# TD N° 3

**Exercice 1 :**

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte *G(p)* définie par :

$G(p) = \frac{K}{1+\tau p}$ avec $K > 0$ et $\tau > 0$

Montrer que ce système, placé dans une boucle à retour unitaire, est stable en boucle fermée quelle que soit la valeur du gain statique *K*.

**Exercice 2 :**

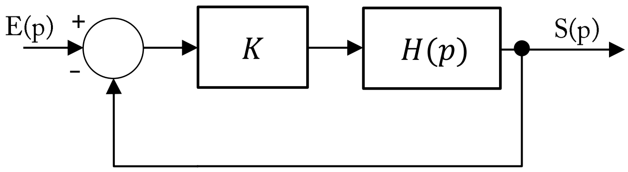
On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte *G(p)* définie par :

$$G(p) = \frac{K}{p(p+1)(p+2)} \quad \text{avec } K > 0$$

Déterminer à l'aide du critère de Routh les conditions de stabilité de ce système en boucle fermée lorsqu'il est placé dans une boucle d'asservissement à retour unitaire.

**Exercice 3 :**

Considérons le système suivant avec *K* paramètre réel et positif.




Avec :

$H(p) = \dfrac{1}{(p+2)(p+4)(p+10)}$

1- Pour *K=1*, examiner la stabilité de ce système en boucle ouverte.
2- Pour *K* variable, examiner la stabilité de ce système en boucle fermée.

**Exercice 4 :**

Calculer l'erreur de position et l'erreur de vitesse des systèmes en boucle fermée à retour unitaire pour les fonctions de transfert en boucle ouverte suivantes :

1. $G_1(p) = \frac{100}{(1+10p)(10+p)}$
2. $G_2(p) = \frac{10}{p(p+1)^2}$

**Exercice 5 :**

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte *G(p)* définie par :

1. $G(p) = \frac{K}{(p+3)^2}$ avec $K > 0$

On place ce système dans une boucle à retour unitaire. Déterminer la valeur de *K* qui assure au système en boucle fermée une erreur de position égale à 5 %.

# Solutions de la série de TD N°03

**Exercice 1 :**

La stabilité est étudiée par le calcul du pole unique de la FTBF $H(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{K}{Tp+K+1}$

Le pole de cette FTBF est $p_1 = -\frac{K+1}{T}$, il est toujours négatif quelque soit la valeur de K.

**Exercice 2 :**

La FTBF est égale à : $H(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{K}{p(p+1)(p+2)+K}$

Le dénominateur de cette FTBF est :

$$D(p) = p(p+1)(p+2) + K = p^3 + 3p^2 + 2p + K$$

D'où la table de Routh suivante :

| | |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 3 | K |
| 6-K | 0 |
| K | 0 |

Le système est stable si 6-K > 0 donc K< 6

**Exercice 3 :**

FTBO est égale à $H(p) = \frac{K}{(p+2)(p+4)(p+10)} = \frac{1}{p^3+16p^2+68p+80}$

L'équation caractéristique est $D(p) = p^3 + 16p^2 + 68p + 80$

Ce qui mène à la table de Routh suivante :

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 68 | 0 |
| 16 | 80 | 0 |
| 63 | 0 | 0 |
| 80 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

- Les pôles sont tous des réels négatifs (-2,-4,-10), donc système stable.
- A partir de la table de Routh on a, un même signe des éléments de la 1ere colonne, donc système stable.

Pour K variable on a la FTBF qui est égale à :

$$H(p) = \frac{K}{p^3 + 16p^2 + 68p + 80 + K}$$

La table de Routh est la suivante :

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 68 | 0 |
| 16 | 80+K | 0 |
| $\frac{1008-K}{16}$ | 0 | 0 |
| 80+K | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

Pour que tous les coefficients de la 1ère colonne soient du même signe il faut qu'ils soient tous positifs :

$\frac{1008-K}{16} > 0 \; et \quad 80 + K > 0 \Longrightarrow K < 1008 \; et \; K > -80$

Et comme par hypothèse K est positif alors $0 < K < 1008$

**Exercice 4 :**

1. La FTBF est égale à $H(p) = \frac{100}{(1+10p)(p+10)+100}$

Par définition $\varepsilon_p = \lim_{p\to 0}[1 - H(p)] = 1 - \frac{100}{10+100} = 0.091 = 9.1\%$

$$\varepsilon_V = \lim_{p\to 0}\left[\frac{1 - H(p)}{p}\right] = \lim_{p\to 0}\frac{0.091}{p} = +\infty$$

2. La FTBF a pour expression $H(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{10}{p(p+1)^2+10}$

$$\varepsilon_p = \lim_{p\to 0}[1 - H(p)] = 1 - \frac{10}{10} = 0$$

L'erreur de vitesse a pour expression :

$$\varepsilon_V = \lim_{p\to 0}\left[\frac{1-H(p)}{p}\right] = \lim_{p\to 0}[\frac{1}{p} - \frac{10}{p^2(p+1)^2+10p}] = \lim_{p\to 0}[\frac{p^2(p+1)^2+10p-10p}{p^3(p+1)^2+10p^2}] = \lim_{p\to 0}[\frac{(p+1)^2}{p(p+1)^2+10}]=0.1$$

**Exercice 5 :**

La FTBF a pour expression $H(p) = \frac{K}{(p+3)^2+K}$

L'erreur de position $\varepsilon_p = \lim_{p\to 0}[1 - H(p)] = 1 - \frac{K}{9+K} = \frac{9}{9+K}$

Si on souhaite régler K pour une erreur de position de 5%, on doit avoir : $\varepsilon_p = \frac{9}{9+K} = 0.05 \Longrightarrow K = \frac{9}{0.05} - 9 = 171$