CHAPITRE 2 : REPRESENTATION DES SYSTEMES ASSERVIS ET TRANSFORMATION DE LAPLACE

2.1 Introduction

Un système physique est un ensemble d'objets physiques connectés entre eux pour effectuer une tache quelconque. Il peut être modélisé de plusieurs façons selon le problème à traiter et de la précision voulue. Une fois qu'un modèle physique du système est défini, l'étape prochaine consiste à définir un modèle mathématique qui représente mathématiquement le modèle physique via des lois physiques adéquates.

2.2 Mise en équation d'un système

Le modèle mathématique de la majorité des systèmes physiques est caractérisé par des équations différentielles. Le système physique est dit ***linéaire*** si la relation entre les valeurs de sortie et les valeurs d'entrées peut être représentée sous forme d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

Exemple : Considérons le circuit RL suivant, possédant une entrée *e(t)* et une sortie *s(t)*.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i . \frac{d^i s(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j . \frac{d^j e(t)}{dt^j} \quad (2.1)$$

s(t) : signal de sortie d'ordre n.

e(t): signal d'entrée d'ordre m.

E=e(t): signal d'entrée.

S=s(t): signal de sortie.

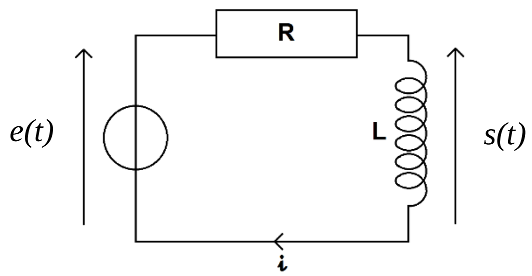


Figure 2.1 Circuit RL.

$S = L.\frac{di}{dt}$;

$E = R.i(t) + S$; en dérivant les deux membres de l'égalité, on aura :

$$\frac{dE}{dt} = R.\frac{di}{dt} + \frac{dS}{dt}; \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dE}{dt} = \frac{R}{L}.S + \frac{dS}{dt};$$

D'une manière générale, si on applique un signal à l'entrée, on recueillera à la sortie un signal qui sera lié au signal d'entrée par une équation différentielle de la forme suivante :

$$a_n \frac{d^n S}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dS}{dt} + a_0 S = b_m \frac{d^m E}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{dE}{dt} + b_0 E \quad (2.2)$$

Remarque : Pour un processus physique, on a toujours $n > m$.

2.3. Transformée de Laplace

Les systèmes physiques linéaires sont conduits généralement par un système d'équations différentielles d'ordre supérieur (>2). Il serait donc très difficile de résoudre le système d'équations à partir de sa représentation dans le domaine temporel ; pour cela, on fait recours à l'emploi de la transformée de Laplace.

Définition : La transformée de Laplace est le remplacement de la fonction continue de la variable réelle $f(t)$ définit pour $t \geq 0$ par la fonction $F(p)$ de la variable complexe p.

$$L[f(t)] = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \tag{2.3}$$

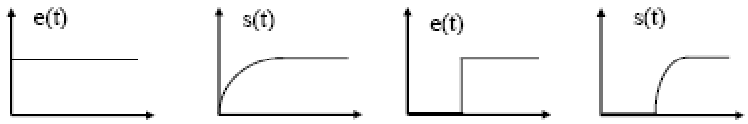
où

$f(t)$ est la fonction origine ;

$F(p)$ est la fonction image ;

p est la variable de Laplace définie dans le plan complexe ($p = \sigma + j\omega$) et $\omega = 2\pi f$.

L'intégration de $t=0$ jusqu'à $+\infty$ signifie qu'on ignore toute information portée par $f(t)$ avant $t=0$, ce qui illustre le phénomène de *causalité* propre à tout système physique.



Remarque : Un système est dit **causal** s'il ne répond pas avant d'être excité (système non anticipatif). Les systèmes physiques temporels réalisables sont causals. Un signal $f(t)$ est causal si $\forall t < 0 \quad x(t)=0$.

Exemple :

$$f(t) = E; F(p) = L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t).e^{-pt}dt \quad = \int_0^{+\infty} E.e^{-pt} = -\frac{E}{P}.e^{-pt}\Big]_0^{\infty} = \frac{E}{p}$$ [1]

2.4 Propriétés de la transformée de Laplace

On pose $x(t) \xrightarrow{TL} X(p)$ $\quad y(t) \xrightarrow{TL} Y(p)$ et en supposant que $X(p)$ et $Y(p)$ existent.

