CHAPITRE 3 : FONCTION DE TRANSFERT ET SCHEMAS FONCTIONNELS

3.1 Notion de fonction de transfert

La transformée de Laplace du produit de convolution (domaine temporel) de deux variables est égale au produit des transformées de Laplace (domaine Laplace) de ces variables. Cette propriété permet la définition des fonctions de transfert des systèmes linéaires.

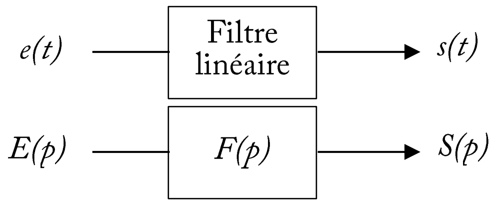


Fig 3.1 Transmission d'un signal à travers un filtre linéaire.

Considérons un système linéaire ayant une entrée *e(t)* et une sortie *s(t)*. On suppose qu'il est régi par une équation différentielle de degré *n* :

$$b_0 s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + \cdots + b_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = a_0 e(t) + a_1 \frac{de(t)}{dt} + \cdots + a_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} \qquad (3.1)$$

Si on applique la transformation de Laplace aux deux membres de cette équation, tout en admettant que les conditions initiales sont nulles, on aura :

$$b_0 S(p) + b_1\big(pS(p) - s(0)\big) + b_2\left(p^2 S(p) - ps(0) - \frac{ds(0)}{dt}\right) + \cdots . =$$
$$a_0 E(p) + a_1\big(pE(p) - e(0)\big) + a_2\left(p^2 E(p) - pe(0) - \frac{de(0)}{dt}\right) + \cdots \qquad (3.2)$$

Ce qui peut être écrit sous la forme :

$$(b_0 + b_1 p + b_0 p^2 + \cdots + b_n p^n) S(p) = (a_0 + a_1 p + a_0 p^2 + \cdots + a_m p^m) E(p) \qquad (3.3)$$

D'où :

$$\frac{a_0 + a_1 p + a_0 p^2 + \cdots + a_m p^m}{b_0 + b_1 p + b_0 p^2 + \cdots + b_n p^n} = \frac{S(p)}{E(p)} \qquad (3.4)$$

Cette fraction rationnelle de deux polynômes de la variable complexe *p* est appelée fonction de transfert du système et généralement notée :

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \qquad (3.4)$$

Comme cette fonction est une fraction rationnelle de deux polynômes en *p*, il est possible de factoriser ces deux polynômes dans le corps des complexes. On obtient :

$$F(p) = \frac{a_m (p - z_m)(p - z_{m-1}) \ldots (p - z_1)}{b_n (p - p_n)(p - p_{n-1}) \ldots (p - p_1)} \qquad (3.5)$$

- Les racines z_i qui annulent le numérateur sont appelés les zéros de la fonction de transfert.
- Les racines p_i qui annulent son dénominateur sont les pôles de la fonction de transfert.

Exemple :

Soit le circuit suivant :

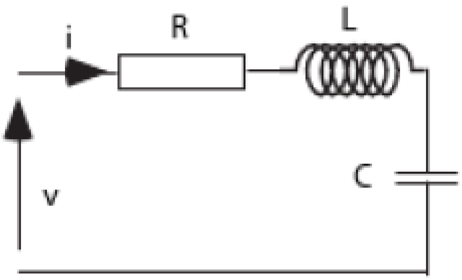


Fig 3.2 Circuit RLC.

$$v(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)$$

Si on considère que le courant passant dans le circuit comme une sortie du système et en applique la TL on aura :

$$V(p) = RI(p) + LpI(p) + \frac{1}{Cp}I(p) \Longrightarrow \frac{V(p)}{I(p)} = R + Lp + \frac{1}{Cp}$$

Alors la fonction de transfert du circuit sera égale à :

$$F(p) = \frac{I(p)}{V(p)} = \frac{Cp}{LCp^2 + RCp + 1}$$

F(p) est la fonction de transfert et réponse impulsionnelle.

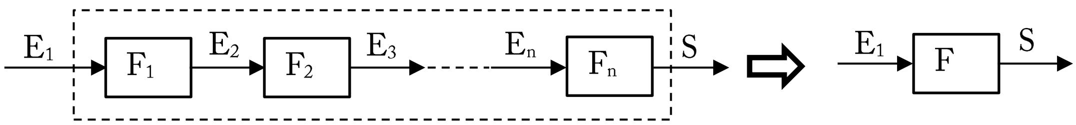
Remarque : Un système ayant pour fonction de transfert *F(p)* a pour réponse impulsionnelle la fonction : $s(t) = L^{-1}[F(p)]$

3.2 Schémas fonctionnels

La représentation schéma fonctionnel (schéma bloc) permet de représenter de manière graphique un système linéaire dynamique, dont la fonction de transfert est *F(p)*. Où, le système d'équations est remplacé par un ensemble de blocs illustrant les fonctions de transfert du système. Les branches sont les variables globales du système.

