CHAPITRE 5 : ANALYSE DES SYSTEMES ASSERVIS

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va examiner les méthodes d'analyse d'un système automatique, c'est-à-dire étudier ses performances intrinsèques à travers deux notions :

- la notion de **stabilité**,
- la notion de **précision**.

Lorsque ces performances intrinsèques ne sont pas suffisantes, on fait recours à un organe extérieur, nommé *correcteur*, dont l'élaboration constitue la synthèse du système asservi.

Exemple : considérons la régulation d'un système de chauffage d'une maison où la valeur de consigne est égale à 25°C.

- Plus la température réelle sera proche de la consigne, plus le système sera ***précis***.
- Plus la valeur de consigne est atteinte rapidement en sortie du système, plus le dispositif est *rapide* (régime transitoire le plus court possible).
- La température finale de 25°C est atteinte après un régime transitoire où la température passe par un pic à 29°C (*dépassement*).

Donc, il nous faudra apprendre à prévoir et à corriger ces trois performances importantes pour qu'elles puissent satisfaire un cahier des charges imposé.

5.2 Le problème de la stabilité

Le problème de la stabilité est un problème général de la commande des systèmes qui pose la question suivante : Est-ce que le signal de sortie du système automatique converge réellement vers une valeur finie, diverge ou bien il oscille ?

Un système bouclé est stable si et seulement si sa sortie (grandeur physique réelle à réguler) reste bornée lorsque l'on injecte un signal borné à son entrée. D'une manière plus générale, aucun signal dans la boucle de régulation, ne doit osciller ou tendre vers l'infini.

Exemple du système 1^er^ ordre :

1- La fonction de transfert d'un circuit RL est donnée par: $H(p) = \frac{1/R}{1+L/R\,p}$, qui a comme réponse impulsionnelle $V_s(t) = \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$

A partir de la forme de la réponse impulsionnelle on peut déduire que le système est stable.

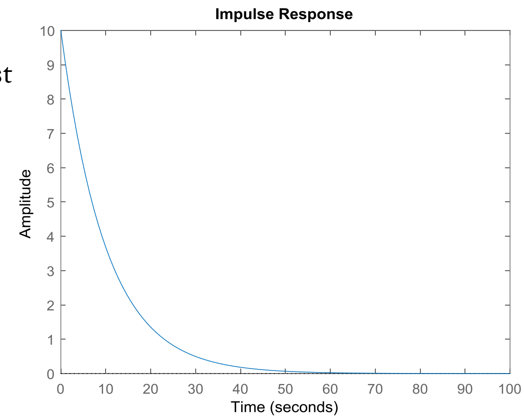


Figure 5.1 : Réponse impulsionnelle d'un circuit RL.

2- Considérons la fonction de transfert $H_1(p) = \frac{1}{p-3}$ où la réponse impulsionnelle est égale à $s(t) = e^{3t}$

La courbe tends vers l'infini lorsque t tends vers l'infini, ce qui caractérise la courbe de réponse d'un système instable.

Remarque : à partir des deux exemples précédents, on voit que la stabilité d'un système est déterminée par le signe des pôles (-R/L, +3) de la fonction de transfert.

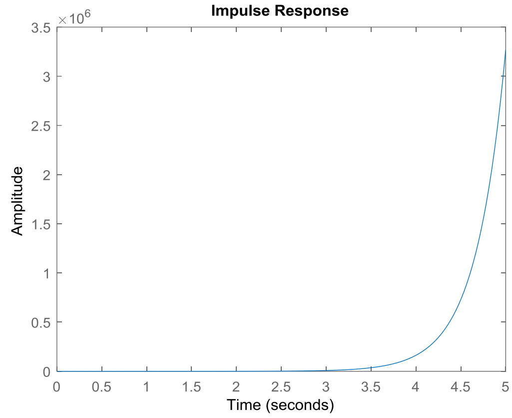


Figure 5.2 : Réponse impulsionnelle de la fonction $H_1(p)$.

Exemple du système du 2nd ordre :

1- Considérons la fonction de transfert du système 2nd ordre suivante : $H_2(p) = \frac{1}{p^2+5p+6}$

(p_1=-2 et p_2=-3), avec sa réponse impulsionnelle : $s(t) = Ae^{-2t} + Be^{-3t}$

Les deux pôles sont à partie réelle négative, donc, il s'agit d'un système stable.

