Université de Batna 2 **2^{eme} année SAD**
Faculté des Mathématiques et Informatique **Année 2021-2022**
Département de mathématiques

TD (**Statistiques inférentiélles 1**)
Estimations ponctuelles et intervalles de confiance

Exércice 1 *On considère que* 50% *de français sont des femmes et que* 50% *sont des hommes.*

1). *On prélève au hasard* 40 *français. On note* X *le nombre de femmes. Quelle est la loi de la variable aléatoire* X *?*

2). (*a*) *Déterminer la probabilité pour qu'on ait moins de* 40% *de femmes dans l'échantillon.*

(*b*) *Déterminer la probabilité pour qu'on ait moins de* 45% *de femmes dans l'échantillon.*

3) *Mêmes questions avec un échantillon de* 400 *personnes ?*

4) *Déterminer la taille de l'échantillon pour qu'on ait entre* 45% *et* 55%*de femmes dans l'échantillon avec une probabilité de* $0,95$.

5) *Déterminer maintenant la taille de l'échantillon pour qu'on ait entre* 48% *et* 52% *de femmes dans l'échantillon avec une probabilité de* $0,95$.

Exércice 2 *On considere l'échantillon statistique* $(1, 0, 2, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$. ´

1. *Calculer sa moyenne et sa variance empiriques.*
2. *En supposant que les donnees de cet échantillon sont des réalisations d'une variable de loi inconnue, donner une estimation non biaisee de l'espérance et de la variance de cette loi.* ´
3. *On choisit de modeliser les valeurs de cet échantillon par une loi binomiale* $\mathcal{B}(2, p)$. *Utiliser la moyenne empirique pour proposer une estimation ponctuelle pour* p.
4. *Avec le meme modele, utiliser la variance empirique pour proposer une autre estimation de* p. ‘
5. *On choisit de modeliser les valeurs de cet échantillon par une loi de Poisson* $\mathcal{P}(\lambda)$, *qui a pour esperance* λ, *Quelle estimation ponctuelle proposez-vous pour* λ?

Exércice 3 *On veut estimer la loi de probabilite de la durée de vie des moteurs de voitures. On teste* 125 *moteurs et on relève le nombre de kilometres parcourus avant révision totale. En désignant par* X *le nombre de kilométres parcourus, on a trouvé dans cet échantillon (en milliers de Km):*

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{125} X_i}{125} = 70, \quad \sum_{i=1}^{125} (X_i - \bar{x})^2 = 28125$$

1. *En faisant l'hypothese que la loi de probabilité de* X *est normale, en estimer les paramètres.* 2. *La loi de probabilité de* X *etant supposée celle déterminée d'après le calcul précédent, on veut juger si l'adoption d'une huile spéciale est susceptible d'accroitre la vie moyenne des moteurs. Pour cela, on preléve dans la fabrication un nouvel échantillon de* 9 *moteurs. Sur cet échantillon on note les durées d'utilisation obtenues avec le nouveau lubrifiant.*

Exércice 4 *Lors d'un concours radiophonique, on note X le nombre de reponses reçues chaque jour, on suppose que X suit une loi normale de parametres m et σ. Durant les dix premiers jours, on a obtenu:*

$x_1 = 200$	$x_2 = 240$	$x_3 = 190$	$x_4 = 150$	$x_5 = 220$
$x_6 = 180$	$x_7 = 170$	$x_8 = 230$	$x_9 = 210$	$x_{10} = 210$

Donner une estimation ponctuelle de m et σ^2

Exércice 5 *Soit une usine de 350 personnes. Pour effectuer une certaine operation, un chronométrage du temps a été effectué parmi certains émployes de cette usine. On obtient la distribution suivante:*

Temps en minutes	*Nombre d'employés*
$12 \leq X \leq 24$	4
$24 \leq X \leq 36$	10
$36 \leq X \leq 48$	20
$48 \leq X \leq 60$	12
$60 \leq X \leq 72$	4

On demande:

1.Par quoi peut-on estimer la moyenne du temps necessaire dans cette usine pour effectuer cette opération. On se placera dans deux cas:

a. Les employes control és sont tirés au sort sans remise. ´

b. Le cas ou le tirage est avec remise.

2. Par quoi peut-on estimer la dispersion de la moyenne du temps nescessaire dans l'usine pour effectuer cette opération. On se placer dans deux cas.

a. Le tirage est sans remise

b. Le tirage est avec remise.

