Série de TD N^0 2

S_1 2021/2022

Université Batna 2 **Algèbre 3**

Département de Mathématiques

2^{em} SAD

Exercise 1 *On considère les matrices* $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) *La matrice A est-elle diagonalisable* ?

2) *La matrice B est-elle:*

i) diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

ii) trigonalisable dans $\mathbb{R}$?

iii) diagonalisable dans $\mathbb{C}$?

(Justifier les réponses).

Exercise 2 *Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *La matrice A est-elle diagonalisable ?*
2. *Calculer* $(A - 2I_3)^2$, *puis* $(A - 2I_3)^n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.*En déduire* A^n.

Exercise 3 *Pour quelle(s) valeur(s) de α la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable

Exercise 4 *Soient l'application*

$$f: \underset{P \longmapsto f(P)=3xP-(x^2-1)P'}{\mathbb{R}^3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3[X]}$$

et $\mathrm{B} = \left\{1, x, x^2, x^3\right\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3[X]$.

1. *Calculer* $M_f(\mathrm{B})$*:*
2. f *est-elle diagonalisable ? si oui, effectuer la diagonalisation.*

Exercise 5 *Soit* M *la matrice réelle* 3×3 *suivante :*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer les valeurs propres de* M.
2. *Montrer que* M *est diagonalisable.*
3. *Déterminer une base de vecteurs propres et* P *la matrice de passage.*
4. *On a* $D = P^{-1}MP$, *pour* $k \in \mathbb{R}$ *exprimer* M^k *en fonction de* D^k, *puis calculer* M^k.

Exercise 6 *La matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

Exercise 7 *Soit* u *une application linéaire de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^3$, *telle que sa représentation matricielle (dans la base canonique) soit donnée par la matrice suivante:*

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculer le polynome caractéristique de B, en déduire les valeurs propres de B.

2) Montrer que u est trigonalisable dans $\mathbb{R}$.

3) Déterminer les sous espaces propres de u. En déduire que u n'est pas diagonalisable.

Dans la suite on cherche à calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$.

4-a.) *Soit $P(x) = (x-1)^2(x+1)$. Montrer que $P(B) = 0$.*

4-b.) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on effectue la division Euclidienne de x^n par $P(x)$. Le reste étant un polynome de degré 2, il existe des coefficients réels an, bn, cn et un polynome $Q(x)$ tels que*

$$x^n = P(x)Q(x) + a_n x^2 + b_n x + c_n, \forall x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Montrer le système d'équations

$$\begin{aligned} (-1)^n &= a_n - b_n + c_n & (2) \\ 1 &= a_n + b_n + c_n & (3) \\ n &= 2a_n + b_n & (4) \end{aligned}$$

4-c.) En déduire a_n, b_n et c_n en fonction de n.

4-d.) En déduire une expression de B^n en fonction de n.

Exercise 8 *Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice de $f \in L(\mathbb{R}^3)$ par rapport à la base canonique B de $\mathbb{R}^3$, montrer que A est trigonalisable et déterminer $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ telle que*

$$Mat_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercise 9 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles définies sous forme récurrente par*

$$u_0 = 1, v_0 = 1, w_0 = -1$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par le système suivant :

$$(S): \begin{cases} u_{n+1} = 2un + 3vn - 3wn \\ v_{n+1} = -u_n + w_n \\ w_n = - - un + vn \end{cases}$$

Écrire le système (S) sous la forme matricielle

$$X_{n+l} = AX_n$$

avec $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ *pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

2− *Calculer les valeurs propres de A. En déduire que A est diagonalisable.*

Proposer une base C de vecteurs propres de A.

3− *Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathbb{C}$. Calculer P et P^{-l}, puis expliciter la matrice B définie par $B = P^{-1}AP$.*

4− *Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

5− *En déduire les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n.*

Correction du TD 2

Corrigée (**Exercice 1**)

Le polynome caractéristique vaut $P_A(x) = (x-1)^2$ dont 1 seule valeur propre de A. Le sous-espace propre associé est

$$\begin{aligned} E_1 \quad : &= Ker(A-I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; (A-I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\} = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(cas réel), donc $dim(E_1) = 1$ Or la multiplicité de la valeur propre 1 est $\alpha(1) = 2$, donc par Th du cours A n'est pas diagonalisable. Dans le cas de $\mathbb{C}$ le raisonnement est le même.

$2-i$) Le calcul donnne $P_B(x) = x^2 + 1 = (x-i)(x+i)$. Les valeurs propres, $\pm i$, ne sont pas dans $\mathbb{R}$ donc la matrice B n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

$2-ii$) La matrice ne peut pas non plus etre trigonalisable dans $\mathbb{R}$ pour la meme raison. On rappelle aussi le *Théorème* du cours: la matrice est trigonalisable dans $\mathbb{R}$ ssi $P_B(x)$ est scindé dans $\mathbb{R}$ (ce qui n'est pas le cas ici).

$2-iii$) On a deux valeurs propres distinctes $\pm i$ en dimension 2, d'après un résultat du cours cela implique que la matrice est diagonalisable.