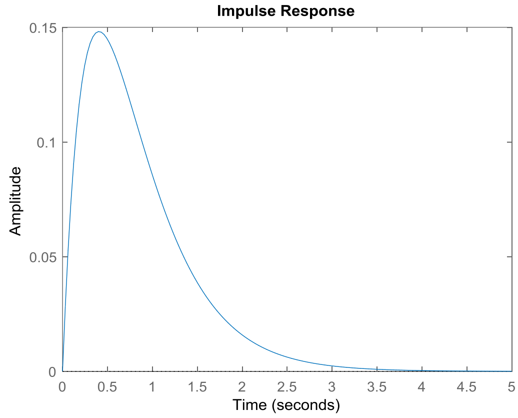


Figure 5.3 : Réponse impulsionnelle de la fonction $H_2(p)$.

2- Considérons la fonction de transfert du système 2nd ordre suivante : $H_3(p) = \frac{1}{p^2+2p+4}$ avec

$(p_1 = -1 - i\sqrt{3}\ et\ p_2 = -1 + i\sqrt{3})$ deux pôles complexes conjugués à partie réelle négative.

La réponse impulsionnelle est égale :

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-t} \sin(\sqrt{3}t)$$

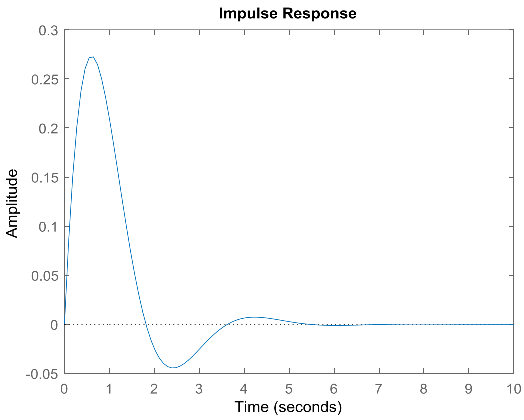


Figure 5.4 : Réponse impulsionnelle de la fonction $H_3(p)$.

L'allure du système tends vers une valeur constante lorsque t tends vers l'infinie, donc le système est stable.

3- $H_4(p) = \frac{1}{p^2+9}$ ayant deux pôles complexes conjugués ($p_1 = -3i$ et $p_2 = +3i$).

Avec une réponse impulsionnelle :

$s(t) = \frac{1}{3}\sin(3t)$.

La partie réelle des pôles est nulle. Le système oscille d'une façon permanente ; cette situation représente la limite entre la stabilité et l'instabilité.

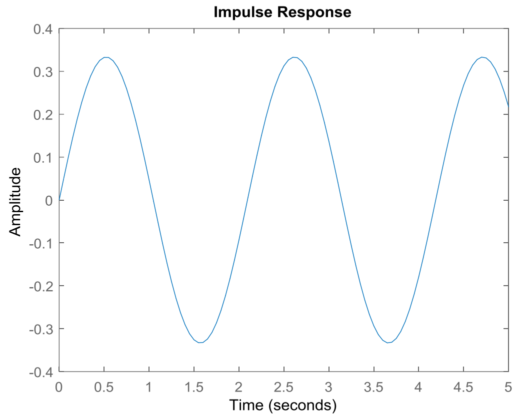


Figure 5.5 : Réponse impulsionnelle de la fonction H_4(p).

5.2.1 Critère de stabilité mathématique

Règle : Un système asservi est stable si et seulement si sa fonction de transfert en boucle fermée ne possède **aucun pôle à partie réelle positive.**

Considérons le schéma général d'un système asservi représenté sur la figure suivante et sa fonction de transfert en boucle fermée est :

$$H(p) = \frac{D(p)}{1+D(p)R(p)} \tag{5.1}$$

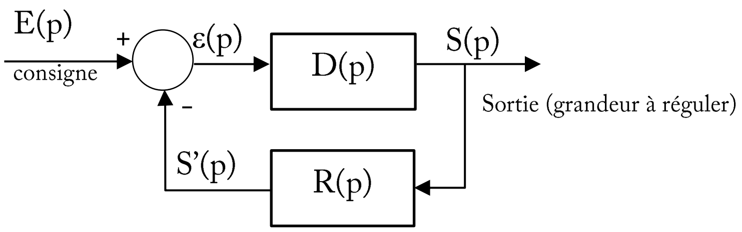


Figure 5.1 Schéma général d'une boucle de régulation.

