Equations Différentielles Ordinaires EDO

Master 1 de Mathématiques Appliquées S1

Par BOUSSAID Samira

Année : 2021/2022

AVANT-PROPOS

L'intitulé de cette matière est *Equations Différentielles Ordinaires* (EDO), dispensée aux étudiants de Master 1 Mathématiques Appliquées durant le semestre 1, elle fait partie de l'unité d'enseignement méthodologie, de coefficient 3, avec 5 crédits. L'objectif de cette matière est de présenter les notions fondamentales et les théorèmes permettant de faire une étude qualitative des EDO et ceci pour pouvoir étudier la théorie des systèmes dynamiques non linéaires. L'étudiant doit avoir comme pré-requis les matières d'analyse, algèbre linéaire.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Les équations différentielles ordinaires (EDO), sont très importantes dans l'application de certains phénomènes réels, car un grand nombre de lois et de relations physiques sont modélisées en mathématiques par des équations différentielles. L'usage de ces équations vise à décrire le comportement des systèmes évoluant dans le temps.
Une équations différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle est le degré maximal de différentiation d'une de ces fonctions. Ici l'inconnue sera une fonction.
Bien qu'il existe plusieurs méthodes de résolution des équations différentielles, un grand nombre d'entre elles ne peut être résolu explicitement jusqu'à présent, c'est pour ça qu'on s'oriente vers l'étude qualitative des équations différentielles ; à savoir l'étude de l'existence et stabilité des solutions des EDO.

CHAPITRE 1

EQUATIONS DU PREMIER ORDRE

1.1 Résultats fondamentaux

Définition 1 (EDO d'ordre 1). *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide et Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, et $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application continue. On appelle EDO d'ordre 1 la relation*

$$y' = \frac{dy}{dt} = f(t, y) \dots (E)$$

où l'inconnue $y : J \to \mathbb{R}^n$, $J \subseteq I$ est une application telle que

i- y est dérivable sur J et $\forall t \in J$, $(t, y(t)) \in I \times \Omega$.

ii- $\forall t \in J$, $y'(t) = f(t, y(t))$.

Remarque 1. *Dans ce qui suit on prendra $n = 1$.*

Exemple 1. *1- $y' = \dfrac{t}{y} \cdots (E)$, $I = \mathbb{R}$, $\Omega = \mathbb{R}^*$. Evidemment $f(t, y) = \dfrac{t}{y}$.*

La fonction $y(t) = t$ est une solution de (E) car

- *cette fonction est dérivable (linéaire),*
- *$y' = (t)' = 1 = f(t, y) = \dfrac{t}{y} = \dfrac{t}{t}$.*

2- Prendre $y' = y^2 \cdots (E)$, $I =?$, $\Omega =?$ et voir si $y(t) = \dfrac{1}{1-t}$ définie sur $J =]1, +\infty[$ est solution de (E). Que se passe-t-il si $t = 1$?

Définition 2 (Problème de Cauchy). *Soient $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$. Le problème de Cauchy associé aux données (t_0, y_0) consiste à trouver une solution y de (E) sur un intervalle $J \subseteq I$ contenant t_0 et vérifiant $y(t_0) = y_0$. On l'écrira alors*

$$(P) \begin{cases} y' & = f(t, y) \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases} .$$

Exemple 2. $\begin{cases} y' & = y^2 \\ y(t_0) & = 1 \end{cases}$ *, $t_0 \in \mathbb{R}$. Ici $I = \Omega = \mathbb{R}$.*

Lemme 1. *Une fonction $y : J \to \mathbb{R}$ est une solution du problème de Cauchy (P) ssi*

i- y *est continue sur* J *et* $\forall t \in J, (t, y(t)) \in J \times \Omega \subseteq I \times \Omega$,
ii- $\forall t \in J, y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds.$

Preuve. " $\Rightarrow$ " Si $y : J \to \mathbb{R}$ est solution de (P) alors
i- $y' = f(t, y(t))$, d'où y est dérivable donc continue,
ii- on a

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)) \Rightarrow dy = f(t, y(t))dt \Rightarrow \int_{t_0}^{t} dy = y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds.$$

(Ici y est une fonction et non une variable et donc $dy = d(y(s)) = y'(s)ds$.)
" $\Leftarrow$ " (i) et (ii) donnent l'existence de $y \in C^1(J)$ car y est la primitive de la fonction continue $f(., y(.))$ (par composition). Et en dérivant (ii) on aura $y' = f(t, y(t))$ où $y(t_0) - y_0 = f(t, y(t)) = 0$. Donc la fonction y vérifie le problème (P). $\square$

Définition 3 (Solution maximale)**.** *On appelle solution maximale, une solution* y *de* (E) *tel que l'intervalle* J *soit un intervalle maximal (le plus grand possible).*

Ce qui veut dire que pour $y : J \to \mathbb{R}$ une solution maximale de (E), l'intervalle $\tilde{J} \supsetneq J$ sur lequel y est solution de (E) n'existe pas.

