Analyse 01

Université de Batna 02
Faculté des mathématiques et d'informatique
Département d'informatique
1^{re}Année Ingénieur

Chapitre01

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

Année Universitaire 2022/2023

Chapitre 1

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

1.1 Ensembles usuels de nombres

Notations :

- On note par $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

- On note par $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs, c'est à dire l'ensemble des entiers naturels et leurs opposés : $\mathbb{Z} = \{.... - 2, -1, 0, 1, 2, 3....\}$

- On note par $\mathbb{Q}$, l'ensemble des rationnels, c'est l'ensemble des quotients $\frac{p}{q}$, où p et q sont deux entiers relatifs, avec q non nul : $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}/p \in \mathbb{Z} \,\text{et}\, q \in \mathbb{Z}^*\}$

- On note par $\mathbb{R}$, l'ensemble des réels, il contient les nombres rationnels et les nombres irrationnels tels que $\sqrt{2}$, π....

- Ces ensembles privés de 0 sont respectivement notés par $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*$

Remarque :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

1.2 Définition axiomatiques des nombres réels

On note par $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels dans lequel sont définies deux lois de composition internes suivantes :

- $(x, y) \to x + y$
- $(x, y) \to x.y$

et une relation d'ordre notée $(x \leq y)$ où $(y \leq x)$ satisfaisant les quinze axiomes suivants :

1.2.1 Les axiomes de l'arithmétique

A1. Quels que soient $x, y \in \mathbb{R}$; $x + y = y + x$ (commutativité de l'addition)
A2. Quels que soient x, y et $z \in \mathbb{R}$; $(x + y) + z = x + (y + z)$ (associativité de l'addition)
A3. Il existe un élément $0 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$; $x + 0 = x$
A4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un élément $-x \in \mathbb{R}$ tel que $x + (-x) = 0$.
A5. Quels que soient $x, y \in \mathbb{R}$; $x.y = y.x$ (commutativité de la multiplication)
A6. Quels que soient x, y et $z \in \mathbb{R}$; $(x.y).z = x.(y.z)$ (associativité de la multiplication)
A7. Il existe un élément $1 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$; $x.1 = x$
A8. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, il existe $x^{-1} \in \mathbb{R}^*$ tel que : $x.x^{-1} = 1$
A9. Quels que soient x, y et $z \in \mathbb{R}$; $x.(y + z) = x.y + x.z$ (distributivité)

Remarques :

1. Les axiomes (A1) et (A2) permettent de calculer la somme de trois nombres x, y et z clairement sous la forme $x + y + z$ et le symbole $\sum$ désigne la somme de n termes avec la façon suivantes :
$$x_1 + x_2 + x_3 + ...x_n = \sum_{k=0}^{k=n} x_k$$
2. De l'axiome (A3) l'élément neutre 0 pour l'addition dans $\mathbb{R}$ est unique.
3. De l'axiome (A4) l'inverse additif d'un nombre $x \in \mathbb{R}$ est unique noté par $-x$.
4. Les axiomes (A5) et (A6) permettent aussi de calculer le produit de trois nombres x, y et z clairement sous la forme $x.y.z$ et le symbole $\prod$ désigne le produit de n termes avec la façon suivante :
$$x_1.x_2.x_3.....x_n = \prod_{k=1}^{k=n} x_k$$
5. De l'axiome (A7) l'élément neutre 1 pour la multiplication dans $\mathbb{R}$ est unique.
6. De l'axiome (A8) l'inverse multiplicatif d'un nombre $x \in \mathbb{R}^*$ est unique noté par $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$.