Si un échelon de consigne unitaire est appliqué à l'entrée du système, on aura :

$$S(p) = \frac{H(p)}{p} = \frac{\alpha \prod_{j=1}^{m}(p-z_j)}{p \prod_{i=1}^{n}(p-p_i)} \tag{5.2}$$

Si on décompose en éléments simples la dernière fraction rationnelle et on sépare les termes correspondant à des pôles réels r_i et ceux correspondant à des pôles complexes $\tau_k + j\omega_k$:

$$S(p) = \frac{a}{p} + \sum_i \frac{b_i}{p-r_i} + \sum_k \frac{b_k}{p-(\tau_k+j\omega_k)} \tag{5.3}$$

L'original de *S(p)* est :

$$s(t) = au(t) + \sum_i b_i e^{r_i t} + \sum_k b_k\, e^{(\tau_k+j\omega_k)t} \tag{5.4}$$

La présence d'un pôle réel positif r_i produit dans le signal de sortie, une exponentielle croissante qui tend vers l'infini lorsque t tend vers l'infini, donc le système n'est pas stable.

Par ailleurs, les termes $b_k\, e^{(\tau_k + j\omega_k)t}$ peuvent s'écrire :

$$b_k\, e^{(\tau_k + j\omega_k)t} = b_k\, e^{\tau_k t} b_k\, e^{j\omega_k t} \tag{5.5}$$

La présence des conjugués va permettre d'écrire l'équation précédente sous la forme :

$$e^{\tau_k t}\,(A_k \cos\omega_k t + B_k \sin\omega_k t) \tag{5.6}$$

La dernière équation converge vers une valeur finie si la partie réelle τ_k est négative. La présence d'un pôle complexe à partie réelle positive entraîne donc l'instabilité du système. En réunissant les deux cas, on peut dire que le système ne peut être stable que si tous ses pôles sont à partie réelle négative.

5.2.2 Critère algébrique de Routh-Hurwitz

Soit *H(p)* la fonction de transfert en boucle fermée et soit *D(p)* le dénominateur de *H(p)*. *D(p)* est un polynôme de degré n :

$$D(p) = a_n\, p^n + a_{n-1}\, p^{n-1} + a_{n-2}\, p^{n-2} + \cdots + a_1\, p + a_0 \tag{5.7}$$

Le critère de Routh s'applique en mettant les coefficients a_i dans un ordre décroissant dans un tableau à deux lignes d'une manière alternative, une ligne sur deux. Ensuite on calcul les éléments de la ligne supplémentaire comme suit :

$$\begin{array}{ccccc} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & a_1 \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & a_0 \\ \frac{a_{n-1}a_{n-2}-a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} & \frac{a_{n-1}a_{n-4}-a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} & \cdots & \frac{a_{n-1}a_1-a_n a_0}{a_{n-1}} & \cdots \end{array} \tag{5.8}$$

On complète ensuite la troisième ligne par des zéros (à droite).

$$\begin{array}{ccccc} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & a_1 \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & b_0 & 0 \end{array} \tag{5.9}$$

On répète le même calcul sur les lignes 2 et 3 pour créer la ligne 4.

$$\begin{array}{ccccc} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & a_1 \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & b_0 & 0 \\ \frac{b_m a_{n-3} - a_{n-1} b_{m-1}}{b_m} = c_k & \frac{b_m a_{n-5} - a_{n-1} b_{m-2}}{b_m} = c_{k-1} & \cdots & & \end{array} \tag{5.10}$$

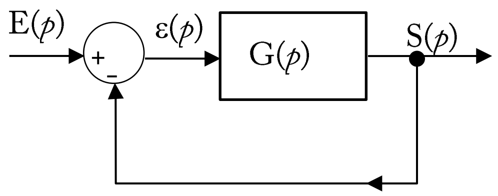
On répète le calcul jusqu'à ce qu'on ait que des zéros « 0 » sur la ligne.

- Le nombre de pôles à partie réelle positive, de la fonction de transfert *H(p)* est égal au nombre de changements de signe dans la première colonne.
- Le système en boucle fermée est stable si tous les coefficients de la première colonne ont le même signe.

Remarque : Le nombre maximal de lignes est égal au nombre de termes dans le polynôme *D(p)*, (l'ordre du système plus 1).

Exemple :

Soit la boucle de régulation à retour unitaire où $G(p) = \frac{A}{p(p^2+p+5)}$.



La fonction de transfert en boucle fermée est égale :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{\frac{A}{p(p^2+p+5)}}{1+\frac{A}{p(p^2+p+5)}} = \frac{A}{p(p^2+p+5)+A}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée *H(p)* est égal :

$$D(p) = p(p^2+p+5)+A = p^3+p^2+5p+A$$

Le critère de Routh est appliqué en remplissant le tableau suivant :

1	5
1	A
5-A	0
A	0

Pour que le système soit stable, il faut qu'il n'y ait aucun changement de signe dans la première colonne, donc 5−A > 0. Le système est donc stable si 0< A < 5.