Exemple 3. *Soit* $y' = y^2 \cdots (E)$*, ici* $I = \Omega = \mathbb{R}$, $y(t) = \dfrac{1}{c - t}$ *et* $J =]c, +\infty[$*. La solution* $y(t) = \dfrac{1}{c - t}$ *ne peut pas être définie sur un intervalle plus grand que* $J =]c, +\infty[$*.*

Définition 4 (Solution globale)**.** *La fonction* $y : I \to \mathbb{R}$ *est appelée solution globale de* (E) $(J = I)$*.*

Remarque 2. *Une solution globale est maximale.*

Exemple 4. *Soit* $y' = 2y \cdots (E)$*, ici* $I = \mathbb{R}, \Omega = [0, +\infty[$*, en plus pour* $y(t) = e^{2t}$*, est définie sur* $J = \mathbb{R} = I$*. Donc la solution est globale.*

Théorème 2 (Régularité de la solution)**.** *Soit* $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *et* $k \in \mathbb{N}$*. Si* $f \in C^k(I \times \Omega)$*, alors toute solution de* (E) *est de classe* C^{k+1} *sur* J*.*

Preuve. Par récurrence on a

- Pour $k = 0$, on veut $f \in C(I \times \Omega) \Rightarrow y \in C^1(J)$?
  y est solution de (E) donc elle vérifie (E), c-à-d $y' = f(t, y)$ qui est continue sur J car composition de deux fonctions continues f et y (y' existe donc y est continue).
  Ainsi y' et y sont continues ; d'où $y \in C^1(J)$.
- Supposons $f \in C^k(I \times \Omega) \Rightarrow y \in C^{k+1}(J)$?
  Puisque y est solution de (E), alors y vérifie $y' = f(t, y)$ et donc y' est dérivable.
  Mais par hypothèse on a y de classe C^k, avec y' continue (composition de deux fonctions continues de classe C^k), et donc y' est de classe C^k avec y de classe C^k et donc $y \in C^{k+1}(J)$.

$\square$

1.2 Existence locale et globale, Unicité

On se donne le problème de Cauchy $(P)\begin{cases} y' &= f(t,y)\cdots(E) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$ où $f : I\times\Omega \to \mathbb{R}$, $I\subset\mathbb{R}$ non vide, Ω ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $y : J \subset I \to \mathbb{R}$.

Définition 5 (Fonctions Lipschitziennes). *Soit $C_1 = [t_0-\tau, t_0+\tau]$ et $C_2 = [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$ pour $\tau > 0, r_0 > 0$ et soit $C = C_1 \times C_2$.*
On dit que f est une fonction Lipschitzienne par rapport à y, uniformément par rapport à t, sur C, s'il existe $k > 0$ tel que

$$\forall t \in C_1, \forall y_1, y_2 \in C_2, |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq k.|y_1 - y_2|.$$

Si $C = I\times\Omega$ on dira alors que f est globalement Lipschitzienne.

Rappel (Théorème des accroissement finis). *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c).(b-a)$$

.
Ou encore $\exists\theta \in]0,1[$ telle que

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b-a)).(b-a).$$

Exemple 5. *1- $y' = |y| + |t|, y(t_0) = y(0) = 1$. Ici $f(t,y) = |y| + |t|$, $I = \Omega = \mathbb{R}$. Soit $\tau > 0, r_0 > 0$ et prenons $C = [t_0-\tau, t_0+\tau]\times[y_0-r_0, r_0+r_0] = [-\tau,\tau]\times[1-r_0, 1+r_0]$.*
On veut $\exists k > 0$ tel que $\forall (t,y_1),(t,y_2) \in C |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq k.|y_1-y_2|$?
On a

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = ||t| + |y_1| - (|t| + |y_2|)| = ||y_1| - |y_2||,$$

mais par l'inégalité trigonométrique on sait que $||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|$.
Ainsi tout $k \geq 1$ donnera le résultat $\forall (t,y_1),(t,y_2) \in C|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq k.|y_1-y_2|$.

