda^2x_1^2+(1-\lambda)^2x_2^2+2\lambda(1-\lambda)x_1x_2\right]\\
&\geq \left[\lambda x_1^2+(1-\lambda)x_2^2\right]-\left[\lambda^2x_1^2+(1-\lambda)^2x_2^2+2\lambda(1-\lambda)x_1x_2\right]\\
&\geq \lambda(1-\lambda)x_1^2+\lambda(1-\lambda)x_2^2-2\lambda(1-\lambda)x_1x_2\\
&= \lambda(1-\lambda)\left(x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\right)\\
&= \lambda(1-\lambda)(x_1-x_2)^2\geq 0\ \forall(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

L'ensemble S *est un convexe si* $\forall \left(X_1, X_2\right) \in S, \forall \lambda \in \left]0,1\right[$ *et* $\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \in S$.

Soit X_1, X_2 *deux vecteurs de* S_2*, alors*

$X_1 \in S_2 \Rightarrow X_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $x_1 \geq 0, y_1 \geq 0$ $y_1 + x_1 \leq 1$

$X_2 \in S_2 \Rightarrow X_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $x_2 \geq 0, y_2 \geq 0$ $y_2 + x_2 \leq 1$

on obtien:

$$\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 = (\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) \in \mathbb{R}^2$$

avec $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \geq 0$ *car* $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ $\lambda \in \left]0,1\right[$, *et* $(1-\lambda) \in \left]0,1\right[$

de plus

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 + \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 &= \lambda (x_1 + y_1) + (1-\lambda)(x_2 + y_2) \leq 1 \\ &\Rightarrow \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \in S_2 \end{aligned}$$

et donc S_2 *est un convexe*