3.2.1 Eléments en série (cascade)

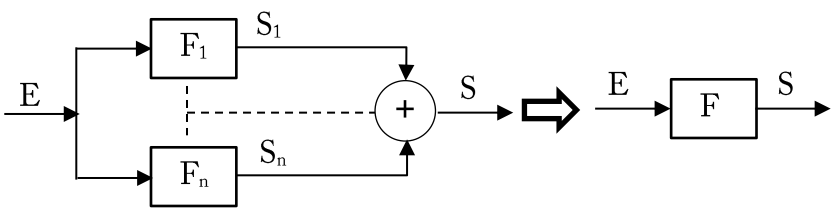
Considérons les fonctions de transferts de *n* éléments en série $F_1(p), F_2(p), \ldots, F_n(p)$:



$$F(p) = \frac{S(p)}{E_1(p)} = F_1(p)F_2(p) \ldots F_n(p) \tag{3.6}$$

3.2.2 Eléments en parallèle

Considérons maintenant *n* éléments de fonction de transfert $F_1(p), F_2(p), \ldots, F_n(p)$ mis en parallèle.



S(p) représente le résultat de la superposition des *n* sorties des *n* éléments :

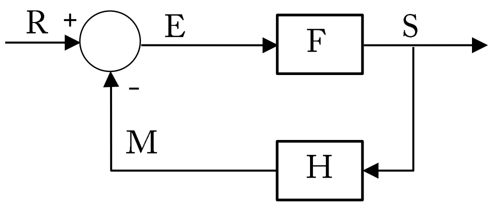
$$S(p) = S_1(p) + S_2(p) + \cdots + S_n(p)$$
$$S(p) = \sum_{i=1}^{n} S_i(p) = F_1(p)E(p) + F_2(p)E(p) + \cdots + F_n(p)E(p) \quad (3.7)$$
$$S(p) = [F_1(p) + F_2(p) + \cdots + F_n(p)]E(p)$$

La fonction de transfert équivalente S(p) est donnée par :

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = F_1(p) + F_2(p) + \cdots + F_n(p) \quad (3.8)$$

3.2.3 Fonction de transfert en boucle fermée

Soit un système représenté par le schéma fonctionnel ci-dessous :



- F(p) : fonction de transfert de la chaine directe,
- H(p) : fonction de transfert de la chaine de retour.

La fonction de transfert du système globale G(p), Fonction de Transfert en Boucle Fermée (F.T.B.F) est donnée par la relation suivante :

$$G(p) = \frac{S(p)}{R(p)} \quad (3.9)$$

Nous avons les relations suivantes :

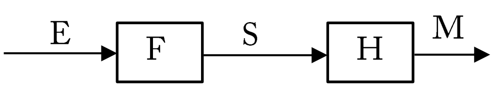
$$S(p) = F(p)E(p) \quad (3.10)$$

$$E(p) = R(p) - M(p) = R(p) - H(p)S(p)$$
$$S(p) = F(p)[R(p) - H(p)S(p)]$$
$$S(p)[1 + F(p)H(p)] = F(p)R(p)$$

$$\boxed{G(p) = \frac{S(p)}{R(p)} = \frac{F(p)}{1+F(p)H(p)} = F.T.B.F \text{ (Formule de Black)}}$$

3.2.4 Fonction de transfert en boucle ouverte

On supprime la chaine de retour après *H(s)* :

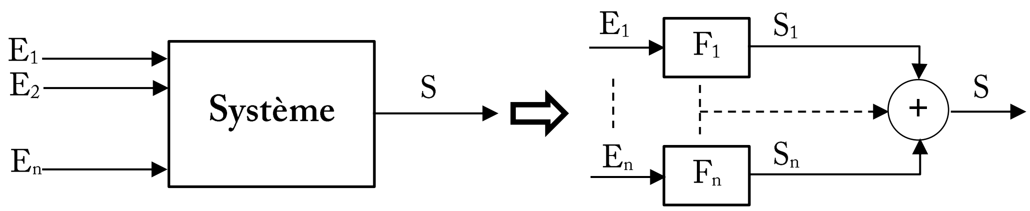


La fonction de transfert en boucle ouverte F.T.B.O. est le produit de la fonction de transfert de la chaine directe par la fonction de transfert de la chaine de retour.