Lemme 3. *Supposons que la fonction $f : I\times\Omega \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 dans un voisinage de (t_0, y_0). Alors f est en (t_0,y_0) localement Lipschitzienne par rapport y. ($\dfrac{\partial f}{\partial t}$, et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur un voisinage de (t_0,y_0)).*

Preuve. Soit $(t_0,y_0) \in I\times\Omega$. Soit $T_0, r_0 > 0$ où $C_1 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \subset I$ et $C_2 = [y_0 - r_0, y_0 + r_0] \subset \Omega$. D'après le théorème des accroissement finis on a l'existence de $\theta \in]y_1, y_2[$ ou bien $]y_2, y_1[$ telle que

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |\frac{\partial f}{\partial y}|(t,\tau).|y_1 - y_2|(t).$$

Mais $f \in C^1(C_1\times C_2)$, alors $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur un fermé, donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est bornée et alors

$$\exists k = \sup_{(t,\theta)\in C_1\times C_2} |\frac{\partial f}{\partial y}(t,\theta)|.$$

D'où $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq k.|y_1 - y_2|$ et donc f est localement Lipschitzienne sur $C_1 \times C_2$. $\square$

Remarque 3. *Pour vérifier la condition de Lipschitz sur y de f, il suffit de voir si $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est bornée.*

Exemple 6. $y' = 4.\dfrac{t^3 y}{t^4+y^2}, y(t_0) = y_0$ *donnée, avec* $I =]1, +\infty[, \Omega =]0, \infty[$.
$f(t,y) = 4.\dfrac{t^3 y}{t^4+y^2}$, *évidement f est continue car fraction de deux polynôme dont le dénominateur n'est pas nul.*
$\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,y) = \dfrac{12t^2y^3 - 4t^6 y}{(t^4+y^2)^2}$, *qui est continue sur* $I \times \Omega$.
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,y) = \dfrac{4t^7 - 4t^3y^2}{(t^4+y^2)^2}$, *qui est continue sur* $I \times \Omega$.
Donc $f \in C^1(I \times \Omega)$, *alors f est localement lipschitzienne.*

Théorème 4 (Cauchy-Peano-Arzela (Existence locale))**.** *Soit* $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$ *un cylindre de sécurité avec* $T \leq \min(T_0, \dfrac{r_0}{M})$ *pour l'équation* (E). *Alors si f est continue sur C, le problème (P) admettera donc une solution locale* $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$.

Lemme 5 (Lemme de Gronwall/Forme différentielle)**.** *i- Soit* $\eta : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ *une fonction continue vérifiant*

$$\eta'(t) \leq \Phi(t).\eta(t) + \psi(t) \ \ p.p. \ t$$

où $\Phi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}_+$. *Alors*

$$\eta(t) \leq e^{\int_a^t \Phi(s)ds} \left[\eta(a) + \int_a^t \psi(s)ds \right] \forall t \in [a,b].$$

ii- En particulier si

$$\eta' \leq \Phi.\eta \ \ sur \ [a,b] \ \ où \ \eta(a) = 0.$$

Alors $\eta \equiv 0$ *dans* $[a,b]$.

Preuve. L'hypothèse est telle que p.p. $t \in [a,b]$

$$\begin{aligned}\eta'(t) \leq \Phi(t).\eta(t) + \psi(t) &\Rightarrow \eta'(t).e^{-\int_a^s \Phi(\tau)d\tau} \leq \Phi(t).\eta(t).e^{-\int_a^s \Phi(\tau)d\tau} + \psi(t).e^{-\int_a^s \Phi(\tau)d\tau} \\ &\Rightarrow \left[\eta'(t) - \Phi(t).\eta(t)\right].e^{-\int_a^s \Phi(\tau)d\tau} \leq \psi(t).e^{-\int_a^s \Phi(\tau)d\tau}\end{aligned}$$

