CHAPITRE 4 : REPONSES TEMPORELLES DES SYSTEMES LINEAIRES

4.1 Introduction

La réponse temporelle d'un système est formée de deux parties : *la réponse transitoire* et *le régime permanent*. La réponse transitoire représente la réaction d'un système lorsqu'on lui applique un signal d'entrée alors qu'il était au repos (ou lorsque le signal d'entrée est modifié). Cette réponse va décroître lorsque le temps augmente. Le régime permanent est atteint lorsque l'effet transitoire se termine.

Par exemple : On observe le courant dans l'inductance du circuit composé d'une résistance placée en série avec un interrupteur et une bobine. Si l'interrupteur est ouvert, le courant est nul. Si l'interrupteur est fermé, le courant va monter progressivement dans l'inductance jusqu'à se stabiliser sur une valeur finale. Cette valeur finale constitue le régime permanent alors que la « montée en courant » indique le régime transitoire.

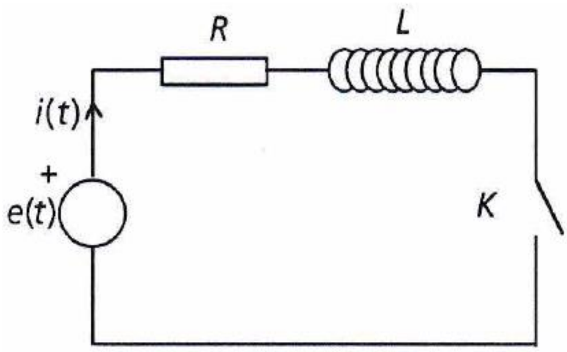

Figure 4.1 Circuit RL avec interrupteur.

4.2 Signaux test

On distingue deux familles de signaux d'entrée. Les signaux dits sinusoïdaux (par exemple, $A \sin \omega t$, $A \sin(\omega t + \varphi)$, $Ae^{j\omega t}$… Ceux-ci sont employés lorsqu'on souhaite faire une analyse fréquentielle du système étudié et les signaux polynomiaux utilisés pour analyser certaines caractéristiques temporelles. Un signal polynomiale à la forme suivante:

$$u(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_n t^n \qquad pour\ t \geq 0 \tag{4.1}$$

On distingue les cas particuliers suivants :

- $u(t) = \alpha_0 \quad pour\ t \geq 0$ échelon[1] causal d'amplitude α_0.
- $u(t) = \alpha_1 t \quad pour\ t \geq 0$ rampe causale de pente α_1.
- $u(t) = \alpha_2 t^2 \quad pour\ t \geq 0$ parabole causale.

[1] Un échelon unité est un échelon d'amplitude égale à 1

Avec *la réponse impulsionnelle* (réponse d'un système à une impulsion de Dirac), nous pouvions caractériser le fonctionnement entrée/sortie d'un système. Et puisque physiquement, il est difficile de générer une impulsion de Dirac, nous utiliserons donc comme entrée de référence un signal de type échelon ($e(t)=1 \quad \forall t \geq 0$). La réponse d'un système à un échelon est appelée *réponse indicielle*.

$$s(t) = \int h(\tau)\, d\tau \qquad (4.2)$$

La réponse indicielle est l'intégrale de la réponse impulsionnelle.

4.3 Données caractéristiques de la réponse indicielle

La réponse indicielle permet la caractérisation complète du régime transitoire. Prenons l'exemple d'un circuit RLC suivant, alimenté en tension et pour lequel nous observons la tension aux bornes du condensateur C.

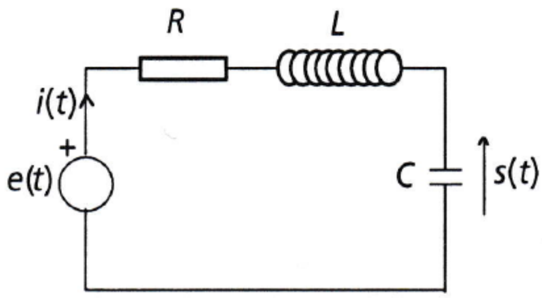

Figure 4.2 Circuit RLC.

En appliquant un échelon de tension sur l'entrée *e(t)*, on peut observer une sortie *s(t)* qui ressemble à celle illustrée sur la figure 4.3.