- **Linéarité**

$$\alpha\, x(t) + \beta\, y(t) \xrightarrow{TL} \alpha\, X(p) + \beta\, Y(p) \tag{2.4}$$

- **Multiplication de t par un scalaire (changement d'échelle temporelle)**

$$x(\alpha t) \xrightarrow{TL} \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{p}{\alpha}\right) \tag{2.5}$$

- **Translation temporelle (retard)**

$$x(t-\tau) \xrightarrow{TL} X(p)e^{-\tau p} \tag{2.6}$$

- **Translation temporelle (avance)**

$$x(t+\tau) \xrightarrow{TL} X(p)\, e^{+\tau p} \tag{2.7}$$

[1] $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$

- **Multiplication par t**

$$t\,x(t) \overset{TL}{\rightarrow} -\frac{dX(p)}{dp} \tag{2.8}$$

- **Multiplication par une exponentielle**

$$e^{-\alpha t}\,x(t) \overset{TL}{\rightarrow} X(p+\alpha) \tag{2.9}$$

- **Multiplication de deux signaux temporels**

$$x(t)\,y(t) \overset{TL}{\rightarrow} X(p) * Y(p) \tag{2.10}$$

- **Convolution de deux signaux temporels**

$$x(t) * y(t) \overset{TL}{\rightarrow} X(p)\,Y(p) \tag{2.11}$$

- **Dérivation par rapport à t**

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{TL}{\rightarrow} pX(p) - x(0) \tag{2.12}$$

En générale : $\frac{d^n x(t)}{dt^n} \overset{TL}{\rightarrow} p^n X(p) - p^{n-1}x(0) - p^{n-2}x'(0) - \cdots - px^{n-2}(0) - x^{n-1}(0)$

- **Intégration par rapport à t**

$$\int_0^t x(u)du \overset{TL}{\rightarrow} \frac{X(p)}{p} \tag{2.13}$$

- **Théorème de la valeur finale :**

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{p\to 0} pX(p) \qquad \text{si la limite en } t\to\infty \text{ de } x(t) \text{ existe} \tag{2.14}$$

- **Théorème de la valeur initiale :**

$$\lim_{t\to 0} x(t) = \lim_{p\to\infty} pX(p) \qquad \text{si la limite en } t=0 \text{ de } x(t) \text{ existe} \tag{2.15}$$

Exemple 1 :

$f(t) = k.t \;\Rightarrow L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = k\int_0^{+\infty} t\,e^{-pt}dt = \frac{k}{p^2}$ [2] on prend $V=t$ et $U'=e^{pt}$

Exemple 2 :

Soient les deux fonctions suivantes : $f_1(t) = e^{-t}$ et $f_2(t) = e^{-2t}$

Calculer L[5. $f_1(t)$- $f_2(t)$] ; L[$f_1'(t)$] ; L[$f_2(t\text{-}2)$]

1. $L[5.f_1(t) - f_2(t)] = 5\,L[f_1(t)] - L[f_2(t)]$

$$= 5\int_0^{+\infty} e^{-t}.e^{-pt}dt - \int_0^{+\infty} e^{-2t}.e^{-pt}dt = 5\int_0^{+\infty} e^{-(1+p)t}dt - \int_0^{+\infty} e^{-(2+p)t}dt$$

$$= -5\left.\frac{e^{-(1+p)t}}{1+p}\right]_0^{+\infty} + \left.\frac{e^{-(2+p)t}}{2+p}\right]_0^{+\infty} = \frac{4p+9}{(1+p)(2+p)} \qquad \text{(linéarité)}$$

2. $L[f_1'(t)] = pF_1(p) - f_1(0) = p\frac{1}{p+1} - 1 = -\frac{1}{p+1}$ (dérivation)

3. $L[f_2(t-2)] = F_2(p)e^{-2p} = \frac{e^{-2p}}{p+2}$ (retard temporelle)

[2] Intégration par partie $\int_0^{+\infty} u'v = (uv)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} uv'$

2.5 Quelques signaux usuels et leurs TL

– *Impulsion de Dirac :*

L'impulsion de Dirac est la modélisation mathématique d'un signal d'amplitude infinie sur une durée (infiniment brève) au point t=0 et vérifiant $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$

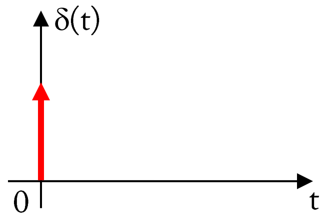


Figure 2.2 Impulsion de Dirac.