Mais

$$\left[\eta'(t) - \Phi(t).\eta(t)\right].e^{-\int_a^s \Phi(\tau)d\tau} = \left[\eta(t).e^{-\int_a^s \Phi(\tau)d\tau}\right]'$$

alors

$$\int_a^t \left[\eta(s).e^{-\int_a^t \Phi(\tau)d\tau}\right]' ds = \eta(t).e^{-\int_a^s \Phi(\tau)d\tau} - \eta(a)$$

ainsi puisque la fonction positive $e^{-\int_a^s \Phi(\tau)d\tau}$ est décroissante, on aura

$$\eta(t).e^{-\int_a^s \Phi(\tau)d\tau} - \eta(a) \leq \int_a^t \psi(s)e^{-\int_a^s \Phi(\tau)d\tau}ds \leq \int_a^t \psi(s)ds$$

et on conclut alors que

$$\eta(t) \leq e^{\int_a^t \Phi(s)ds} \left[\eta(a) + \int_a^t \psi(s)ds \right] \forall t \in [a,b].$$

Le deuxième cas est trivial □

Lemme 6 (Lemme de Gronwall/Forme intégrale)**.** *i- Soit $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue vérifiant*

$$\psi(t) \leq C_1 \int_a^t \psi(s)ds + C_2 \ \textit{p.p. } t \textit{ et pour } C_1, C_2 \geq 0$$

Alors

$$\psi(t) \leq C_2 . e^{C_1(t-a)} \ \textit{p.p. } t \in [a,b].$$

ii- En particulier si

$$\psi(t) \leq C_1 \int_a^t \psi(s)ds \ \textit{p.p. } t \textit{ et pour } C_1 \geq 0$$

Alors $\psi \equiv 0$ dans $[a,b]$.

Théorème 7 (Théorème de Cauchy-Lipschitz/Existence et Unicité)**.** *Soit $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$, avec $T, r_0 > 0$, un cylindre de sécurité de l'équation (E), avec $T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$, pour $T_0, M > 0$.*
Alors si f est continue sur C et localement Lipschitzienne pour $(t,y) \in C$, le problème de Cauchy (P) admettra donc une seule solution $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$.

Preuve. Nous allons donner les grandes lignes de la démonstration de ce théorème.
Puisque le problème de Cauchy est équivalent avec sa forme intégrale, nous allons utiliser le schéma de Picard, qui se fait par la construction de la suite de fonctions $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{aligned}
&y_0 \text{ donné} \\
&y_1 = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_0(s))ds \\
&y_2 = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_1(s))ds \\
&\vdots \\
&y_n = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s))ds
\end{aligned}$$

et on va prouver la convergence de cette suite vers la fonction y qui vérifie le problème (P).

i- Existence de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$
On veut prouver que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, et ceci par récurrence.
$n = 1, y_1 = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_0(s))ds$,
et donc y_1 est bien définie tant que $\int_{t_0}^t f(s, y_0(s))ds$ existe, et pour cela on veut que $(t, y_0) \in C$.

Puisque y_0 est la donnée initiale, alors $|y - y_0| \leq r_0$, ce qui est vrai si $s \in [t_0 - T, t_0 + T]$ et donc $(t, y_0) \in C$.
Et comme f est continue on aura $\int_{t_0}^{t} f(s, y_0(s))ds$ bien définie.
Supposons y_n bien définie, i.e. $y_n = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))ds$ existe. Et prouvons que y_{n+1} est bien définie aussi.
On a $y_{n+1} = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))ds$, et on veut que $(s, y_n(s)) \in C$? c-à-d $|s - t_0| \leq T$? et $|y_n - y_0| \leq r_0$?
On a $|y_n - y_0| = | \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))ds|$; l'hypothèse de récurrence. Mais f est une fonction continue sur le compact C, donc bornée et on aura

$$\exists M > 0, \forall (s, y_{n-1}(s)) \in C : |f(s, y_{n-1}(s))| \leq M$$

et donc

$$|y_n - y_0| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y_{n-1}(s))|ds \leq M|t - t_0|,$$

où $|t - t_0| \leq T \leq T_0$, alors $|y_n - y_0| \leq M.T$, et on veut $M.T \leq r_0$, donc $T \leq \dfrac{r_0}{M}$ et comme $T \leq T_0$ on prendra alors $T \leq \min(T_0, \dfrac{r_0}{M})$.Et donc y_{n+1} est définie sur $[t_0 - T, t_0 + T] \subset [t_0 - T_0, t_0 + T_0]$.

ii- Convergence de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Il suffit de prouver que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
Prenons p, q tels que $p < q$ et posons $p = q - n$. Ecrivons

$$y_p - y_q = y_p - y_{p+1} + y_{p+1} - y_{p+2} + y_{p+2} - y_{p-3} + \cdots + y_{n+p} - y_{n+p-1}$$

et on aura

$$|y_p - y_q| \leq \frac{M}{k} \sum_{l=p}^{p+n-1} \frac{(k|t - t_0|)^{l+1}}{(l+1)!} \to 0 \text{ quand } p \to +\infty$$

car c'est le reste d'une série convergente.