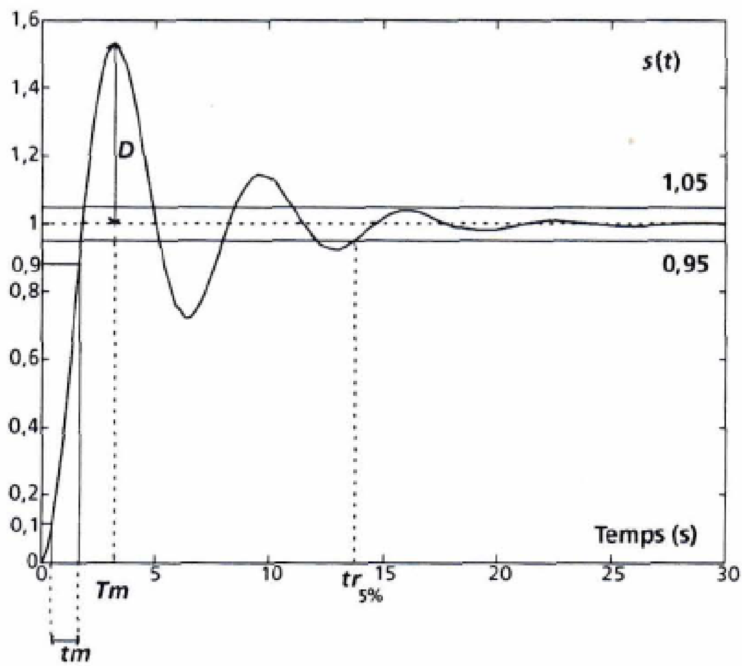

Figure 4.3 Caractéristiques de la réponse indicielle.

Ce tracé nous permet de définir la plupart des termes employés pour caractériser les performances temporelles d'un système.

– ***Dépassement (D ou D %)***

Si s_{max} est la valeur maximale prise par $s(t)$ et si s_{fin} est la valeur finale (atteinte en régime permanent), on définit le dépassement maximal (si $s_{max} > s_{fin}$,) par :

$$D = s_{max} - s_{fin} \tag{4.3}$$

Et le dépassement relatif comme un pourcentage de la valeur finale :

$$D\% = \frac{s_{max} - s_{fin}}{s_{fin}} \times 100 \tag{4.4}$$

– ***Temps du premier maximum (T_m)***

T_m est le temps pour atteindre le premier maximum.

– ***Temps de montée (t_m)***

Le temps de montée t_m est le temps nécessaire au système pour que sa sortie passe de 10% à 90% de sa valeur finale s_{fin}.

– ***Temps d'établissement à x % (t_{rx} %)***

Le temps d'établissement à x % (ou temps de réponse à x %) est le temps nécessaire pour que la réponse indicielle sera dans l'intervalle ± x % autour de la valeur finale s_{fin}. On peut le définir comme étant le temps à partir duquel :

$$\left|s(t) - s_{fin}\right| \leq x\% \times s_{fin} \tag{4.5}$$

Elle prend généralement les valeurs 10 % ou 5 %.

Les cas les plus typiques en automatique sont les réponses indicielles et impulsionnelles d'un système du 1er ordre et d'un système du 2nd ordre. Ces deux cas, en plus de la propriété de linéarité, nous permettent de traiter tous les cas d'ordre supérieur en décomposant en éléments simples la réponse impulsionnelle (exprimée dans le domaine de Laplace).

Exemple : considérons la fonction de transfert d'un système du 3ème ordre suivante :

$$H(p) = \frac{K}{(p-p_1)(p-p_2)(p-\overline{p_2})} \tag{4.6}$$

On considère que le dénominateur a une racine réelle et simple p_1 et deux racines complexes conjuguées$\begin{cases} p_2 \\ \overline{p_2} \end{cases}$. La décomposition en éléments simples donne :

$$H(p) = \frac{A}{(p-p_1)} + \frac{Bp+C}{(p-p_2)(p-\overline{p_2})} \tag{4.7}$$

L'expression indicielle de la sortie en réponse à un échelon est :

$$S(p) = \frac{A}{p(p-p_1)} + \frac{Bp+C}{p(p-p_2)(p-\overline{p_2})} = S_1(p) + S_2(p) \tag{4.8}$$

Au domaine temporel on va avoir :

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) \tag{4.9}$$

On voit donc que l'on peut écrire toute sortie d'un système dont l'ordre est supérieur à 2 comme une somme $\sum_{i=1}^{n} S_i(p)$ où chacun des $S_i(p)$ est la réponse d'un système dont la fonction de transfert est au maximum d'ordre 2.

