مقاييس النزعة المركزية

1- المتوسط الحسابي

يعتبر المتوسط الحسابي من أسهل وأكثر متوسطات النزعة المركزية استخداما في الإحصاء،

فإذا كانت لدينا القيم $x_1,x_2,x_3,.....x_n$ فإن متوسطها الحسابي يساوي

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Xi}{n}$$

حيث:

$\overline{X}$: المتوسط الحسابي

X_i : تمثل قيم الظاهرة

n : تمثل عدد البيانات

مثال1:

إذا كانت الدرجات التي تحصل عليها الطالب في خمس مواد هي: 6، 9، 10، 15، 13.

أحسب متوسط درجات هذا الطالب؟

الحل:

$$\overline{X} = \frac{\sum Xi}{n} = \frac{6+9+10+15+13}{5} = \frac{53}{5} = 10.6$$

المتوسط الحسابي في حالة بيانات مكررة

إذا كانت لدينا القيم $x_1,x_2,x_3,..... x_4$

ولها تكرارات $n_1,n_2,n_3,..... n_4$

فإن المتوسط الحساب لها يعطي بالعلاقة

$$\overline{X} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + ...n_nx_n}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + ...n_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{\sum n_i}$$

أي أن المتوسط الحسابي لبيانات متكررة يساوي مجموع حاصل ضرب كل قيمة في تكرارها على مجموع التكرارات

وحيث:

X_i : تمثل قيم الظاهرة.

n_i : تكرار كل قيمة.

Σn_i : مجموع التكرارات.

مثال2:

تحصل طلبة فوج معين على الدرجات المبينة في الجدول التالي:

الدرجة	4	6	8	5	7	6
عدد الطلبة	3	2	4	7	4	2

المطلوب: حساب متوسط الدرجات التي تحصل عليها طلبة هذا الفوج؟

الحل:

الدرجة x_i	عدد الطلبة n_i	$n_i x_i$
4	3	12
6	2	12
8	4	32
5	7	35
7	4	28
6	2	12
المجموع	**22**	**131**

$$\overline{X} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{131}{22} = 5.95$$

المتوسط الحسابي حالة توزيع تكراري:

تعتمد طريقة حساب المتوسط الحسابي لبيانات مبوبة على مراكز الفئات التي يفترض أنها تمثل الفئات التي أخذت منها حيث:

حيث:

x_i : تمثل مراكز الفئات.

n_i : تكرار الفئات.

Σn_i : مجموع التكرارات.

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} ni}$$

مثال3:

البيانات التالية تمثل توزيع عينة من طلبة معهد الرياضة باتنة 2 حسب الوزن، الموسم الجامعي 2019/2018

فئة الوزن	55-50	60-55	65-60	70-65	75-70
عدد الطلبة	23	35	45	18	47

المطلوب: إيجاد متوسط وزن الطلبة؟

الحل:

الفئة / البيان	عدد الطلبة n_i	مراكز الفئات x_i	$n_i x_i$
55-50	23	52,5	1207,5
60-55	35	57,5	2012,5
65-60	45	62,5	2812,5
70-65	18	67,5	1215
75-70	47	72,5	3407,5
المجموع	**168**		**10655**

$$\overline{X} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{10655}{168} = 63.42$$

خواص المتوسط الحسابي:

1 – يعتبر المتوسط الحسابي أبسط مقاييس المركزية حسابا وأكثرها استخداما؛

2 – يأخذ المتوسط الحسابي بعين الاعتبار جميع قيم الظاهرة المدروسة؛

3 – مجموع انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي يساوي صفر $= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X}) = 0$

وللتأكد من ذلك نقوم بتفكيك الطرف الأيمن:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})$$
$$= \sum X_i - \sum X$$
$$= \sum X_i - n\overline{X}$$

(لأن : $n\overline{X} = ...\overline{X} + \overline{X} + \overline{X}$)

نضرب الحد الأول في n ونقسمه على n

$$= \frac{n\sum X_i}{n} - n\overline{X}$$
$$= n\overline{X} - n\overline{X} = 0$$

4 – يتأثر المتوسط الحسابي بالقيم المتطرفة.

2- الوسيط

إذا كانت البيانات تحتوي على قيم متطرفة في الصغر أو الكبر فإن النتيجة التي يعطيها المتوسط الحسابي تكون غير واقعية، في مثل هذه الحالات وجد متوسط آخر سمي بالوسيط الذي هو أكثر واقعية ودلالة وصحة للحصول على فكرة عامة عن حالة البيانات التي بها قيم متطرفة. وكتعريف فإن الوسيط هو القيمة التي تقسم مجموع البيانات إلى قسمين بحيث يكون نصف عدد البيانات أكبر منه ونصف عدد البيانات أصغر منه ويرمز له بالرمز: Me.