iii- Passage à la limite
On a $y_{n+1} = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))ds$, et comme f est une fonction continue sur un compact, et par le théorème de la Convergence Dominée

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{t_0}^{t} f_n(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s)ds$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} y_{n+1} = y_0 + \int_{t_0}^{t} lim_{n\to+\infty} f(s, y_n(s))ds$$

d'où

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds.$$

Pour l'unicité de la solution, supposons l'existence de deux solutions y, z au problème

(P) telles que

$$y = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$
$$z = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, z(s))ds,$$

mais

$$|y - z| = |\int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s, z(s))ds| \leq$$
$$\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y(s)) - f(s, y(s))|ds \leq k \int_{t_0}^{t} |y(s) - z(s)|ds,$$

et d'après le lemme de Gronwall (forme intégrale) on aura $|y(t) - z(t)| = 0$ p.p. t.

□

Exemple 7. *Prenons $y' = \sqrt{y}$, ici f n'est pas Lipschitzienne au voisinage de $y = 0$, car*

$$\lim_{(y_1,y_2)\to(0,0)} |\frac{f(y_1) - f(y_2)}{y_1 - y_2}| = \infty.$$

Par contre f est Lipschitzienne sur tout intervalle $[a, b], a, b > 0$, car

$$|\frac{f(y_1) - f(y_2)}{y_1 - y_2}| = \frac{1}{\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}},$$

et donc il suffit de prendre $k \geq \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

Remarque 4. *Si une fonction est dérivable au voisinage d'un point et la dérivée est bornée dans ce voisinage, alors la fonction est localement Lipschitzienne. La réciproque est fausse, il y a des fonctions Lipschitzienne qui ne sont pas dérivables.*
Prenons à titre d'exemple $y' = |y|$, avec f Lipschitzienne au voisinage de tout point de $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas dérivable en $y = 0$.
Si une fonction est de classe C^1 alors elle est localement Lipschitzienne.

Lemme 8. *Soit f une fonction continue et localement Lipschitzienne sur $I \times \Omega$. Si y_1 est une solution du problème (P) définie sur J_1 et y_2 est une autre solution de (P) définie sur J_2. Alors $y_1 \equiv y_2$ sur $J_1 \cap J_2$.*

Preuve. On remarque que $J_1 \cap J_2 \neq \phi$ car $t_0 \in J_1 \cap J_2$.
Soit $A = \{t \in J_1 \cap J_2 : y_1(t) = y_2(t)\}$.
$A \neq \phi$, puisque $t_0 \in A$.
On a évidemment $A \subset J_1 \cap J_2$. Et prouvons la réciproque ($J_1 \cap J_2 \subset A$).
Remarquons que

$$A = \{t \in J_1 \cap J_2 : y_1(t) = y_2(t)\} = \{t \in J_1 \cap J_2 : (y_1 - y_2)(t) = 0\} = (y_1 - y_2)^{-1} \{0\},$$

où $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ avec la fonction continue $y_1 - y_2$ sur $J_1 \cap J_2$ et donc l'ensemble A est fermé.

En plus A est un ensemble ouvert de $J_1 \cap J_2$, car
pour $t_* \in A \Rightarrow t_* \in J_1 \cap J_2$, où $y_1(t_*) = y_2(t_*) = y_*$.
Alors y_1, y_2 sont deux solutions de $\begin{cases} y' &= f(t,y) \\ y(t_*) &= y_* \end{cases}$.
Soient $T_1, T_2 > 0$ tels que $[t_* - T_1, t_* + T_1] \subset J_1$ et $[t_* - T_2, t_* + T_2] \subset J_2$, et soit T donné par le théorème de Cauchy-Lipschitz pour (t_*, y_*). Posons $T_* = \min(T_1, T_2, T)$, et ainsi y_1 et y_2 sont deux solutions définies sur $[t_* - T_*, t_* + T_*] \subset [t_* - T, t_* + T]$ du même problème de Cauchy.
Et d'après l'unicité de la solution du théorème de Cauchy-Lipschitz on a $y_1 \equiv y_2$ sur
$[t_* - T_*, t_* + T_*]$.
Donc $[t_* - T_*, t_* + T_*] \subset A$, alors pour $\alpha < T_*$ on a $t_* \in [t_* - \alpha, t_* + \alpha] \subset A$, alors A est un ouvert.
Ainsi A est un ensemble non vide ouvert et fermé dans $J_1 \cap J_2$, où $J_1 \cap J_2$ est connexe (car c'est un intervalle).
Donc $A = J_1 \cap J_2 \Rightarrow y_1 \equiv y_2$ sur $J_1 \cap J_2$. □