4.4 Systèmes du 1er ordre

Définition : un système du 1er ordre est tout système dont la fonction de transfert peut se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{K}{1+\tau P} \tag{4.10}$$

où K et τ (des réels positifs) sont respectivement le gain statique et la constante de temps du système. D'une manière générale, un système du premier ordre est tout système régit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre.

$$b_1 \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + b_0 s(t) = a_0 e(t) \Leftrightarrow \tau \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + s(t) = Ke(t) \tag{4.11}$$

$\tau = \frac{b_1}{b_0}$: constante de temps

$K = \frac{a_0}{b_0}$: gain statique

Exemples d'un circuit électrique du 1er ordre :

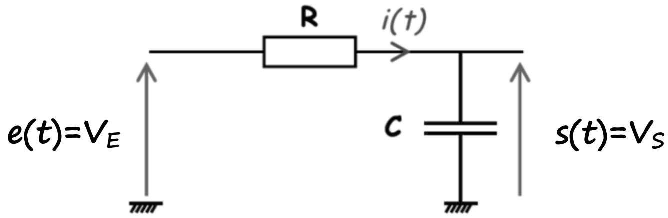

Figure 4.4 Circuit RC.

Les équations électriques du système sont :

$$V_E = Ri + V_S \quad \text{et} \quad V_S = \frac{1}{C}\int i(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{dV_S}{dt} = \frac{1}{C} i(t) \tag{4.12}$$

$$i = C\frac{\mathrm{d}V_S}{\mathrm{d}t} \tag{4.13}$$

L'équation différentielle du premier ordre liant la sortie et l'entrée du système est :

$$V_E = RC\frac{\mathrm{d}V_S}{\mathrm{d}t} + V_S \tag{4.14}$$

La forme générale de l'équation différentielle d'un système du 1er ordre d'entrée *e* et de sortie *s* est :

$$\tau \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + s(t) = Ke(t) \tag{4.15}$$

En appliquant la TL à l'équation (4.15) on obtient :

$$\tau\big(pS(p) - s(o)\big) + S(p) = KE(p)$$

$$S(p) = \frac{K}{1+\tau p}E(p) + \frac{\tau}{1+\tau p}s(0)$$

On remarque que $S(p)$ dépend aussi de la valeur de la condition initiale $s(0)$. Si on considère $s(0) = 0$, l'expression de la fonction de transfert $H(p)$ sera:

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+\tau p} \tag{4.16}$$

4.4.1 Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un système est la réponse à une entrée impulsion de Dirac $e(t) = \delta(t)$ qui est égale à : $L[\delta(t)] = 1$

$$E(p) = 1 \qquad (4.17)$$

$$S(p) = F(p) = \frac{K}{1+\tau p} \qquad (4.18)$$

On calcule facilement *s(t)* à partir de la table des TL comme suit : $s(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$

$\lim_{t \to 0} s(t) = \frac{K}{\tau}$

$\lim_{t \to \infty} s(t) = 0$

Droite de la tangente à x_0 :

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

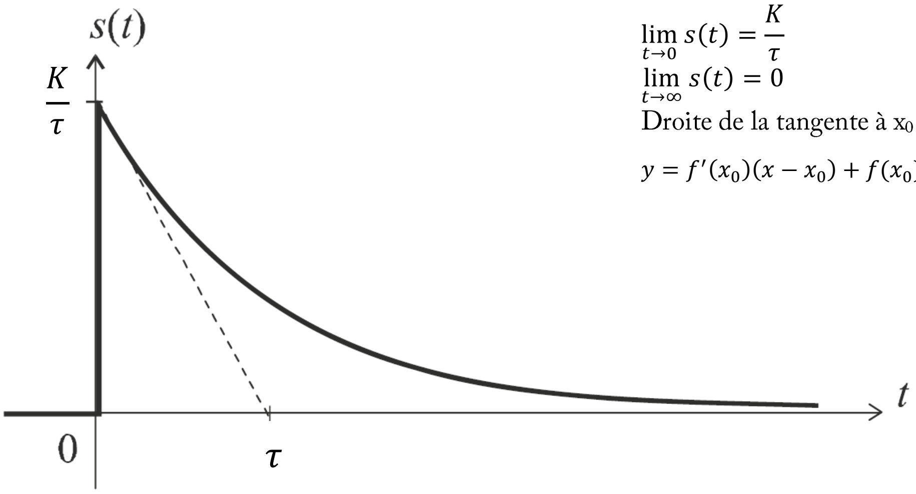

Figure 4.5 Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre.