مثال04:

أوجد الوسيط للبيانات التالية: 7، 6، 7، 10، 12، 17، 9، 11، 15؟

الحل:

لإيجاد الوسيط نقوم بالتالي:

أ) نرتب البيانات تصاعديا أو تنازليا:

6، 7، 7، 9، 10، 11، 12، 15، 17.

ب) نبحث عن الوسيط لهذه البيانات، وهناك حاليتن:

1- إذا كان عدد البيانات فردي فإن الوسيط هو القيمة التي ترتيبها $\frac{n+1}{2}$

2 – إذا كان عدد البيانات زوجي فإن الوسيط هو متوسط القيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2}+1$.

وفي مثالنا فإن عدد البيانات المعطاة هو 9 أي فردي وبالتالي فإن الوسيط هو القيمة التي ترتيبها $\frac{9+1}{2}=5$ وهو **10.**

الوسيط في حالة بيانات متكررة:

إذا كانت البيانات المراد حساب الوسيط لها متكررة (لها تكرارات) فإن الوسيط يحسب بإتباع الخطوات التالية:

- نحسب التكرار المتجمع الصاعد لقيم الظاهرة؛
- نحدد ترتيب الوسيط $\frac{N}{2}$ (حيث N = مجموع التكرارات)؛
- نبحث عن القيمة التي تكرارها المتجمع الصاعد أكبر من $\frac{N}{2}$ مباشرة وهي القيمة التي تمثل الوسيط.

مثال05:

الجدول التالي يمثل توزيع الطلبة فوج معين حسب الدرجات التي تحصلوا عليها في الفرض الفجائي في مادة الإحصاء. المطلوب إيجاد الوسيط لهذه البيانات؟

الدرجة	4	5	6	7	8	9	المجموع
عدد الطلبة	2	4	8	6	5	4	**29**

1) نحسب التكرار المتجمع الصاعد للبيانات المعطاة:

الدرجة X_i	4	5	6	7	8	9	المجموع
عدد الطلبة N_i	2	4	8	6	5	4	**29**
التكرار المتجمع الصاعد	2	6	14	20	25	29	/

2) نحسب ترتيب الوسيط $=\frac{N}{2}=14.5$.

3) القيمة التي تكرارها المتجمع الصاعد أكبر مباشرة من $\frac{N}{2}$ هي 7 وبالتالي فإن الوسيط = 7.

الوسيط لبيانات مبوبة في جداول توزيع تكراري:

لتحديد الوسيط لبيانات مبوبة في جداول توزيع تكراري فإننا نقوم بالتالي:

1) نحسب التكرار المتجمع الصاعد؛

2) نحدد ترتيب الوسيط وهو عبارة عن نصف مجموع التكرارات $\frac{N}{2}$ ؛

3) نحدد الفئة الوسيطية أي الفئة التي يقع فيها الوسيط، وهي الفئة التي تقابل التكرار المتجمع الصاعد الذي يساوي ترتيب الوسيط أو أكبر منه مباشرة؛

4) نحدد ونحسب الوسيط بتطبيق العلاقة الإحصائية للوسيط.

$$Me = L_1 + \frac{\frac{N}{2} - N_0}{n_e}.c$$

حيث: M_e : الوسيط.

L_1 : الحد الأدنى للفئة الوسيطية.

N : مجموع التكرارات.

N_0 : التكرار المتجمع الصاعد السابق للفئة الوسيطية.

ne: تكرار الفئة الوسيطية.

C: طول الفئة.

مثال06:

يبين التوزيع التكراري التالي توزيع 50 طالب حسب الدرجة المتحصل عليها في امتحان مادة ما.

المطلوب : حساب قيمة الوسيط لهذه البيانات؟

فئة الدرجات	4-2	6-4	8-6	10-8	12-10	14-12	16-14	**المجموع**
عدد الطلبة	2	6	8	10	14	6	4	**50**

الحل:

أ) نحسب التكرار المتجمع الصاعد لبيانات التوزيع كما هو مبين في الجدول الآتي:.

ب) نحدد ترتيب الوسيط $= \frac{50}{2} = 25$.

الفئة	**التكرار**	**التكرار المتجمع الصاعد**
4-2	4	4
6-4	8	12
8-6	10	22
10-8	15	37
12-10	6	43
14-12	4	47
16-14	3	50
المجموع	**50**	

د) نحدد الفئة الوسيطية أي الفئة التي تكرارها المتجمع الصاعد يساوي ترتيب الوسيط أو أكبر منه مباشرة، (أي الفئة التي تكرارها المتجمع الصاعد ≥ 25 وهي هنا الفئة [8-10[).

.

$$M_e = 8 + \frac{25-22}{15} 2 = 8 + 0{,}4$$

$M_e = 8{,}4$

خواص الوسيط:

1 – لا يتأثر بالقيم المتطرفة وبالتالي فإنه يعتبر أصلح المقاييس عن وجود مثل هذه القيم.

2 – يمكن إيجاد الوسيط من الرسم.

3 – يمكن استخدامه في حالة البيانات النوعية.

4 - يمكن حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة.