5.3 Précision d'un système automatique

Soit un système bouclé de fonction de transfert en boucle ouverte *G(p)* et de fonction de transfert en boucle fermée *H(p)*. La précision d'un asservissement, est définie par l'écart ε(t)=e(t)-s(t) qui existe entre la sortie réelle *s(t)* et celle désirée (consigne) e(t). Un système est plus précis lorsque le signal d'erreur ε(t) est plus faible. On distingue deux types d'erreurs :

L'erreur statique : c'est l'erreur en régime permanent définie par : $\varepsilon = \lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t)$.

Pour déterminer cette erreur, on soumet le système à des entrées canoniques de type :

- *Echelon :* on parle d'erreur de position ou erreur indicielle $E(p) = \frac{a}{p}$;
- *Rampe :* on parle d'erreur de vitesse ou de traînage $E(p) = \frac{a}{p^2}$;
- *Accélération :* on parle d'erreur d'accélération $E(p) = \frac{a}{p^3}$.

L'erreur dynamique : c'est l'écart instantané entre la sortie et l'entrée lors de la phase transitoire lorsque on applique une entrée ou après une perturbation.

5.3.1 Erreur de position

On appelle erreur de position (erreur indicielle) du système en boucle fermée, le paramètre ε_p défini par : $\varepsilon_p = \lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t)$ lorsque *e(t) =u(t)*, échelon unitaire

En appliquant le théorème de la valeur finale, on aura:

$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} p[E(p) - S(p)] = \lim_{p \to 0} p[E(p) - H(p)E(p)] \quad (5.11)$$

Vu que l'entrée est un échelon unitaire, on a :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} p\left[\frac{1}{p} - \frac{H(p)}{p}\right] = \lim_{p \to 0}[1 - H(p)] \quad (5.12)$$

L'erreur de position permet d'évaluer la précision d'un système en boucle fermée. Plus ε_p est faible, plus la précision du système est meilleure.

a) Erreur de position d'un système de gain statique *K* en boucle ouverte

Considérons un système avec une fonction de transfert en boucle ouverte *G(p)* placée dans une boucle à retour unitaire, avec :

$$G(p) = \frac{K}{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n} \quad (5.13)$$

C'est un système de gain statique *K*, étant donné que :

$$\lim_{p \to 0} G(p) = K \quad (5.14)$$

La F.T.B.F. est égale à :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{1 + K + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n} \quad (5.15)$$

Par conséquent :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0}[1 - H(p)] = \lim_{p \to 0}\left[1 - \frac{K}{1 + K + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n}\right] \quad (5.16)$$

$$\varepsilon_p = 1 - \frac{K}{1 + K} = \frac{1}{K + 1}$$

ε_p est appelée erreur de position en boucle fermée d'un système possédant un gain statique *K* en boucle ouverte. On peut conclure que la précision est meilleure si le gain statique est grand.

b) Erreur de position d'un système incluant un ou plusieurs pôles nuls

Considérons la fonction de transfert en boucle ouverte *G(p)* suivante :

$$G(p) = \frac{K}{p^\alpha (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n)}$$ où α est un entier positif non nul (*la classe du système*) (5.17)

La F.T.B.F. est égale donc à :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{K + p^\alpha (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n)} \quad (5.18)$$

$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0}[1 - H(p)] = \lim_{p \to 0}\left[1 - \frac{K}{K + p^\alpha (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n)}\right] = 1 - \frac{K}{K} = 0 \quad (5.19)$$

L'erreur de position en boucle fermée d'un système dont la F.T.B.O. comportant au moins un pôle nul, est nulle.

5.3.2 Erreur de vitesse ou erreur de traînage

Soit un système bouclé de fonction de transfert en boucle ouverte *G(p)* et de fonction de transfert en boucle fermée *H(p)*. On appelle erreur de vitesse (ou erreur de traînage) du système en boucle fermée, le paramètre ε_v défini par :

$$\varepsilon_v = \lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) \text{ lorsque } e(t)=t, \text{ rampe unitaire.} \tag{5.20}$$

En appliquant le théorème de la valeur finale, on aura:

$$\varepsilon_v = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} p[E(p) - S(p)] = \lim_{p\to 0} p[E(p) - H(p)E(p)] \tag{5.21}$$

Comme l'entrée est une rampe unitaire :

$$\varepsilon_v = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} p\left[\frac{1}{p^2} - \frac{H(p)}{p^2}\right] = \lim_{p\to 0} \left[\frac{1-H(p)}{p}\right] \tag{5.22}$$