1.2.2 Les axiomes de l'ordre

A10. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$ on a : $x \leq x$ (Réflexivité)
A11. Quels que soient $x, y \in \mathbb{R}$ on a : si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$ (Antisymétrie)
A12. Quels que soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ on a : si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$ (Transitivité)
A13. Quels que soient $x, y \in \mathbb{R}$ on a : $x \leq y$ ou $y \leq x$
A14. Quels que soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ on a : si $x \leq y$ alors $(x+z \leq y+z)$ et $(x.z \leq y.z$ si $0 \leq z)$

Remarques :

1. Les axiomes (A10), (A11), (A12) et (A13) éxpriment que $\leq$ est une relation d'ordre totale (voir cours d'algèbre)
2. A partir de la relation (inférieur ou égal $\leq$) définie précédemment, on peut définir sa relation symétrique (supérieur ou égal $\geq$) avec la manière suivante :
$$\text{Pour tous réels } x, y \in \mathbb{R}\,;\ \ x \geq y \ \text{ si et seulement si } \ y \leq x.$$

La relation $\geq$ est aussi une relation d'ordre totale sur $\mathbb{R}$.

3. On définit la relation (strictement inférieur $<$) par :

$$\text{Pour tous } x, y \in \mathbb{R},\ x < y \text{ si est seulement si } (x \leq y) \text{ et } (x \neq y).$$

et la relation (strictement supérieur $>$) par :

$$\text{Pour tous } x, y \in \mathbb{R},\ x > y \text{ si est seulement si : } (x \geq y) \text{ et } (x \neq y).$$

Avant d'énoncer l'axiome de la borne supérieure (A15) nous avons besoin des définitions suivantes

Définition 1.1 : (Majorants et minorants d'un ensemble)

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$).

- On dit que E est **borné supérieurement** ou **majoré** s'il existe un nombre $M \in \mathbb{R}$ tel que : pour tout $x \in E$, $x \leq M$ Dans ce cas le nombre réel M est appelé un **majorant** de E.
- On dit que E est **borné inférieurement** ou **minoré** s'il existe un nombre $m \in \mathbb{R}$ tel que : pour tout $x \in E$, $m \leq x$ Dans ce cas le nombre réel m est appelé un **minorant** de E.
- On dit que E est **borné** s'il est à la fois majoré et minoré dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire s'ils existent deux nombres réels m et M tels que : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m \leq x \leq M$.

Exemples :

1. $E =]4, 5[$
   3 et 4 sont deux minorants de E puisque : quel que soit $x \in E$, $4 \leq x$ et $3 \leq x$.
   5 et 6 sont deux majorants de E puisque : quel que soit $x \in E$, $x \leq 5$ et $x \leq 6$.
2. $E = \{-2, -1, 0, 1, 4, 6\}$
   -2 est un minorant de E puisque : quel que soit $x \in E$, $-2 \leq x$.
   6 est un majorant de E puisque : quel que soit $x \in E$, $x \leq 6$.

Remarques :

1. Le majorant et le minorant d'un ensemble E ne sont pas uniques. En effet, dans $\mathbb{R}$ l'ensemble E=]4,5[admet un nombre infini de minorants et majorants.
2. Le majorant et le minorant d'un ensemble E peuvent appartenir ou non à E.
   En effet, l'ensemble $E = \{-2, -1, 0, 1, 4, 6\}$, -2 et -4 sont deux minorants de E, -2 appartenant à E et -4 n'appartenant pas à E.

Définition 1.2 : (Minimum et maximum d'un ensemble)

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$).

- Le minorant de E qui appartient à E est appelé **le plus petit élément** ou (**minimum** de E. On le note par $\min(E)$. C'est-à- dire :

$$m = \min(E) \text{ équivalent } \begin{cases} m \text{ est un minorant de } E. \\ \quad \textit{et} \\ m \text{ appartenant à } E \end{cases}$$

- Le majorant de E qui appartient à E est appelé **le plus grand élément** ou **maximum** de E. On le note par $\max(E)$. C'est-à- dire :

$$M = \max(E) \text{ équivalent } \begin{cases} M \text{ est un majorant de } E. \\ \quad \textit{et} \\ M \text{ appartenant à } E \end{cases}$$

Exemples :

1. $E = [5, 20]$
   $\min(E) = 5$ puisque 5 est un minorant de E et 5 appartient à E.
   $\max(E) = 20$ puisque 20 est un majorant de E et 20 appartient à E.
2. $E =]0, 6[$
   $\min(E)$ n'existe pas puisque il n'existe pas un minorant de E qui appartient à E.
   $\max(E)$ n'existe pas puisque il n'existe pas un majorant de E qui appartient à E.