La constante de temps du système est la tangente à l'origine qui coupe l'asymptote (ici, l'axe des abscisses) au point $t = \tau$.

4.4.2 Réponse indicielle

On appelle réponse indicielle, la réponse à une entrée de type échelon unitaire *e(t) = 1* $\forall t \geq 0$. On a donc :

$$E(p) = \frac{1}{p} \qquad (4.19)$$

D'où :

$$S(p) = F(p).\frac{1}{p} = \frac{K}{p(1+\tau p)} = K(\frac{A}{p} + \frac{B}{1+\tau p}) \qquad (4.20)$$

Par identification on trouve : *A=1* et *B=-τ* alors

$$S(p) = K(\frac{1}{p} + \frac{-\tau}{1+\tau p}) = K(\frac{1}{p} - \frac{1}{\frac{1}{\tau}+p})$$

on calcule alors *s(t)*:

$$s(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad (4.21)$$

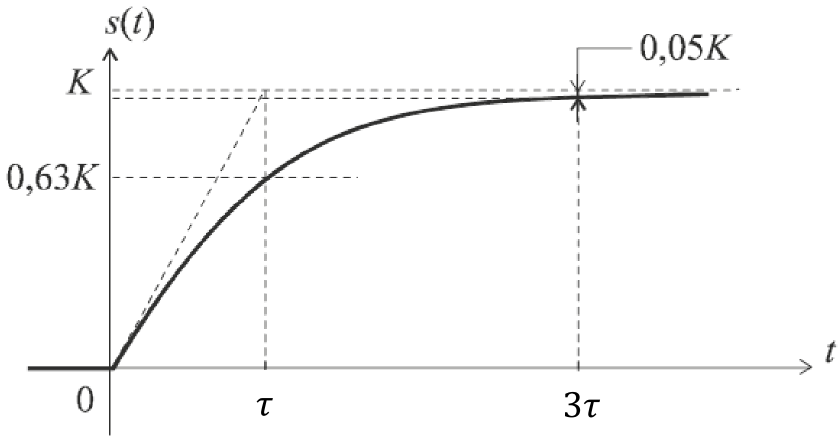

Figure 4.6 Réponse indicielle d'un système du premier ordre.

À partir de la figure précédente, on peut définir le temps de réponse t_r (temps d'établissement) du système, qui est le temps où la sortie va atteindre sa valeur asymptotique (ou valeur à l'infini) à 5 % près, qui est de l'ordre de 3τ.

On a : $s(t_r) = K\left(1 - e^{-\frac{t_r}{\tau}}\right) = 0.95K$

D'où : $\left(1 - e^{-\frac{t_r}{\tau}}\right) = 0.95$

Soit : $e^{-\frac{t_r}{\tau}} = 0.05$

Et finalement : $t_r = -\tau \ln 0.05 \approx 3\tau$

Par ailleurs : $s(\tau) = K(1 - e^{-1}) \approx 0.63K$

4.4.3 Réponse à une entrée en rampe

On va examiner ici, la réponse du système à une rampe unitaire $e(t) = t \quad \forall t \geq 0$. On a donc :

$E(p) = \frac{1}{p^2}$ D'où : $S(p) = F(p)E(p) = F(p).\frac{1}{p^2} = \frac{K}{p^2(1+\tau p)}$

à partir de la table des TL on a : $TL[\frac{1}{p^2(p+a)}] = \frac{1}{a^2}[at - 1 + e^{-at}]$

D'où la réponse dans le domaine temporel est :

$$s(t) = TL[S(p)] = K\left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{4.22}$$

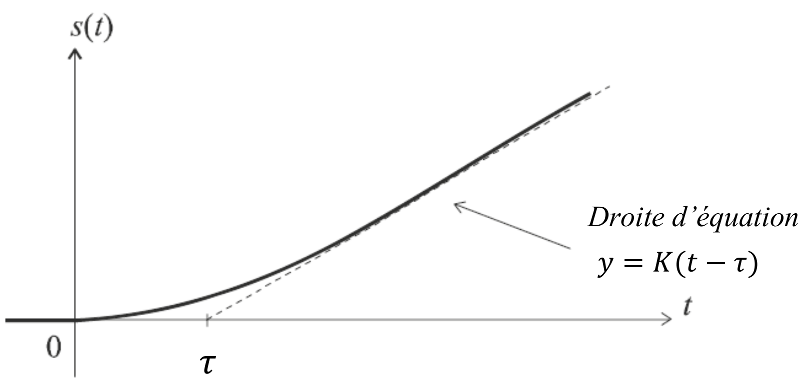

Figure 4.7 Réponse d'un système du premier ordre à une entrée en rampe.