Sa transformée de Laplace est donnée par : $L[\delta(t)] = \int_0^{+\infty} \delta(t)e^{-pt}dt = 1$

- *Echelon :*

Aussi appelée la fonction de Heaviside, notée par *U(t)* et définie par :

$$\begin{cases} u(t) = 0 \;\; si\; t < 0 \\ u(t) = 1 \;\; si\; t \geq 0 \end{cases}$$

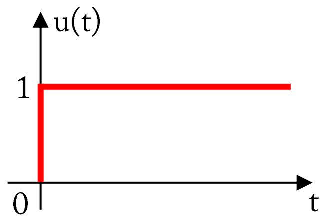


Figure 2.3 Echelon.

Et ses variantes décalées (translatées) sont définies par : *t→U(t-α)*

La fonction *U(t)* sert à produire des fonctions causales. La transformée de Laplace de la fonction de Heaviside peut être obtenue comme suit :

$$L[U(t)] = \int_0^{+\infty} U(t)e^{-pt}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\,dt$$
$$= \left[-\tfrac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^{+\infty} = 0 - \left(-\tfrac{1}{p}\right) = \tfrac{1}{p} \quad si\; t > 0 \qquad (2.29)$$

- *Rampe :*
- $r(t) = \begin{cases} t, \; si\; t \geq 0 \\ 0, \; si\; t < 0 \end{cases}$

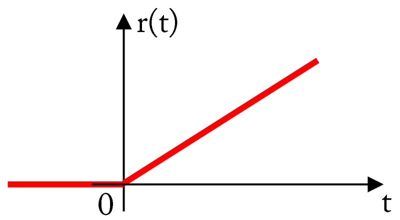


Figure 2.4 Rampe.

La T.L de la fonction rampe est donnée par :

$$L[r(t)] = \int_0^{+\infty} te^{-pt}\,dt = -t\frac{e^{-pt}}{p}\bigg|_0^{+\infty} - \frac{1}{(-p^2)}e^{-pt}\bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{p^2}$$

2.6 Tableau de quelques transformée de Laplace usuelles

Le tableau suivant résume la transformée de Laplace de quelques fonctions usuelles:

Original $f(t)$, $t \geq 0$	Transformée de Laplace $F(p)$
Impulsion de Dirac $\delta(t)$	1
Echelon d'amplitude E *i.e.* $E\Gamma(t)$	$\frac{E}{p}$
Rampe de pente b *i.e.* bt	$\frac{b}{p^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$t^q e^{-at}$	$\frac{q!}{(p+a)^{q+1}}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
Retard pur *i.e.* $f(t-\theta)$	$e^{-\theta p}F(p)$

2.7 Transformation de Laplace inverse

La transformée de Laplace inverse consiste à retrouver le signal original temporel *x(t)* à partir de sa transformée de Lapalce *X(p)*, la définition mathématique de cette opération :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{R \to \infty} \int_{\sigma - jR}^{\sigma + jR} X(p) e^{pt}\, dp \tag{2.16}$$

Pratiquement, la solution est obtenu en décomposant la fonction *X(p)* en éléments simples et utiliser ensuite la table des transformées pour retrouver l'original *x(t)*.

Exemple :

Considérons la fraction rationnelle suivante : $F(p) = \frac{p+2}{p^2+4} e^{-p}$

$F(p) = \left[\frac{p}{p^2+2^2} + \frac{2}{p^2+2^2}\right] e^{-p}$ or $L[\cos(\omega t)] = \frac{p}{p^2+\omega^2}$ et $L[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

$\Rightarrow f(t) = \cos\big(2(t-1)\big) + \sin(2(t-1))$

2.8 Résolution d'équations différentielles par Laplace

L'utilisation des transformées de Laplace simplifie beaucoup la résolution des équations différentielles. La forme générale d'une équation différentielle d'ordre *n* peut être écrite sous la forme suivante :

$$b_0 s(t) + b_1 \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + \cdots + b_n \frac{\mathrm{d}^n s(t)}{\mathrm{d}t^n} = a_0 e(t) + a_1 \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} + \cdots a_m \frac{\mathrm{d}e^m(t)}{\mathrm{d}t^m} \tag{2.17}$$