Remarques :

1. Si $\min(E)$ existe il est unique.
2. Si $\max(E)$ existe il est unique.

Définition 1.3 : (Bornes supérieure et inférieure)

- Le plus grand minorant de E est appelé la borne inférieure de E. On le note par $\inf(E)$. C'est- à- dire :

$$m = \inf(E) \text{ équivalent } \begin{cases} m \text{ est un minorant de } E. \\ \quad \textit{et} \\ m \text{ est le plus grand minorant de } E \end{cases}$$

- Le plus petit majorant de E est appelé la borne supérieure de E. On le note par $\sup(E)$. C'est-à-dire :

$$M = \sup(E) \text{ équivalent } \begin{cases} M \text{ est un majorant de } E. \\ \quad \textit{et} \\ M \text{ est le plus petit majorant de } E \end{cases}$$

Finalement, nous pouvons énoncer l'axiome de la borne supérieure comme suit :

1.2.3 Axiome de la borne supérieure

A15. Tout sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure. C'est-à-dire :

Quel que soit $E \subset \mathbb{R}$ et $(E \neq \phi)$; E est majoré implique $\sup(E)$ existe dans $\mathbb{R}$.

Conséquence :

Tout sous-ensemble non vide et minoré de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure. C'est-à-dire :

Quel que soit $E \subset \mathbb{R}$ et $(E \neq \phi)$; E est minoré implique $\inf(E)$ existe dans $\mathbb{R}$.

1.3 Quelques propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$

Les propriétés suivantes sont des conséquences des axiomes précédents

1.3.1 Inégalités

Soient $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ on a :

1. Si $x \leq y$ alors $x - z \leq y - z$
2. Si $x \leq y$ alors $\begin{cases} \text{x.z} \leq y.z & si\, \text{z} \geq 0 \\ \text{x.z} \geq y.z & si\, \text{z} \leq 0 \end{cases}$
3. Si $x \leq y$ alors $\begin{cases} \text{x}^2 \leq y^2 & si\, 0 \leq x \leq y \\ \text{y}^2 \leq x^2 & si\, \text{x} \leq y \leq 0 \end{cases}$
4. Si $0 < x \leq y$ alors $0 < \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x}$
5. Si $x \leq y < 0$ alors $\dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x} < 0$
6. Si $x \leq y$ avec $x < 0$ et $y > 0$ alors $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{y}$
7. Si $0 \leq x \leq 1$ alors $0 \leq x^n \leq x^{n-1} \leq \ldots\ldots. \leq x^2 \leq x \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
8. Si $1 \leq x$ alors $1 \leq x \leq x^2 \leq \ldots\ldots \leq\leq x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
9. Si $x \leq y$ et $z \leq t$ alors $x + y \leq y + t$
10. Si $x \leq y$ et $z \leq t$ avec $x \geq 0$ et $z \geq 0$ alors $x.z \leq y.t$

Définition1.4 : (Valeur absolue)

La valeur absolue d'un réel x, notée par $|x|$, est définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si}\, x \geq 0 \\ -x & \text{si}\, x < 0 \end{cases}$$

1.3.2 Propriétés de la valeur absolue

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ on a :

1. $|x| \geq 0$ (La valeur absolue est toujours positive)
2. $|-x| = |x|$
3. $|x| \geq x$ et $|x| \geq -x$
4. $|x| = max(-x, x)$
5. $|x| = 0$ équivalent $x = 0$
6. Soit $\alpha \geq 0$ alors : $|x| \leq \alpha$ équivalent $-\alpha \leq x \leq \alpha$
7. $|x.y| = |x|.|y|$
8. $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$ si $y \neq 0$
9. $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ (L'inégalité triangulaire)
10. $||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$