4.5 Systèmes du 2ème ordre

Les systèmes du second ordre sont régis par des équations différentielles du second degré, leur équation typique est la suivante:

$$\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{2\xi}{\omega_n}\frac{ds}{dt}+s(t)=Ke(t) \qquad (4.23)$$

Les trois constantes ω_n, ξ (ksi) et K sont des nombres réels en général positifs.

ω_n(rd/s) est la pulsation propre du système ;

ξ est le coefficient ou facteur d'amortissement ;

K est le gain statique du système.

La fonction de transfert du système se déduit de l'équation différentielle en appliquant la TL aux deux membres, pour des conditions initiales supposées nulles (*s(0)=0; s'(0)=0*) on a :

$$\frac{p^2}{\omega_n^2}S(p)+\frac{2\xi p}{\omega_n}S(p)+S(p)=KE(p) \qquad (4.24)$$

Soit :

$$F(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2}+\frac{2\xi p}{\omega_n}+1} \qquad (4.25)$$

4.5.1 Réponse indicielle

On étudie la réponse du système à un échelon unitaire *e(t)=u(t)*. On a donc :

$$E(p)=\frac{1}{p}$$

Soit :

$$S(p)=\frac{F(p)}{p}=\frac{K}{p(\frac{p^2}{\omega_n^2}+\frac{2\xi p}{\omega_n}+1)}=\frac{K\omega_n^2}{p(p^2+2\xi\omega_n p+\omega_n^2)} \qquad (4.26)$$

Pour calculer l'expression de *s(t)*, il suffit de calculer la transformée de Laplace inverse. Trois cas sont à considérer selon le signe du discriminant du polynôme du dénominateur.

On a : $\Delta=b^2-4ac=\frac{4\xi^2}{{\omega_n}^2}-\frac{4}{{\omega_n}^2}=\frac{4}{{\omega_n}^2}(\xi^2-1)$ (4.27)

a) Discriminant positif (Régime amorti)

On a : $\Delta>0 \Leftrightarrow \xi>1$ $\qquad H(p)=\frac{K\omega_n^2}{(p-p_1)(p-p_2)}$ (4.28)

Dans ce cas, on a : $p_{1,2}=-\omega_n(\xi\pm\sqrt{\xi^2-1})$

$$\Rightarrow S(p)=\frac{K\omega_n^2}{p(p-p_1)(p-p_2)}=K\omega_n^2\left[\frac{A}{p}+\frac{B}{p-p_1}+\frac{C}{p-p_2}\right] \qquad (4.29)$$

Avec : $A=\frac{1}{p_1p_2}$; $B=\frac{1}{p_1(p_1-p_2)}$; $C=\frac{1}{p_2(p_2-p_1)}$

$$s(t)=\frac{K\omega_n^2}{p_1p_2}\left[1+\frac{p_2}{p_1-p_2}e^{p_1t}+\frac{p_1}{p_2-p_1}e^{p_2t}\right] \qquad (4.30)$$

$$s(t)=K\left[1-\frac{\xi+\sqrt{\xi^2-1}}{2\sqrt{\xi^2-1}}e^{-\omega_n\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)t}-\frac{\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)}{2\sqrt{\xi^2-1}}e^{-\omega_n\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)t}\right] \qquad (4.31)$$

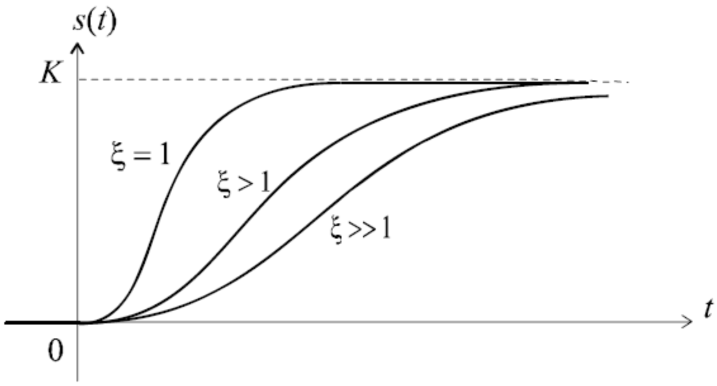

Figure 4.8 Réponse indicielle d'un système du 2nd ordre à coefficient d'amortissement supérieur ou égale à 1.