La T.L de cette équation sera donc:

$$\begin{aligned} b_0 S(p) + b_1\big(pS(p) - s(0)\big) + b_2\left(p^2 S(p) - ps(0) - \frac{\mathrm{d}s(0)}{dt}\right) \ldots = \\ a_0 E(p) + a_1\big(pE(p) - e(0)\big) + a_2\left(p^2 E(p) - pe(0) - \frac{\mathrm{d}e(0)}{dt}\right) \ldots \end{aligned} \tag{2.18}$$

Ce qui peut être écrit sous la forme :

$$(b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_n p^n) S(p) + K_s = (a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_m p^m) E(p) + K_e \tag{2.19}$$

Où K_s et K_e sont des termes qui dépendent des conditions initiales de *s(t)* et *e(t)*. Si ces conditions initiales sont nulles (c'est le cas le plus général en automatique), on obtient :

$$S(p) = \frac{a_0 + a_1 p + \cdots + a_m p^m}{b_0 + b_1 p + \cdots + b_n p^n} E(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \tag{2.20}$$

Cette équation permet de calculer *S(p)*. Pour trouver *s(t)* il suffit de calculer la transformée inverse de Laplace.

- On appelle **pôles** du système les racines de l'équation caractéristique (dénominateur) *D(p) = 0.*
- On appelle **zéros** du système les racines du numérateur *N(p) = 0.*

Exemple :

Soit l'équation différentielle suivante:

$\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + 2s(t) = e(t)\,;$ où *s(0) = 0* et *s'(0) = 3.*

Nous avons :

$L[s(t)] = S[p]; L\left[\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}\right] = pS(p) - s(0)\,; L\left[\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2}\right] = p^2 S(p) - ps(0) - \frac{\mathrm{d}s(0)}{dt}$;

Pour une entrée échelon unitaire *e(t) = u(t)* nous aurons : $S(p) = \frac{3p+1}{p(p^2+3p+2)}$

Que nous allons mettre sous la forme : $\frac{A}{p} + \frac{B}{(p+1)} + \frac{C}{(p+2)}$

Après développement nous obtenons : $S(p) = \frac{1/2}{p} + \frac{2}{(p+1)} - \frac{5/2}{(p+2)}$

Ce qui nous permet de déduire la sortie du système : $s(t) = \frac{1}{2} + 2e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-2t}$

2.7.1 Méthodes de décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

Une fraction rationnelle est une expression de la forme $\frac{N}{D}$, où N et D sont deux polynômes. En pratique, les transformées de Laplace de la plupart des signaux usuels sont des fractions rationnelles :

$$S(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\sum_{j=1}^{m} b_j p^j}{\sum_{i=1}^{n} a_i p^i} \qquad (2.21)$$

Ici, on procède par décomposition en fractions simples, où D est un polynôme *irréductible* (qui ne se simplifie pas), en utilisant la propriété de linéarité de la TL.

D'abord, on considère que le degré du polynôme *D(p)* est supérieur au degré du polynôme *N(p)*.

1) **Premier cas : *D(p)* admet des racines (pôles) simples**

$$D(p) = \prod_{i=1}^{n}(p - p_i) \Rightarrow S(p) = \frac{C_1}{p-p_1} + \frac{C_2}{p-p_2} + \dots + \frac{C_n}{p-p_n};\ p_i \neq p_j \quad si\ i \neq j \qquad (2.22)$$

Avec :$C_i = \lim_{p \to p_i}(p - p_i)Y(p) \Longrightarrow C_i = (p - p_i)S(p)|_{p=p_i}$

Les coefficients complexes C_i sont appelés les résidus de leurs pôles respectifs.

$$s(t) = (\textstyle\sum_{i=0}^{n} C_i e^{p_i t})u(t) = (C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t})u(t) \qquad (2.23)$$

Exemple 1 :

Soit la fonction de transfert suivante: $S(p) = \frac{p^2+3p-1}{p^3+3p^2+2p}$

Solution :

$S(p) = \frac{p^2+3p-1}{p(p+1)(p+2)} = \frac{C_1}{p} + \frac{C_2}{p+1} + \frac{C_3}{p+2}$