Corollaire 1. *Si f est une fonction continue et localement Lipschitzienne sur $I \times \Omega$, alors pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$, le problème de Cauchy (P) admet une seule solution maximale.*

Preuve. La solution y du problème (P) est définie sur $[t_0, T, t_0 + T] \subset [t_0, T_0, t_0 + T_0]$, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz.
On va étudier le prolongement de la solution juste d'un côté, et l'autre s'en déduira. Soit le côté droit ; posons $y_1 = y(t_0 + T)$ et considérons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y' &= f(t,y) \\ y(t_0+T) &= y_1 \end{cases}, t \in [t_0 - T_0, t_0 + T_0],$$

i.e. la point initial est $t_1 = t_0 + T$. Et puisque f est continue et localement Lipschitzienne, on aura l'existence d'une seule solution y^1 sur un intervalle centré en t_1, c-à-d
$\exists T_1 : [t_1, T_1, t_1 + T_1] \subset [t_0, T_0, t_1 + T_1]$.
A gauche de $t_1 = t_0 + T$, y et y^1 coïncident car elles sont toutes les deux solutions de l'EDO vérifiant la même valeur au point $t_0 + T$, i.e. $y(t_0 + T) = y^1(t_0 + T)$.
Alors on pose $\tilde{y} = \begin{cases} y(t) & , t \in [t_0 - T, t_0 + T] \\ y^1(t) & , t \in [t_0 - T, t_1 + T_1] \end{cases}$, $\tilde{y}$ est une solution prolongée sur
$[t_0 - T, t_0 + T + T_1]$, avec $t_1 = t_0 + T$.
De nouveau on prend $y_2 = y(t_1 + T_1)$ comme donnée initiale du problème de Cauchy
$\begin{cases} y' &= f(t,y) \\ y(t_1+T_1) &= y_2 \end{cases}$. De même on aura une solution sur un intervalle centré en $t_1 + T_1$ et qui coïncidera avec $\tilde{y}(t)$ à gauche de $t_1 + T_1$ (par unicité) et donc on aura prolongé $\tilde{y}(t)$ à gauche de $t_1 + T_1$ jusqu'à $(t_1 + T_1) + T_2$. □

Remarque 5.
1- *Ce principe de prolongement est opérationnel tant que y est définie à l'extrémité du dernier intervalle obtenu ou si $y(t) \neq \infty$ sur son intervalle d'existence.*
2- *On aura un des deux phénomènes, soit le prolongement continu de façon illimitée et on aura ainsi existence globale, ou on aura l'existence d'un point $\tilde{T}$ où $\lim_{t \to \tilde{T}} |y(t)| = \infty$ et on dira alors qu'on a explosion en temps fini.*

Exemple 8. $\begin{cases} y' &= y^2 \\ y(0) &= y_0 > 0 \end{cases}$, *où la solution est donnée explicitement par* $y(t) = \dfrac{y_0}{1 - ty_0}$.

L'intervalle maximal d'existence est $[0, \frac{1}{y_0}[$, et on ne peut pas considérer l'intervalle $]\frac{1}{y_0}, +\infty[$ car par définition la solution de l'EDO doit préserver sa dérivabilité et donc sa continuité sur son domaine d'existence. Alors elle s'arrête là et son intervalle maximal est $[1, \frac{1}{y_0}[$.

Remarque 6. *Géométriquement les graphes des deux solutions maximale de (E) sont soit confondus ou bien disjoints.*

Théorème 9. *Soit f une fonction continue sur $I \times \Omega$. S'il existe deux fonctions continues $g, h : I \to \mathbb{R}_+$ telles que*

$$\forall (t,y) \in I \times \Omega |f(t,y)| \leq g(t) + h(t).|y|,$$

alors toute solution maximale de (E) est globale.

Exemple 9. $y' = (2t+1)y\sin(y^2+t^2)$. $I = \Omega = \mathbb{R}$.
$|f(t,y)| = |(2t+1)y\sin(y^2+t^2)| \leq |(2t+1)y|$ *car* $|\sin\alpha| \leq 1$.