$$\boxed{T(p) = F(p)H(p) = F.T.B.O.} \quad (3.11)$$

3.2.5 Système à *n* entrées

Considérons un système à *n* entrées et une sortie



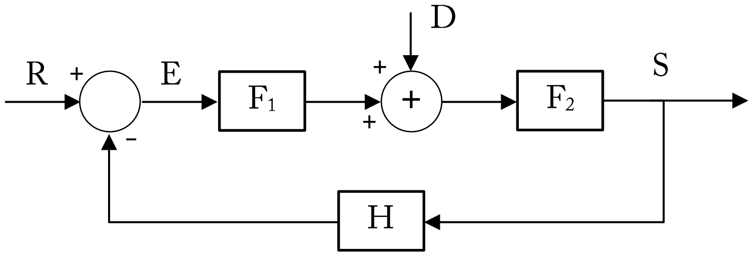
Vu que la fonction de transfert peut être exprimée uniquement entre une sortie et une entrée. Alors, le système sera donc décomposer en *n* éléments ayant une sortie commune et comme entrée chacune des *n* entrées. On calculera les fonctions de transfert $F_i(p)$ de chaque élément $E_i(p)$ en supposant que les autres entrées sont nulles.

$$S(p) = \sum_i \; F_i(p)E_i(p) \tag{3.12}$$

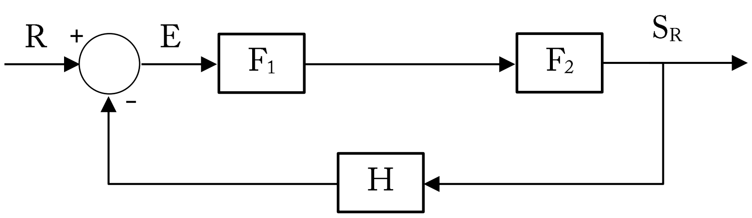
Remarque : Il n'y a pas de fonction de transfert globale pour le système.

- *Exemple d'un système à 2 entrées*

Considérons un système linéaire à deux entrées *R* et *D* suivant :



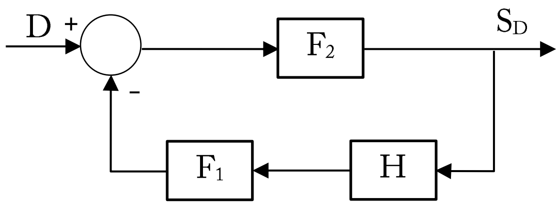
La réponse à l'entrée référence *R(p)* peut être obtenue en supposant *D(p)=0*. Le schéma fonctionnel résultant est représenté ci-dessous.



$S_R(p)$: sortie du système lorsque R(p) seule.

$$S_R(p) = \frac{F_1(p)F_2(p)}{1+F_1(p)F_2(p)H(p)} R(p) \tag{3.13}$$

Aussi, la réponse à l'entrée *D(p)* est obtenue en admettant *R(p)=0*. Le schéma fonctionnel correspondant est le suivant.



$S_D(p)$: sortie du système lorsque $D(p)$ seule.

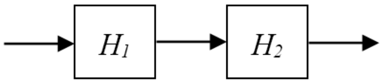
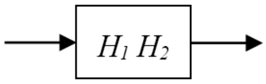
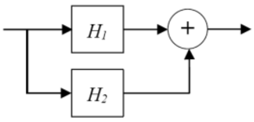
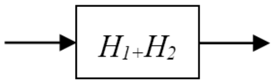
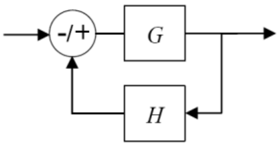
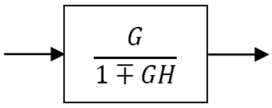
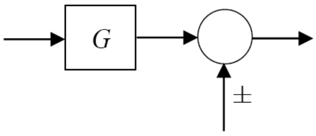
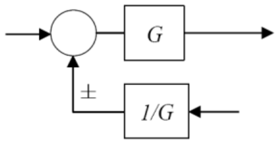
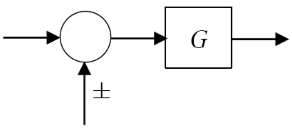
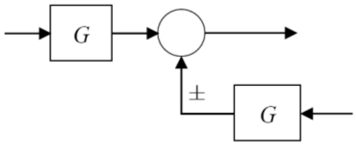
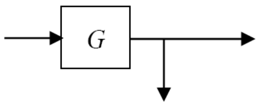
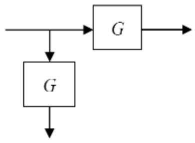
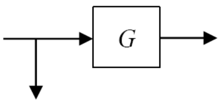
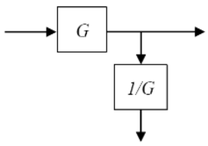
$$S_D(p) = \frac{F_2(p)}{1+F_1(p)F_2(p)H(p)} D(p) \tag{3.14}$$