L'erreur de vitesse permet d'évaluer la précision d'un système en boucle fermée, il permet de mesurer l'aptitude d'un système à donner une réponse qui suit le plus précisément possible une consigne variable dans le temps (asservissement), alors que l'erreur de position évalue son comportement lorsque la consigne est constante (régulation). La meilleure précision du système avec consigne variable est obtenue lorsque ε_v est faible.

a) Erreur de vitesse d'un système de gain statique *K* en boucle ouverte

Considérons un système possédant une fonction de transfert en boucle ouverte *G(p)* mis dans une boucle à retour unitaire, où :

$$G(p) = \frac{K}{1+a_1p+a_2p^2+\cdots+a_np^n} \tag{5.23}$$

La F.T.B.F. est égale à :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{K}{1+K+a_1p+a_2p^2+\cdots+a_np^n} \tag{5.24}$$

Par conséquent : $\varepsilon_v = \lim_{p\to 0} \left[\frac{1-H(p)}{p}\right] = \lim_{p\to 0} \frac{1}{p}\left[1 - \frac{K}{1+K+a_1p+a_2p^2+\cdots+a_np^n}\right] \Longrightarrow \varepsilon_v \longrightarrow +\infty$ (5.25)

L'erreur de vitesse en boucle fermée d'un système ayant un gain statique *K* en boucle ouverte est infinie.

b) Erreur de vitesse d'un système comportant un ou plusieurs pôles nuls

Considérons la fonction de transfert en boucle ouverte *G(p)* suivante :

$$G(p) = \frac{K}{p^\alpha(1+a_1p+a_2p^2+\cdots+a_np^n)} \tag{5.26}$$

Donc, la F.T.B.F. est égale à :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{K}{K+p^\alpha(1+a_1p+a_2p^2+\cdots+a_np^n)} \tag{5.27}$$

$$\varepsilon_v = \lim_{p\to 0} \left[\frac{1-H(p)}{p}\right] = \lim_{p\to 0} \frac{1}{p}\left[1 - \frac{K}{K+p^\alpha(1+a_1p+a_2p^2+\cdots+a_np^n)}\right] \tag{5.28}$$

$$\varepsilon_v = \lim_{p\to 0} \frac{1}{p}\left[1 - \frac{K}{K+p^\alpha}\right] = \lim_{p\to 0} \frac{1}{p}\left[\frac{p^\alpha}{K+p^\alpha}\right] = \lim_{p\to 0} \left[\frac{p^{\alpha-1}}{K+p^\alpha}\right] \tag{5.29}$$

Si $\alpha = 1$, on a $\quad \varepsilon_v = \lim_{p\to 0} \left[\frac{1}{K+p}\right] = \frac{1}{K}$

Si $\alpha > 1$, on a $\quad \varepsilon_v = \lim_{p\to 0} \left[\frac{p^{\alpha-1}}{K+p^\alpha}\right] = 0$

Remarque : pour qu'un système possède en B.F. une erreur de vitesse nulle (précision parfaite lorsque la consigne est variable), il faut que sa F.T.B.O. possède au moins un pôle nul double, c-à-d un terme en p^2 au dénominateur de $G(p)$.

5.3.3 Erreur d'accélération

Dans ce cas on a une entrée parabolique avec : $e(t) = at^2$ et $E(p) = \frac{2a}{p^3}$

De même comme l'erreur de vitesse et en fonction de la classe du système, on peut déduire la précision du système.

- système de classe $\alpha < 2 \quad \Longrightarrow \; \varepsilon_a = +\infty$
- système de classe $\alpha = 2 \quad \Longrightarrow \; \varepsilon_a = \frac{2a}{K}$
- système de classe $\alpha > 2 \quad \Longrightarrow \; \varepsilon_a = 0$

Table 5.1 Tableau récapitulatif.

Entrée	**Classe du système**			
	Classe 0	Classe 1	Classe 2	Classe > 2
Echelon (a)	$\varepsilon_p = \frac{a}{K+1}$	$\varepsilon_p = 0$	$\varepsilon_p = 0$	$\varepsilon_p = 0$
Rampe (at)	$\varepsilon_v = +\infty$	$\varepsilon_v = \frac{a}{K}$	$\varepsilon_v = 0$	$\varepsilon_v = 0$
Parabole (at^2)	$\varepsilon_a = +\infty$	$\varepsilon_a = +\infty$	$\varepsilon_a = \frac{2a}{K}$	0