Corollaire 2. *Soit f une fonction continue sur $I \times \Omega$ et globalement Lipschitzienne. Alors le problème de Cauchy (P) admet une seule solution globale.*

Preuve. f est continue sur $I \times \Omega$ et globalement Lipschitzienne sur $I \times \Omega$, alors les hypothèses du théorème de C-L sont vérifiées, et donc (P) admet une seule solution maximale y. En plus

$$\begin{aligned} f(t,y) = f(t,y) + f(t,y_0) - f(t,y_0) &\Rightarrow |f(t,y)| \leq |f(t,y_0)| + |f(t,y) - f(t,y_0)| \\ &\Rightarrow |f(t,y)| \leq |f(t,y_0)| + k.|y - y_0| \\ &\Rightarrow |f(t,y)| \leq |f(t,y_0)| + k.\left[|y| + |y_0|\right] \end{aligned}$$

D'où $\exists g(t) = |f(t,y_0)| + k.|y_0|$ et $\exists h(t) = k$ tels que

$$|f(t,y)| \leq g(t) + h(t).|y|,$$

et d'après le théorème précédent (E) admet une solution maximale ; qui est globale. □

1.3 Dépendance des solutions par rapport aux conditions initiales

Soit $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$, satisfaisant les hypothèses de Cauchy Lipschitz. Ainsi pour toute condition initiale $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$, il existe une seule solution maximale du problème (P). On veut savoir comment cette solution maximale, et en particulier son domaine de définition, dépend de la condition initiale.

Théorème 10 (Théorème des bouts)**.** *Soit $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$, et supposons que f vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy Lipschitz. Soit $y :]t^-, t^+[\to \mathbb{R}$ une solution de (E). On a donc $]t^-, t^+[\subset I$. La solution y est maximale à droite si et seulement si*

i- *Soit $t^+ = \sup I$,*

ii- *Ou bien $t^+ < \sup I$, et quand $t \to t^+$, $y(t)$ sort définitivement du compact de Ω. Ceci signifie que pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un temps $\tau_K \in]t^-, t^+[$, tel que $y(t) \notin K$ dès que $t \in [\tau_K, t^+[$.*

Bien sûr le théorème s'écrit aussi du côté gauche (c-à-d la solution y est maximale à gauche ssi soit $t^- = \inf I$ ou bien $t^- > \inf I$ et quand $t \to t^-, y(t) \notin K$ dès que $t \in [t^-, \tau_K]$).

Définition 6. *Soit $y : [a, b] \to \Omega$ la restriction d'une solution de (E) à un sous-intervalle compact de son intervalle de définition. Le graphe de y est*

$$\Gamma = \{(t, y(t)) \text{ où } t \in [a, b]\} \subset I \times \Omega.$$

Pour $\varepsilon > 0$, le ε-tube autour de Γ est

$$\Gamma_\varepsilon = \{(t, z(t)) \text{ où } t \in [a, b] \text{ et } |y(t) - z| \leq \varepsilon\} \subset I \times \mathbb{R}.$$

Lemme 11. *Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, le tube Γ_ε est une partie compacte de $I \times \Omega$. La restriction de $f_{|\Gamma_\varepsilon}$ est alors Lipschitzienne par rapport à y.*

Théorème 12 (Dépendance C^0 des solutions par rapport aux données initiales)**.** *Soit $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$, satisfaisant les conditions de Cauchy Lipschitz. Soit $y : [a, b] \to \Omega$ la restriction d'une solution de (E) à un sous-intervalle compact $[a, b] \subset I$. Pour tout $\varepsilon > 0$ tel que le ε-tube autour de la trajectoire de y soit inclut dans $I \times \Omega$, il existe $0 < \eta < \varepsilon$ tel que si y est une solution maximale de (E) de condition initiale $(t_0, y_0) \in \Gamma_\eta$*

* *y est définie sur un intervalle ouvert contenant $[a, b]$,*

** *$\forall t \in [a, b]$ on a $(t, z(t)) \in \Gamma_\varepsilon$, i.e. $\sup_{t\in[a,b]} |y(t) - z(t)| \leq \varepsilon$.*

Preuve. Le lemme précédent assure que $f_{|\Gamma_\varepsilon}$ est Lipschitzienne.
Soient $0 < \eta < \varepsilon$, $(t_0, y_0) \in \Gamma_\eta$ et $z : J \to \Omega$ la solution maximale de (E) de condition initiale (t_0, y_0). Pour η assez petit on veut

i- $\sup J > b$,

ii- $|y(t) - z(t)| \leq \varepsilon, \forall t \in [a, b]$.