Corrigée (**Exercice 2**) Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable?

Calculons son polynôme caractéristique

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (2-\lambda)^3 :$$

la matrice A admet une unique valeur propre 2, si elle était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice $2I_3$, elle serait donc égale à $2I_3$ ce qui n'est pas le cas, elle n'est donc pas diagonalisable.

2. Calculons $(A - 2I_3)^2$, puis $(A - 2I_3)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a

$$(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi,

$$(A - 2I_3)^0 = I, (A - 2I_3)^1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et, pour tout $n > 2$, on a $(A - 2I_3)^n = 0$. On en déduit A^n

Notons $B = A - 2I_3$, on a $A = A - 2I_3 + 2I_3 = B + 2I_3$ avec $B^n = 0$ pour $n > 2$. Par ailleurs, les matrices B et $2I_3$ commutent, ainsi

$$A^n = (B + 2I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k (2I_3)^{n-k} \text{ où } C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Or, pour $k > 2$, on a $B^k = 0$ d'où pour $n > 2$

$$\begin{aligned} A^n &= C_n^0 B^0 (2I_3)^n + C_n^1 B^1 (2I_3)^{n-1} \\ &= 2^n I_3 + 2^{n-1} n B \\ &= 2^n I_3 + 2^{n-1} n (A - 2I_3) \\ &= 2^n (I_3 - nI_3) + 2^{n-1} n A \end{aligned}$$

Corrigée (**Exercice 3**) La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a une seule valeur propre $\lambda = 1$. Donc La matrice est diagonalisable si est seulement si elle semblable a une matrice identité $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c'est a dire que

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \alpha = 0 \end{aligned}$$

Corrigée (**Exercice 4**) Il y a trois étapes :

Le calcul de $M_f(B)$. On voit que

$$\begin{cases} f(1) = 3x = 0 + 3x + 0x^2 + 0x^3 \\ f(x) = 1 + 2x^2 = 1 + 0x + 2x^2 + 0x^3 \\ f(x^2) = 2x + x^3 = 0 + 2x + 0x^2 + 1x^3 \\ f(x^3) = 3x^2 = 0 + 0x + 3x^2 + 0x^3 \end{cases}$$

Ce qui donne

$$M_f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons le polynôme caractéristique de $M_f(B)$. En effet, on a

$$P_{M_f(B)}(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -x & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -x & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = x^4 - 10x^2 + 9 :$$

Les valeurs propres de A sont $\{-1, 1, -3, 3\}$: D'après (Si f admet n valeurs propres distinctes deux à deux, alors f est diagonalisable), $M_f(B)$ est diagonalisable.

►Diagonalisation de $M_f(B)$: Tout d'abord, calculons les vecteurs propres de $M_f(B)$, on trouve

$$M_f(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Corrigée **(Exercice 5) Déterminons les valeurs propres de** M.

Ce sont les racines du polynôme caractéristique

$$\begin{aligned} P_M(\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= -1 \begin{vmatrix} 3 & -2-\lambda \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-8) \\ &= (1-\lambda)(\lambda+4)(\lambda-2) \end{aligned}$$

La matrice M admet donc trois valeurs propres distinctes qui sont : $1, 2$, et -4.

2. Montrons que M est diagonalisable. Nous venons de voir que M, matrice réelle 3×3, admet trois valeurs propres réelles distinctes, cela prouve que M est diagonalisable.

3. Déterminons une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.

Les trois sous-espaces propres distincts sont de dimension 1, il suffit de déterminer un vecteur propre pour chacune des valeurs propres.

$\lambda = 1$: Le vecteur v de coordonnées (x, y, z) est un vecteur propre pour la valeur propre 1 si et seulement si

$$\begin{cases} 2y - z = x \\ 3x - 2y = y \\ -2x + 2y + z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = z \end{cases}$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur e_1 de coordonnées $(1, 1, 1)$.

$\lambda = 2$: Le vecteur v de coordonnées (x, y, z) est un vecteur propre pour la valeur propre 2 si et seulement si

$$\begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ 3x - 4y = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 2$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur e_2 de coordonnées $(4, 3, -2)$.

$\lambda = -4$: Le vecteur v de coordonnées (x, y, z) est un vecteur propre pour la valeur propre -4 si et seulement si

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ -2x + 2y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = -4$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur e_3 de coordonnées $(2, -3, 2)$.

Les vecteurs e_1, e_2 et $e_3$forment une base de E composée de vecteurs propres, la matrice de passage P est égale à

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} -$$

4- Exprimons M^k en fonction de D^k, puis calculons M^k.