Définition 1.5 : (Partie entière d'un nombre réel)

Soit x un nombre réel. Le plus grand entier inférieur ou égal à x s'appelle la partie entière de x. Nous le noterons $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$

Exemples :

$\lfloor 11,12 \rfloor = 11$, $\lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1$, $\lfloor -4,33 \rfloor = -5$, $\lfloor -7 \rfloor = -7$.

1.3.3 Propriétés de la partie entière d'un nombre réel

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x + 1 \rfloor$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ avec $n \in \mathbb{N}$
3. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a : $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$

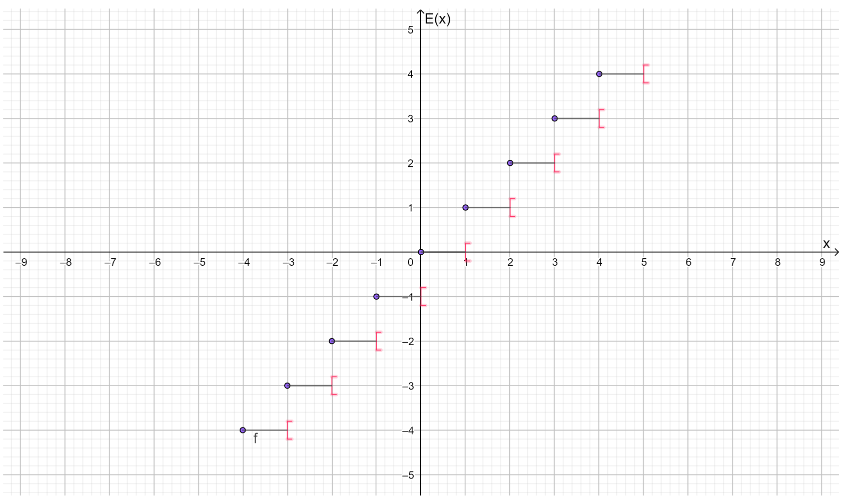

FIGURE 1.1 – La fonction partie entière

Remarque :

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a :

$$\lfloor x+y \rfloor = \begin{cases} \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor \\ \quad \text{ou} \\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \end{cases}$$

1.3.4 Caractérisation de la borne supérieure et inférieure

Théorème : Soit $E \subset \mathbb{R}$ tq $E \neq \phi$ on a :

1. $M = \sup(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E,\ x \leq M \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x^* \in E,\ M - \varepsilon < x^* \end{cases}$
2. $m = \inf(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E,\ m \leq x \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x^* \in E,\ x^* < m + \varepsilon \end{cases}$

Remarques :

- Si E admet un maximum alors $\sup(E) = \max(E)$
- Si E admet un minimum alors $\inf(E) = \min(E)$
- Si $\inf(E) \in E$ alors $\inf(E) = \min(E)$
- Si $\sup(E) \in E$ alors $\sup(E) = \max(E)$

1.3.5 Propriété d'Archimède

$\mathbb{R}$ vérifie la propriété d'Archimède suivante :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ (avec } b > 0) \text{ alors il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que : } bn > a$$

1.3.6 Densité de $\mathbb{Q}$ dans R

Entre chaque deux nombres réels distincts a, b il existe un nombre rationnel q, c-à-d :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}\, (\text{avec}\, a < b), \exists q \in \mathbb{Q} \quad \text{tq} : a < q < b$$

Dans ce cas on dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

1.4 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 1.6 :(Intervalle)

Soit I une partie de $\mathbb{R}$
I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall x, y \in I, \forall c \in \mathbb{R}; x < c < y \implies c \in I$$

Remarques :