3. Que concluez-vous ?

Exércice 6 *On veut estimer la moyenne m d'une variable aleatoire X suivant une loi normale, de varaince connue $\sigma^2 = 6,25$ a l'aide d'un echantillon de taille $n = 100$. La moyenne $\bar{x}$ de l'echantillon observée est $4,3$.* ´

1. Construire un intervalle de confiance avec un seuil $1 - \alpha = 0,95$.

2. Comment construire un tel intervalle, si l'on ne connait pas la variance de X, mais seulement la variance empirique de l'echantillon ´ *S^2 egale a $6,76$.*

Exércice 7 *Un echantillon aléeatoire de 36 étudiants, choisi sans remise d'une classe de 72 étudiants, a un poids moyen de $60kg$. On sait que l'écart-type de tous les étudiants de la calsse est de $2kg$.* ´

Trouver un intervalle de confiance pour le poids moyen de la classe au seuil de confiance de 90%

Exércice 8 *Dans une ville, un sondage a et éréalisé auprés d'un échantillon indépendant de 400 personnes pour savoir si ces personnes étaient satisfaites ou non dans leur travail. 70% des personnes se sont declarées satisfaites.* ´

1. *Definir la variable* X
2. *Quelle loi de probabilite suit la variablé* X *?*
3. *Donner au niveau de confiance de* 95% *le nombre de personnes satisfaites de leur travail que l'on peut rencontrer sur un echantillon de* 100 *individus.* ´
4. *Donner l'estimation de la proportion des personnes satisfaites dans leur travail dans la population considerée et son intervalle de confiance à* 95%

Exércice 9 *Le taux de glycémie dans une population donnée est distribué suivant une loi normale d'espérance* $1g/l$ *et d'écart-type* $0,3g/l$.

(*a*) *Quelle est la moyenne théorique* μ *du taux de glycémie dans la population ?*

(*b*) *Etant donné un échantillon* $X_1, X_2, ..., X_n$ *correspondant aux mesures du taux de glycémie de* n *individus de la population, la moyenne* μ *peut être estimée par*

$$M_n = \frac{(X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}).$$

Donner l'espérance de M_n *ainsi que son biais.*

(*c*) *Donner la variance et l'écart-type de* M_n.

2) *On considère à présent un échantillon de* $n = 10$ *individus de la population dont on mesure le taux de glycémie. Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau suivant.*

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
gly_i	0.64	0.34	1.30	0.84	1.10	1.07	1.01	0.69	0.72	0.88

(*a*) *Calculer la moyenne* μ *de l'échantillon.*

(*b*) *À partir de cette valeur* μ *et de la valeur de l'écart-type théorique, donner un intervalle de confiance à* 99% *pour la moyenne théorique* μ.

Exércice 10 *Le poids à la naissance, obtenu à partir des accouchements sur une longue période de temps dans un certain hôpital, montre une moyenne* $\mu = 3175g$ *et un écart type* $\sigma = 584g$.

Calculer la probabilité que le poids moyen m *à la naissance d'un échantillon de* 35 *nourrissons se situe entre* 3033 *et* $3317g$.

Exércice 11 *Un échantillon d'entreprises d'un secteur a donné la série statistique suivante*

$chiffred'affaires\ (M€)$	$[0;2[$	$[2;3[$	$[3;4[$	$[4;5[$	$[5;7[$
$effectifs$	6	12	17	10	5

a. Donner une estimation ponctuelle du CA *moyen et de l'écart type du* CA *de l'ensemble des entreprises de ce secteur.*

b. Donner une estimation de leur CA *moyen par intervalle de confiance, au niveau de confiance de* 95%.

c. Donner une estimation ponctuelle de la proportion d'entreprises dont le CA *dépasse* $4,5M€$.

d. Donner une estimation de cette proportion par intervalle de confiance au seuil de risque de 1%.

Exércice 12 *On a pesé le raisin sur* 10 *souches prises au hasard dans une vigne et on a obtenu les résultats suivants en kilogrammes :* 2.4, 3.2, 3.6, 4.1, 4.3, 4.7, 5.3, 5.4, 6.5, 6.9..

1. *Calculer la masse moyenne et l'écart type de cet échantillon*
2. *Estimer la variance de la population dont ont été extraites ces souches.*
3. *Donner un intervalle de confiance de la moyenne de la population au risque de* $0,05$.
4. *Calculer le nombre minimum de souches qu'il aurait fallu étudier pour que cet intervalle ait une amplitude de* $1kg$ *en supposant que la variance estimée est bien celle de la population*

Exércice 13 *Une société de vente à distance de matériel informatique s'intéresse au nombre journalier de connexions sur son site internet. Sur une période de* 10 *jours, les nombres suivants ont été relevés :* 759 750 755 756 761 765 770 752 760 767

On suppose que ces résultats sont indépendants et identiquement distribués selon une loi normale d'espérance μ *et de variance* σ^2.

(i) *Donner une estimation ponctuelle de l'espérance* μ *et de la variance* σ^2 *du nombre journalier de connexions*

(ii) *Construire un intervalle de confiance pour* μ *avec les niveaux de confiance* 0.90 *et* 0.99

(iii) *Quel niveau de confiance choisir pour avoir un intervalle de confiance deux fois plus étroit que celui obtenu avec une confiance de* 0.9?

(iv) *Sur combien de jours aurait-on dû relever le nombre de connexions pour que la longueur de l'intervalle de confiance, de niveau de* 95%, *n'excède pas* 1 *(en supposant que les estimations des moyennes et variances ne changent pas).*