On a

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

pour $k \in \mathbb{N}$, on a

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^k \end{pmatrix}$$

et

$$M^k = PD^kP^{-1}$$

Calculons donc la matrice P^{-1} : on a $P^{-1} = \dfrac{1}{\det P}(comP)^t$. Or

$$\begin{aligned}\det P &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -6 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -30\end{aligned}$$

et

$$comP = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 5 \\ -12 & 0 & 6 \\ -18 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$P^{-1} = \frac{-1}{30} \begin{pmatrix} 0 & -12 & -18 \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Corrigée (**Exercice 6**) La matrice A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux $1, 6, 10, 13, 15$. Cela fait 5 valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable

Corrigée (**Exercice 7**)

$$
\begin{aligned}
P_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 6 \\ 2 & 1-\lambda & 4 \\ 2 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} \underset{=}{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 6 \\ 2 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 1-\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 6 \\ 2 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{=}{C_2 \leftarrow C_2 - C_3} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 & 6 \\ 2 & -3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(-1+\lambda)^2 (1+\lambda)
\end{aligned}
$$

et les valeurs propres sont donc 1 (racine double) et -1 (racine simple).

2) $P_B(\lambda)$ est scindé dans $\mathbb{R}$, donc B est trigonalisable dans R.

3) Calculons $E_1 = Ker(B-I)$.On a

$$
\begin{aligned}
(B-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3z=0, \\ x+2z=0, \\ -x-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3z=0, \\ x+2z=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x=-2z \text{ et } y+z=0
\end{aligned}
$$

Ainsi on trouve que $E_1 = Vect\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et donc $\dim(E_1) = 1$.

Comme $\dim(E_1) < 2 = \alpha_1$, la matrice ne peut être diagonalisable.

Il reste à calculer $E_{-1} = Ker(B+I)$

$$(B+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+3z=0, \\ x+y+2z=0, \\ -x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0, \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=-z$$

Donc $E_{-1} = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\dim(E_{-1}) = 1$.

4-a.) Th de Caylay-Hamilton: $P_B(B) = 0$ donc ici donne le résultat désiré.

4-b.) Notons que $P(1) = 0$, ainsi que $P(-1) = 0$. On obtient ainsi les relations (2) et (3) en remplacant par $x = -1$ et $x = 1$ dans la relation (1) de l'énoncé. Ensuite, dérivons (1) par rapport à x: on obtient

$$nx^{n-1} = P'(x)Q(x) + P(x)Q'(x) + 2a_n x + b_n$$

En injectant $x = 1$, et comme $x = 1$ est racine double de P on a $P(1) = P'(1) = 0$ et donc on obtient la relation (3) désirée.

4-c.) Par différence des deux premières relations on obtient

$$b_n = \frac{(1-(-1)^n)}{2}$$

La troisième relation donne alors

$$a_n = \frac{(n-b_n)}{2} = \frac{n}{2} + \frac{(-1)^n}{4} - \frac{1}{4}$$

Enfin

$$c_n = 1 - a_n - b_n = 1 - \frac{n}{2} - \frac{b_n}{2} = ...$$

4-d.) On a alors, en utilisant (1) et le fait que $P(B) = 0$:$B^n = a_n B^2 + b_n B + c_n I = ...$

Corrigée (**Exercice 8**) On a $P_A(\lambda) = -(\lambda - 1)^3$.Le polynôme caractéristique est scindé, alors A est trigonalisable. On a

$$T = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \end{array}$$

avec $T = M_{B'}(f)$, alors d'après la matrice ci dessus on a $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = v_1 + v_2$ et $f(v_3) = v_2 + v_3$

.Posons $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors $f(v_1) = Av_1 = v_1$ est équivalente à

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x - 3y + 3z \end{pmatrix} = v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

nous donne $y = x$, $z = y$ et $x - 3y + 3z = z$, donc on peut prendre $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

De même en résolvant l'équation $f(v_2) = Av_2 = v_1 + v_2$ avec $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ on trouve $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et en résolvant l'équation $Av_3 = v_2 + v_3$, on trouve $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Corrigée (**Exercice 9**)

1− Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le système (S) s'écrit comme suit:

$$: \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

2− Calculons les valeurs propres de A. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. En ajoutant la troisième colonne à la deuxième colonne, puis en factorisant par $1-\lambda$ dans la deuxième colonne, on obtient :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & -3 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -3 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Il suffit alors de développer par rapport à la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

D'où $\det(A-\lambda I_3) = -(\lambda+l)(\lambda-l)(\lambda-2)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ .Ainsi $Spect A = \{-1, 1, 2\}$ Pour chaque valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à 1. La matrice A est ainsi diagonalisable. Une base C de vecteurs propres de A est

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3− $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = diag\,(-1, 1, 2)$

4− Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = P \times diag((-l)^n, 1, 2^n) \times P^{-1}$$

D'où

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n + (-1)^{n+1} & (-1)^n - 2^n \\ 1 - 2^n & 2 - 2^n & 2^n - 1 \\ 1 - 2^n & (-1)^{n+1} - 2^n + 2 & (-1)^n + 2^n - 1 \end{pmatrix}$$

De $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il vient $X_n = A_n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On obtient finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 2 \times (-1)^{n+1} + 3 \times 2^n,\ v_n = 4 - 3 \times 2^n,\ w_n = 4 - 3 \times 2^n + 2 \times (-1)^{n+1}.$$