1. L'intersection de deux intervalles de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
2. La réunion de deux intervalles de $\mathbb{R}$ **non disjoints** est un intervalle de $\mathbb{R}$
3. La réunion de deux intervalles de $\mathbb{R}$ **disjoints** n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$

Les intervalles dans $\mathbb{R}$ se répartissent en 9 types décrits dans le tableau ci-dessous.
Soient a, b deux nombres réels tels que $a < b$

Description	Définition	Notation
fermé et borné (segment	$\{x \in \mathbb{R}/a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$
borné et semi-ouvert à droite	$\{x \in \mathbb{R}/a \leq x < b\}$	$[a, b[$
borné et semi-ouvert à gauche	$\{x \in \mathbb{R}/a < x \leq b\}$	$]a, b]$
ouvert borné	$\{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}$	$]a, b[$
fermé non majoré	$\{x \in \mathbb{R}/a \leq x\}$	$[a, +\infty[$
ouvert non majoré	$\{x \in \mathbb{R}/a < x\}$	$]a, +\infty[$
fermé non minoré	$\{x \in \mathbb{R}/x \leq b\}$	$]-\infty, b]$
ouvert non minoré	$\{x \in \mathbb{R}/x < b\}$	$]-\infty, b[$
droite réelle	$\mathbb{R}$	$]-\infty, +\infty[$

1.4.1 Carctérisation des parties bornées dans $\mathbb{R}$

Lemme :
Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$, les propositions suivantes sont équivalentes

1. E est bornée dans $\mathbb{R}$.
2. Il existe un intervalle I borné de $\mathbb{R}$ tel que : $E \subset I$
3. $\exists M \geq 0$ tel que, $\forall x \in E, |x| \leq M$

Définition 1.7 : (Voisinage d'un point)

Soit x_0 un nombre réel. On dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de x_0 si et seulement s'il existe un $\varepsilon \geq 0$ tel que : $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset V$

Exemples :

1. $[1, 3]$ est un voisinage de 2, mais $[1, 3]$ n'est pas un voisinage de 3
2. $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, A n'est pas un voisinage de chacun de ses points.

Remarque :

1. On dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $]a, +\infty[\subset V$
2. On dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $-\infty$ si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $]-\infty, a[\subset V$

Conséquence :

Tout intervalle I non vide de $\mathbb{R}$ contient une infinité de nombres rationnels.

Définition 1.8 : (Point adhérent et point d'accumulation)

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. On dit que x_0 est un point adhérent à A si tout intervalle ouvert de centre x_0 contient au moins un élément de A c-à-d :

$$\forall \varepsilon > 0;\ ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap A \neq \phi$$

2. On dit que x_0 est un point d'accumulation de A, si tout intervalle ouvert de centre x_0 contient au moins un élément de A autre que x_0 c-à-d :

$$\forall \varepsilon > 0;\ ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\setminus \{x_0\} \cap A \neq \phi$$

Notation :

L'ensemble des points adhérents à A est noté $\overline{A}$ et est appelé adhérence de A.

Exemple :

Soit $A =]1, 2] \cup \{3\}$ on a :

- 1 est un point adhérent à A et un point d'accumulation de A, mais $1 \notin A$
- 2 est un point adhérent à A et un point d'accumulation de A, mais $2 \in A$
- 3 est un point adhérent à A mais n'est pas un point d'accumulation puisque :

$$\text{Si on choisit } \varepsilon = \frac{1}{2} \text{ alors : }]3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon[\setminus \{3\} \cap A = \phi$$

Remarques :

1. Un point d'accumulation de A est un point adhérent de A mais la réciproque est fausse.
2. Un point adhérent à l'ensemble A qui n'est pas un point d'accumulation est appelé un point isolé
3. Si A est un ensemble borné dans $\mathbb{R}$ alors : $M = \sup(A)$ et $m = \inf(A)$ sont deux points d'adhérence de A.
4. L'adhérence d'un intervalle d'extrémités a et b est l'intervalle fermé $[a, b]$.