On va montrer que si η est assez petit on a

$$t \in [t_0, b] \bigcap J \Rightarrow |y(t) - z(t)| < \varepsilon.$$

Si ce n'est pas le cas, on introduit le premier instant à droite de t_0 où $(t, y(t))$ est sur le bord du tube Γ_ε.
Soit

$$t_1 = \inf\{t \in [t_0, b] \cap J \text{ tel que } |y(t) - z(t)| \geq \varepsilon\},$$

on a donc $|y(t_1) - z(t_1)| = \varepsilon$, tandis que $|y(t) - z(t) < \varepsilon|, \forall t \in [t_0, t_1[$.
$\forall t \in [t_0, t_1[$ le point $(t, z(t)) \in \Gamma_\varepsilon$. Et donc

$$|y'(t) - z'(t)| = |f(t, y(t)) - f(t, z(t))| \leq k|y(t) - z(t)|.$$

Ainsi du lemme de Gronwall on aura

$$\varepsilon = |y(t_1) - z(t_1)| \leq e^{k(t_1 - t_0)}|y(t_0) - z(t_0)| \leq e^{k(b-a)}\eta,$$

il suffit de prendre $\eta < \varepsilon.e^{-k(b-a)}$, d'où (ii).
Soit $\eta < \varepsilon.e^{-k(b-a)}$ et par l'absurde supposons $\sup J \leq b$.
Lorsque $t \to \sup J$, le graphe de la solution z, i.e. $\{(t, z(t))\}$ reste confiné dans $\Gamma_\varepsilon \subset I \times \Omega$. Et $z(t)$ reste dans le compact $p(\Gamma_\varepsilon) \subset \Omega$, où $p : (t, y) \in I \times \Omega \to \Omega \ni y$ est la projection sur la seconde coordonnée. Ainsi par le théorème des bouts on conclut que z n'est pas maximale à droite. □

Exemple 10. *Soit* $f : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$*, la fonction définie par*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall y > 0, f(t,y) = -\frac{1}{y}.$$

1- *Montrons que* f *est continue sur* $f : \mathbb{R}\times]0,+\infty[$ *et qu'elle est localement Lipschitzienne.*
Puisque f *est l'inverse de la fonction linéaire non nulle* y*, donc continue, alors* f *est continue sur* $f : \mathbb{R}\times]0,+\infty[$.
f *est de classe* C^1 *sur* $I \times \Omega$ *car* $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{y^2}$ *continue sur* $I\times\Omega$*, et* $\dfrac{\partial f}{\partial t} = 0$ *est aussi continue.*

2- *Soit* $y_0 > 0$*. On considère le problème de Cauchy* $(P)\begin{cases} y' &= -\dfrac{1}{y} \cdots (E) \\ y(0) &= y_0 > 0 \end{cases}$.

2.1- *La solution explicite de* (P) *est*

$$\begin{aligned} y' = \frac{1}{y} &\Rightarrow ydy = -dt \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = -t + c, c \in \mathbb{R} \Rightarrow y^2 = -2t + c \geq 0 \\ &\Rightarrow y = \pm\sqrt{-2t+c} \end{aligned}$$

En plus $y_0 > 0$ *et donc* $c = y_0^2 \Rightarrow y(t) = \sqrt{-2t + y_0^2}$*, définie si* $t < \dfrac{y_0^2}{2}$*. (*$y(t)$ *ne peut être négative car* $y_0 > 0$*.)*
Alors $y(t) = \sqrt{-2t+y_0^2}$ *et* $J =]-\infty, \dfrac{y_0^2}{2}[$.

2.2- *Etudions pour* $T^* = \dfrac{y_0^2}{2}$, $\lim_{t\to T^*} y(t)$.
On a $\lim_{t\to T^*}\sqrt{-2t+y_0^2} = 0 \notin \Omega =]0,+\infty[$.
Et d'après le théorème des bouts, y *sort de tout compact de* Ω*, donc* y *n'est pas globalement Lipschitzienne.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.P. Demailly "*Analyse Numérique et Equations Différentielles* ". Collection Grenoble Sciences, 2006.

[2] I. Hamchi *Support de Cours 2016*

[3] A. Youkana *Support de Cours*