Université Batna 2
Département de Mathématiques
Master 1 Mathématiques Financières
Calcul Stochastique 2

Semestre 2
2022/2023

SÉRIE D'EXERCICES N°1
(Filtration-Martingales)

Exercice 1 :

On lance une pièce de monnaie une infinité de fois. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un processus défini par :

$$X_n = \mathbb{I}_{\text{Pile}} - \mathbb{I}_{\text{Face}} \quad \text{pour le } n^{ième} \text{ lancer}$$

et soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sa filtration canonique. Pour chacun des évènements suivants, trouver le plus petit n pour lequel les évènements ci-dessous soient dans $(\mathcal{F}_n)_n$:

(a) A :"la première obtention de Pile est précédée de pas plus de 10 Faces"

(b) B :"il y a au moins un Pile dans la suite $X_1; X_2; \cdots$"

(c) C :"les 100 premiers lancers produisent le même résultat"

(d) D :"il n'y a pas plus de 2 Piles et 2 Faces parmi les 5 premiers lancers"

Exercice 2 :

Soit $X_k, k \in \mathbb{N}$ une suite de v.a. telles que $\mathbb{E}(X_k) = 0, \forall k$ et X_k sont indépendantes pour tout k.

Posons $M_n = \Sigma_{k=1}^n X_k$, prouver que M_n est une martingale.

Exercice 3 :

Soit $X_k, k \in \mathbb{N}$ une suite de v.a. telles que $\mathbb{E}(X_k) = 1, \forall k$ et X_k sont indépendantes pour tout k.

Posons $M_n = \Pi_{k=1}^n X_k$, prouver que M_n est une martingale.

Exercice 4 :

Soit X une v.a. intégrable. Montrer que $(\mathbb{E}(X/\mathcal{F}_n), n \geq 0)$ est une martingale.

Exercice 5 :

Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une $\mathcal{F}_n$-martingale de carré intégrable.

Montrer que $\mathbb{E}((M_n - M_k)^2/\mathcal{F}_k) = \mathbb{E}(M_n^2/\mathcal{F}_k) - M_k^2$ pour $n > k$.

Exercice 6 :

Soit m une v.a. positive, montrer que $Z_n = \mathbb{E}(m \leq n/\mathcal{F}_n)$ est une sous-martingale.

Exercice 7 :

Soit T un temps d'arrêt et X une v.a. appartenant à $\mathcal{F}_T$, vérifiant $X \geq T$. Montrer que X est un temps d'arrêt.

Exercice 8 :

Montrer que l'inf (resp. sup) de deux temps d'arrêt est un temps d'arrêt.