La réponse à l'application des deux entrées $R(p)$ et $D(p)$ est obtenue en ajoutant les deux réponses individuelles :

$$S(p) = S_D(p) + S_R(p) = \frac{F_2(p)}{1+F_1(p)F_2(p)H(p)} D(p) + \frac{F_1(p)F_2(p)}{1+F_1(p)F_2(p)H(p)} R(p)$$

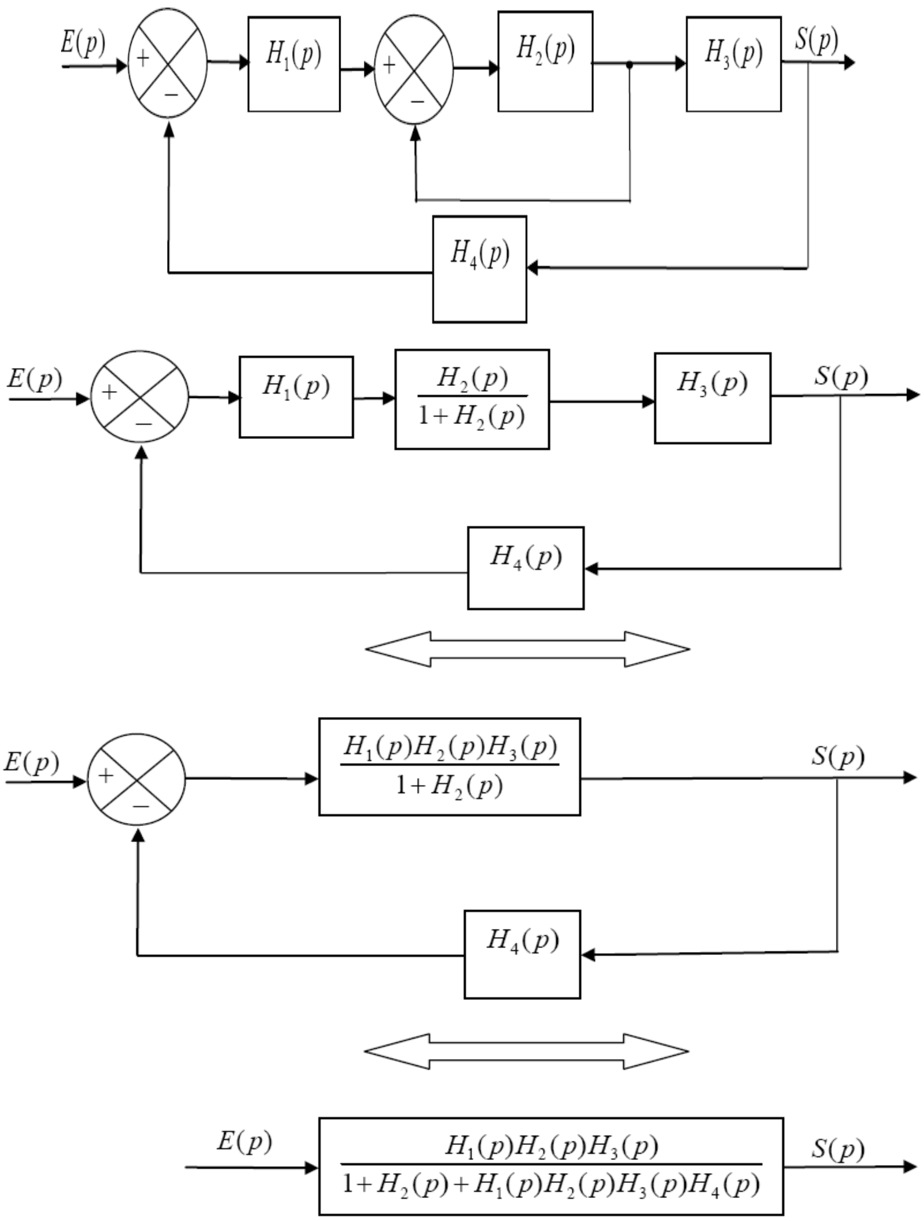
$$= \frac{F_2(p)}{1+F_1(p)F_2(p)H(p)} [D(p) + F_1(p)R(p)] \tag{3.15}$$

3.3 Transformation des schémas fonctionnels

Règle	Schéma fonctionnel	Schéma fonctionnel équivalent
Association des éléments en cascade		
Association des éléments en parallèle		
Association de éléments avec contre réaction		
Déplacement d'un comparateur à l'amont d'un élément		
Déplacement d'un comparateur à l'aval d'un élément		
Déplacement d'un point de dérivation à l'amont d'un élément		
Déplacement d'un point de dérivation à l'aval d'un élément		

Exemple :

Simplifier le schéma fonctionnel suivant en déduisant sa fonction de transfert.



La fonction de transfert est donc:

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1 + H_2(p) + H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)}$$