Université de Batna 2
Département de Mathématiques
L2 SAD S4 Variables aléas multiples
2021/2022

Contrôle final **durée 01H30**

Exercice 1 (8 pts)

Soit $X = (X_1, X_2)^T \sim N(\mu_X, \Sigma_X)$ où $\mu_X = (0{,}0)^T$ et $\Sigma_X = \begin{pmatrix} 3 & \rho\sqrt{3} \\ \rho\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, avec $|\rho| < 1$.

1- 2 pts : Dans quel cas on a $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$? D'après la matrice Σ_X on a $cov(X_1, X_2) = \rho\sqrt{3} = 0$ seulement si $\rho = 0$ et donc on n'a. $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ seulement si $\rho = 0$ et sinon on aura pas indépendance.

2- Posons $\begin{cases} Y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} X_1 - X_2 \\ Y_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} X_1 + X_2 \end{cases}$, calculer $cov(Y_1, Y_2)$, $var(Y_1)$ et $var(Y_2)$.

On sait que 3 pts : $cov(Y_1, Y_2) = E(Y_1 . Y_2) - E(Y_1). E(Y_2) = E(Y_1 . Y_2)$, car $\mu_X = (0{,}0)^T$ avec :

$E(Y_1 . Y_2) = E\left(\frac{1}{3} X_1^2 - X_2^2\right) = \frac{1}{3} E(X_1^2) - E(X_2^2) = \frac{1}{3} var(X_1) - var(X_2) = 0$ et ceci est dû au fait que $\mu_X = (0{,}0)^T$ avec $var(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = E(X_i^2),\ i = 1{,}2$.

1 pt : $var(Y_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -1\right)^T . \Sigma_X . \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -1 \end{pmatrix} = 2 - 2\rho > 0$ et

1 pt : $var(Y_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)^T . \Sigma_X . \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix} = 2 + 2\rho > 0$.

3- 1 pt : Est-ce que $Y_1 \perp\!\!\!\perp Y_2$? $cov(Y_1, Y_2) = 0 \Longrightarrow Y_1 \perp\!\!\!\perp Y_2$.

Exercice 2 (8pts)

On suppose que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes ayant pour lois de probabilités respectives :

$X=x_i$	1	2
p_i	0,7	0,3

$Y=y_j$	-2	5	8
p_j	0,3	0,5	0,2

1- 4 pts : Déterminer la loi de probabilité conjointe de X et Y .
L'indépendance de X et Y nous donnera les $p_{ij}, i = 1{,}2\ et\ j = 1{,}2{,}3$, avec $p_{ij} = p_i . p_j$ d'où

$X = x_i \backslash Y = y_j$	-2	5	8	Σ
1	0,21	0,35	0,14	0,7
2	0,09	0,15	0,06	0,3
Σ	0,3	0,5	0,2	1

2- 1 pt : Quelle est la probabilité que X et Y soient pairs ?
P(X=2k,Y=2k')=P(X=2,Y=-2)+P(X=2,Y=8)=0,09+0,06=0,15

3- 1 pt : Quelle est la probabilité que X vaille 1 sachant que Y est positif ?

$$P\left(X = \frac{1}{Y} \geq 0\right) = \frac{P(X=1, Y \geq 0)}{P(Y \geq 0)} = \frac{P(X=1, Y=5) + P(X=1, Y=8)}{P(Y=5) + P(Y=8)} = \frac{0{,}35 + 0{,}14}{0{,}5 + 0{,}2} = 0{,}7.$$

4- 2 pts : Calculer Cov(X; Y).

$cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$, avec
$E(X.Y) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} p_{ij} x_i\, y_j$, $\left(E(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i.p_i\right), \left(E(Y) = \sum_{i=1}^{2} y_j.p_j\right) et\ donc\ cov(X,Y) = -0{,}78 + 3{,}25 + 2{,}08 - (1{,}3).(3{,}5) = 4{,}55$ $-4{,}55$=0.

Exercice 3 (4pts)

Soit un réel α et soit (X; Y) un couple de v.a. continu dont la loi jointe a pour densité

$$f(x,y) = \begin{cases} \alpha e^{-x} e^{-2y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & sinon \end{cases}$$

1. 3 pts : Déterminer la constante α.

   Puisque la fonction f est une densité de probabilité alors $\alpha \geq 0$ et $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1$ et donc

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1 = \alpha \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x}e^{-2y}\, dxdy$$
$$= \alpha \int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} e^{-x}dx\right] e^{-2y}dy = \alpha \int_0^{+\infty} [-e^{-x}|_0^{\infty+}]e^{-2y}dy$$
$$= \alpha \int_0^{+\infty} e^{-2y}dy = \alpha.-\frac{1}{2}e^{-2y}|_0^{+\infty} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 2$$

Alors

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x} e^{-2y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & sinon \end{cases}.$$

2. 1 pt : Déterminer la loi marginale de X. On précisera la densité de cette loi marginale si elle existe.

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy = 2e^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-2y}dy = 2e^{-x}.-\frac{1}{2}e^{-2y}|_0^{+\infty} = e^{-x}, \qquad x > 0$$

   et bien sûr $f(x) = 0$ sinon.

Bonne continuation