Université Mostefa Ben Boulaïd -Batna 2 **3$^{\text{em}}$ Licence Maths**
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2020/2021

Td1 Rappels et notations de calcul différentiel

Exercice 1 *On considère la fonction quadratique définie sur* $\mathbb{R}^n$ *par:*

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b,$$

où A *est carrée et symétrique montrez que* $\nabla f(x) = Ax - b$.

Exercice 2 *On considère la fonction quadratique définie sur* $\mathbb{R}^n$ *par*

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b,$$

où A *est carrée et symétrique montrez que* $\nabla^2 f(x) = A$.

Exercice 3 *On définit la fonction* $J : \mathbb{R}^2 \to R$ *par* $J(x, y) = y^4 - 3xy^2 + x^2$.

1. *Déterminer les points critiques de* J.

2. *Soit* $d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$. *En utilisant l'application* $t \to J(td_1, td_2)$, $t \in \mathbb{R}$ *montrer que* $(0, 0)$ *est un minimum local le long de toute droite passant par* $(0, 0)$.

3. *Le point* $(0, 0)$ *est-il un minimum local de la restriction de* J *à la parabole d'équation* $x = y^2$?

4. *Calculer la matrice hessienne de* J. *Quelle est la nature du point critique* $(0, 0)$

Exercice 4 (régle de Leibniz) *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x, y) = xy^2 e^{xy}.$$

Calculez la différentielle de f

Exercice 5 (Dérivées des fonctions composées) *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction dont on connait* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - 2y$. *Pour* $F(x,y) = \ln f(x,y)$, *calculer* $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ *et* $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)$

Exercice 6 (Cas usuels de fonctions composées) *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction dont on connait* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - 2y$.

Pour $G(u,v) = f\left(v, uv^2\right)$, *calculer* $\dfrac{\partial G}{\partial u}(u,v)$ *et* $\dfrac{\partial G}{\partial v}(u,v)$

Exercice 7 *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction dont on connait*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - 2y.$$

Pour $H(t) = f\left(t^2, 3t\right)$, *calculer* $\dfrac{\partial H(t)}{\partial t}$.

Exercice 8 *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la fonction* $f(x,y)) = xy^2$.

1) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que* $g'(z) = \sqrt{z}$.

Calculer $\dfrac{\partial g\left(xy^2\right)}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial g\left(xy^2\right)}{\partial y}$.

Soit $(x,y) = h(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ *un changement de variables dont on connait la matrice Jacobienne* $J_{h(u,v)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v^2 & 2uv \end{pmatrix}$, *et soit* $k = f \circ h$.

Calculer $\dfrac{\partial k}{\partial u}(u,v)$, $\dfrac{\partial k}{\partial v}(u,v)$

Soit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ *une trajectoire dans* $\mathbb{R}^2$ *dépendante du paramètre* t. *Calculer la dérivée en* t *de la fonctiont* $t \longmapsto f(x(t), y(t))$

Exercice 9 *Soit* $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \exp\left(-x_1^2 - x_1 x_2 - x_2^2\right)$.

Déterminez les points critiques de f, *en tout point* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Exercice 10 *Montrer d'après la definition que la fonction :* $f(x, y) = x^2 + y^2$ *est différentiable dans* $\mathbb{R}^2$*. Calculer la différentielle*

Exercice 11 *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par :* $f(x, y) = xe^{xy}$.

Est-elle différentiable au point $(1, 0)$ *? Si oui, linéariser* f *au voisinage de* $(1, 0)$ *et approcher la valeur* $f(1.1, -0.1)$.

Exercice 12 *On considère l'application de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui à* (x, y) *associe* $x^3 + y^3 + 3xy$.

1. *Calculer le gradient de* f *et sa matrice hessienne.*
2. *Utiliser le gradient de* f *pour calculer la dérivée de l'application* $x \to f(x, e^x)$.
3. *Donner l'équation du plan tangent à la surface d'équation* $z = f(x, y)$ *au point* $(1, 1, 5)$.
4. *Déterminer les points critiques de* f.
5. *Utiliser la matrice hessienne de* f *pour déterminer la nature de ces points critiques.*
6. *En considérant l'application* $x \to f(x, x)$*, montrer que* f *n'a pas de maximum global, ni de minimum global sur* $\mathbb{R}^2$.

Exercice 13 *Soit la fonction* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *définie par*

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 (y-1)^2 + z^2.$$

f *est-elle convexe ?*

Exercice 14 *Demontrez que les ensembles ci-dessous sont convexes*

$$S_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y^2 \geq 0\right\}, \; S_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\right\}$$