Remarque : la réponse la plus rapide est celle avec un facteur d'amortissement très proche de 1.

b) Discriminant nul (Régime critique)

On a : $\Delta = 0 \Leftrightarrow \xi = 1$ $\qquad\qquad p_1 = p_2 = \frac{-b}{2a} = -\frac{\xi}{\omega_n}$

La réponse a pour expression :

$$s(t) = Ku(t) - k(1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t} \tag{4.32}$$

Dans ce cas nous obtenons une réponse qui tend très rapidement vers l'asymptote sans oscillations. (voir figure précédente).

c) Discriminant négatif (Régime oscillatoire amorti)

On a : $\Delta < 0 \Leftrightarrow 0 < \xi < 1$

On obtient cette fois-ci : $p_{1,2} = -\omega_n(\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2})$

$$s(t) = Ku(t) - Ke^{-\xi\omega_n t}\,[\cos \omega_n \sqrt{1-\xi^2}t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_n \sqrt{1-\xi^2}\ t \tag{4.33}$$

Dans ce cas, la réponse du système est constituée de la différence de deux signaux : le signal *Ku(t)*, échelon de hauteur *K* et un signal sinusoïdal encadré par une enveloppe en exponentielle décroissante, qui tend vers 0 en oscillant.

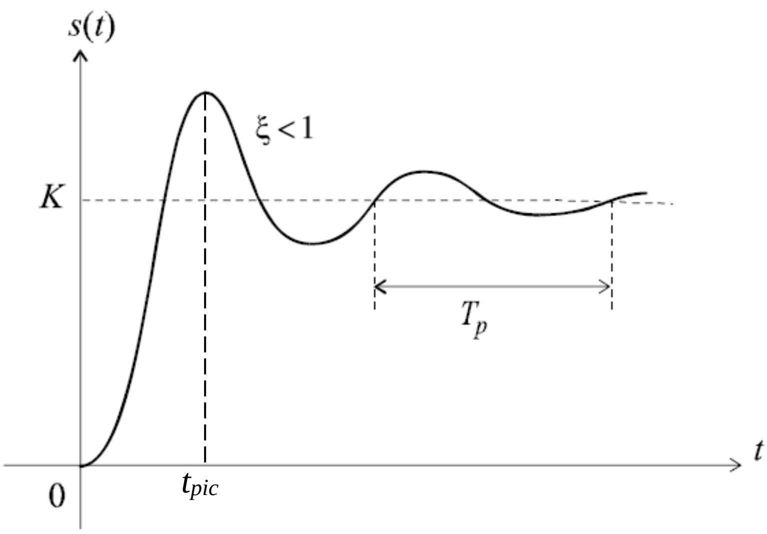

Figure 4.9 Réponse indicielle d'un système du second ordre à coefficient d'amortissement inférieur à 1.

Dans le cas du régime oscillatoire amorti, la pulsation du signal sinusoïdal enveloppé par l'exponentielle décroissante a pour expression :

$$\omega_p = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Elle est appelée pseudo-pulsation du régime oscillatoire amortie. Elle est toujours inférieure à la pulsation ω_n.

Où la pseudo-période de ces oscillations est :

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

Cette pseudo-période est égale à l'intervalle de temps correspondant à une alternance complète de la sinusoïde amortie (voir figure 4.9).

Le temps de pic ou le temps du 1^er^ maximum est égale à : $t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$

Exemple :

Soit la fonction de transfert suivante : $\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{4}{p^2+2}$

1- Déterminer ξ, ω_n et K
2- Représenter la réponse indicielle *s(t)* du signal $\begin{cases} u(t) = 0 & si\ t < 0 \\ u(t) = E_0 & si\ t \geq 0 \end{cases}$

Réponse :

ξ=0 ;

$\omega_n = \sqrt{2}$ rd/s

$K = 2$

$S(p) = \frac{E_0}{p}\frac{4}{p^2+2}$ à partir de la table des TL on a : $TL[\frac{\omega_n^2}{p(p^2+\omega_n^2)}] = 1-\cos(\omega_n t)$

D'où : $s(t) = 2E_0(1-cos\sqrt{2}\, t)$