3- المنوال

المنوال هو القيمة الأكثر تكرارا في مجموعة القيم؛ والمنوال قد يكون وحيد القيمة كما قد يكون هناك أكثر من منوال لنفس التوزيع، ويرمز له بالرمز **Mo.**

مثال07:

البيانات التالية تمثل التقديرات التي تحصل عليها 09 طلبة في مقياس المنهجية والمطلوب إيجاد المنوال.

ممتاز، جيد، جيد جدا، جيد، متوسط،، جيد، ضعيف، جيد جدا، جيد.

الحل:

المنوال هنا هو جيد.

المنوال لبيانات مبوبة في جداول توزيع تكراري:

لإيجاد المنوال من الجداول التوزيع التكراري نبحث عن الفئة المنوالية وهي الفئة التي يقابلها أكبر تكرار. وهناك أكثر من طريقة لحساب المنوال:

أ) يمكن اعتبار مركز الفئة المنوالية كمنوال على وجه التقريب.

ب) يمكن حساب المنوال بالاعتماد على الفرق بين تكرار الفئة المنوالية والفئتين التي قبلها والتي بعدها بطريقة بيرسون ويكون ذلك على النحو التالي:

إذا رمزنا للفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة التي قبلها بالرمز (d_1) وللفرق بين تكرار الفئة المنوالية التي بعدها بالرمز (d_2) ولطول الفئة بالرمز (c) ولحدها الأدنى بالرمز (L_1) فنحصل على العلاقة التالية:*

$$M_0 = L_1 + \frac{d_1}{d_1 + d_2}.c$$

يمكن كذلك إيجاد المنوال من الرسم، وذلك من خلال رسم المدرج التكراري للفئة المنوالية وللفئتين التي قبلها والتي بعدها. نقوم بعد ذلك بإيصال نهاية المستطيل للفئة المنوالية من الناحية اليسرى بنهاية المستطيل للفئة التي بعدها من الناحية اليسرى. كذلك نهاية المستطيل للفئة المنوالية من الجهة اليمنى بنهاية المستطيل للفئة التي قبلها من الجهة اليمنى.

ومن نقطة التقاطع المستقيمين ننزل عمودا على المحور الأفقي فتكون نقطة تقاطع هذا العمود مع المحور الأفقي هي قيمة المنوال.

مثال08:

الجدول التالي يبين الدرجات المتحصل عليها من طرف طلبة السنة الثانية ت ر ت في مقياس الاحصاء الاستدلالي للموسم الجامعي 2020/2019 بجامعة مستغانم والمطلوب ايجاد قيمة المنوال؟

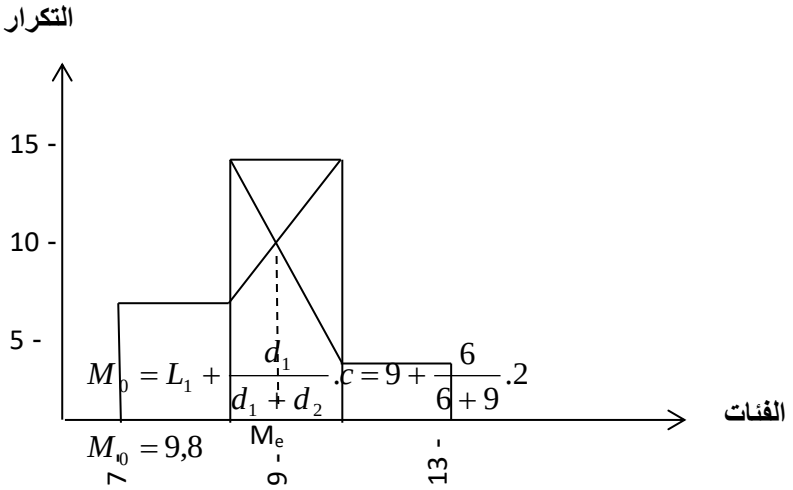
فئة الدرجات	7-5	9-7	11-9	13-11	15-13	17-15	**المجموع**
عدد الطلبة	2	7	13	4	6	3	35

الحل:

- الفئة المنوالية هي الفئة [9-11[وبالتالي فإنه يمكن اعتبار مركز هذه الفئة (22.5) كمنوال تقريبي.

نحدد المنوال الآن بالرسم وذلك من خلال رسم المستطيلات التي تمثل كل من الفئة المنوالية والفئتين التي قبلها والتي بعدها.

- نحسب المنوال من خلال العلاقة



خواص المنوال:

1 – لا يأخذ بعين الاعتبار جميع البيانات المعطاة وبالتالي فهو لا يتأثر بالقيم المتطرفة؛

2 – يمكن ايجاده بيانيا؛

3 – يمكن أن يوجد أكثر من منوال لتوزيع واحد؛

4 – يمكن حسابه من الجداول الإحصائية المفتوحة؛

5 – يعتبر أفضل المتوسطات لوصف الظواهر النوعية.