Université de Batna 2
Département de Mathématiques
EDO M1 MA S1 2021/2022

Contrôle Final **Durée 1H30**

Exercice 1 (6 pts)
Soit le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y' = & \sin y \\ y(0) = & 2 \end{cases}.$$
Justifier l'existence d'une seule solution maximale. Cette solution est-elle globale ?

Exercice 2 (6 pts)
Résoudre le système linéaire
$$\begin{cases} x' = & 5x - 6y \\ y' = & 3x - 4y \end{cases}.$$

Exercice 3 (8 pts)
Soit le système (S) $\begin{cases} x' = & y \\ y' = & -x + (x^2 - 1)y \end{cases}$.

1- Trouver les points d'équilibre de ce système.
2- Montrer que la fonction $V(x, y) = x^2 + y^2$, définie sur le disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$ est définie positive.
3- Etudier la stabilité des équilibres du système (S) par la fonction de Lyapunov.

Corrigé type

Exercice 1 (6 pts)
Soit le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y' = & \sin y \\ y(0) = & 2 \end{cases}.$$
Justifier l'existence d'une seule solution maximale : Continuité (1 pt)+ Localement Lipschitizenne (2pts) et donc par le théorème de Cauchy Lipschitz on a le résultat (1pt).
Cette solution est-elle globale ? Oui car la fonction sin est bornée (2 pts).

Exercice 2 (6 pts)
Résoudre le système linéaire
$$\begin{cases} x' = & 5x - 6y \\ y' = & 3x - 4y \end{cases}.$$
Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$ (2 pts) et les vecteurs propres correspondants sont respectivement $V_1 = (2, 1)^t$ et $V_2 = (1, 1)^t$ (2 pts) et donc $X(t) = (2c_1e^{2t} + c_2e^{-t}, c_1e^{2t} + c_2e^{-t})^t$ (2 pts)

Exercice 3 (8 pts)
Soit le système (S) $\begin{cases} x' = & y \\ y' = & -x + (x^2 - 1)y \end{cases}$.

1- Le seul point d'équilibre de ce système est l'origine : $(0, 0)^t$. (2 pts)
2- Montrer que la fonction $V(x, y) = x^2 + y^2$, définie sur le disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$ est définie positive. Voir la définition. (2 pts)
3- Etudier la stabilité des équilibres du système (S) par la fonction de Lyapunov. On calcule $V'(x, y) = \dfrac{\partial V}{\partial x} f(x, y) + \dfrac{\partial V}{\partial y} g(x, y) = 2y^2(x^2 - 1) \leq 0$ car $x^2 + y^2 < 1 \Rightarrow x^2 - 1 < -y^2 < 0$. (2 pts)