$C_1 = pS(p)|_{p=0} = -\frac{1}{2};\ C_2 = (p+1)S(p)|_{p=-1} = -3;\ C_3 = (p+2)S(p)|_{p=-2} = -\frac{3}{2}$

$S(p) = \frac{-1/2}{p} - \frac{3}{p+1} - \frac{3/2}{p+2} \Longrightarrow s(t) = -\frac{1}{2} - 3e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t}$

Exemple 2 :

$S(p) = \frac{p+1}{p^2+4} = \frac{C_1}{p-2j} + \frac{C_2}{p+2j}$

$C_1 = (p-2j)S(p)|_{p=2j} = \frac{1}{2} - \frac{j}{4};\ C_2 = C_1^*;$

Alors : $s(t) = (C_1 e^{2jt} + C_2\, e^{-2jt})$ sachons que $\begin{cases} \cos x = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2} \\ \sin x = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j} \end{cases}$

Après développement on aura : $s(t) = \cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)$.

Deuxième cas : D(p) admet des pôles multiples (d'ordre r) et on considère les (n-r) pôles simples.

Nous avons alors : $D(p)=D_1(p)D_2(p)$; avec $D_1(p)$: (r) racines multiples et $D_2(p)$: $(n-r)$ racines simples. Donc $S(p)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$S(p) = \frac{B_r}{(p-p_0)^r} + \frac{B_{r-1}}{(p-p_0)^{r-1}} + \cdots + \frac{B_1}{(p-p_1)} + \frac{A_1}{(p-p_1)} + \frac{A_2}{(p-p_2)} + \cdots + \frac{A_{n-r}}{(p-p_{n-r})} \quad (2.24)$$

Avec :

$$B_k = \frac{1}{(r-k)!}\frac{d^{(r-k)}}{dp^{(r-k)}}[(p-p_0)^r S(p)]_{p=p_0} \quad (2.25)$$

$$s(t) = B_1 e^{p_0 t} + B_2 t e^{p_0 t} + \cdots + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \cdots + A_{n-r} e^{p_{n-r} t} \quad (2.26)$$

Exemple :

$$S(p) = \frac{3p}{p^2+4p+4} = \frac{B_2}{(p+2)^2} + \frac{B_1}{(p+2)} \Rightarrow \begin{cases} B_2 = \dfrac{1}{0!}\dfrac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}p^0}[(p+2)^2 S(p)]\Big|_{p=-2} = 3p|_{p=-2} = -6 \\ B_1 = \dfrac{1}{1!}\dfrac{\mathrm{d}^1}{\mathrm{d}p^1}[(p+2)^2 S(p)]\Big|_{p=-2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}3p\Big|_{p=-2} = 3 \end{cases}$$

$$S(p) = -\frac{6}{(p+2)^2} + \frac{3}{(p+2)} \Rightarrow s(t) = (-6te^{-2t} + 3e^{-2t})u(t)$$

2) Fraction rationnelle quelconque

Dans le cas le plus général, il se peut que l'on ait non seulement des pôles multiples, mais également le degré du polynôme $D(p)$ inférieur à celui du polynôme $N(p)$. Dans ce cas on doit procéder à la division du polynôme par :

$$S(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{Q(p)D(p)+R(p)}{D(p)} = Q(p) + \frac{R(p)}{D(p)} \quad (2.27)$$

La TL inverse de $\frac{R(p)}{D(p)}$ se fait comme précédemment et la TL inverse de $Q(p)$ donne pour :

$$Q(p) = q_0 + q_1 p + \cdots + q_k p^k; q(t) = q_0\delta(t) + q_1\delta'(t) + \cdots + q_k\delta^{k-1}(t) \quad (2.28)$$

Exemple :

$$S(p) = \frac{p^3+3p^2+4p+3}{p^2+2p+1} = p + 1 + \frac{p+2}{(p+1)^2}$$

$$S(p) = p + 1 + \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p+1}$$

$\delta(t) \overset{TL}{\rightarrow} 1$, si on applique la propriété de la dérivation : $\frac{dx(t)}{dt} \overset{TL}{\rightarrow} pX(p) - x(0)$

On obtient alors $\delta'(t) \overset{TL}{\rightarrow} p.1 - 0 = p$

Ce qui nous donne : $s(t) = \delta'(t) + \delta(t) + (t\,e^{-t} + e^{-t})u(t)$